

### Analyse Mathématique pour l'Ingénieur (MAA106)

#### Devoir 2, à rendre pour la séance numéro 7, le 02 novembre 2021

#### Une propriété des matrices symétriques définies positives

Soit  $n$  en entier supérieur ou égal à un. Pour  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, \dots, y_n)$  dans  $\mathbb{R}^n$ , on définit le produit scalaire  $(x, y)$  des vecteurs  $x$  et  $y$  par la relation  $(x, y) = \sum_{j=1}^n x_j y_j$  et la norme  $\|x\|$  de  $x$  par  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ . On définit la sphère unité  $S$  de  $\mathbb{R}^n$  selon  $S = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\}$ . On se donne une matrice  $A$  à  $n$  lignes et  $n$  colonnes, symétrique, c'est à dire  $(Ax, y) = (x, Ay)$  pour tout  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{R}^n$ . On suppose de plus que la matrice  $A$  est définie positive :  $(Ax, x) > 0$  si  $x$  est un vecteur non nul de  $\mathbb{R}^n$ . Pour  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$ , on pose  $f(x) = (Ax, x)$ .

- a) La sphère  $S$  est-elle ouverte ?
- b) La sphère  $S$  est-elle fermée ?
- c) La sphère  $S$  est-elle bornée ?
- d) La sphère  $S$  est-elle compacte ?
- e) On suppose dans cette question (uniquement)  $n = 2$ . On se donne une suite quelconque de réels  $(\alpha^k)_{k \in \mathbb{N}}$  et on pose  $x^k = (\cos(\alpha^k), \sin(\alpha^k))$ . Montrer que  $x^k \in S$  pour tout entier  $k$  et rappeler pourquoi la suite  $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$  admet toujours au moins une valeur d'adhérence.
- f) Montrer que l'application  $f$  est continue de  $\mathbb{R}^n$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .
- g) En déduire que l'application  $f$  est continue de  $S$  dans  $\mathbb{R}$ .
- h) Montrer qu'il existe  $\alpha$  strictement positif de sorte que  $\forall x \in S, f(x) \geq \alpha$ .
- i) Si  $\alpha > 0$  désigne le nombre trouvé à la question précédente, démontrer que  $\forall x \in \mathbb{R}^n, (Ax, x) \geq \alpha \|x\|^2$ .