le cnam

Algèbre de Boole, probabilités et arithmétique

Cours 4 Fonctions

- Couples

Un couple (x, y) est une "paire ordonnée". La définition d'un couple n'est pas intuitive et la plupart des auteurs (depuis Kazimierz Kuratowski, 1896-1980) s'accordent sur la définition suivante : $(x, y) = \big\{\{x\}, \{x, y\}\big\}$. L'intérêt essentiel de la notion de couple réside dans la condition d'égalité de deux couples : on a égalité $(x, y) = (u, v)$ si et seulement si $x = u$ et $y = v$.
Si $z = (x, y)$, on dit que x est la première projection (ou composante) de z et y est la seconde projection, ou deuxième composante.
On a $(y, x) \neq (x, y)$ sauf si $y = x$. Dans ce cas, le couple (x, x) ne se réduit pas au singleton $\{x\}$. On a en effet $(x, x) = \big\{\{x\}\big\}$, qui est différent !

- Produit cartésien de deux ensembles

On se donne deux ensembles *a priori* non vides X et Y. Le produit cartésien $X \times Y$ est l'ensemble des couples dont la première composante est formée d'éléments de X et la seconde d'éléments de Y : $X \times Y = \{(x, y), x \in X, y \in Y\}$.
On représente souvent un tel produit cartésien avec des "coordonnées cartésiennes", ainsi que proposé par René Descartes (1596-1650).
Si l'un des deux ensembles est vide, le produit cartésien est vide : $X \times \varnothing = \varnothing$.
Si $A \subset X$ et $B \subset Y$, alors $(A \times B) \subset (X \times Y)$.

- Triplets et généralisations

Le plus naturel est de définir un triplet (x, y, z) grâce à la relation $(x, y, z) = \big((x, y), z\big)$. Mais alors la place des parenthèses est *a priori* importante puisque $\big((x, y), z\big) \neq \big(x, (y, z)\big)$.
Surtout, comme pour les couples, on a la propriété que deux triplets sont égaux si et seulement si les trois composantes sont égales : $(x, y, z) = (u, v, w)$ si et seulement si $x = u$, $y = v$ et $z = w$.
Même si en toute rigueur, l'ensemble des triplets $X \times Y \times Z$ devrait se noter $(X \times Y) \times Z$ puisque $(X \times Y) \times Z \neq X \times (Y \times Z)$, on confond en pratique ces deux ensembles et on adopte la notation $X \times Y \times Z$ pour l'ensemble des triplets de première composante dans l'ensemble X, de seconde composante dans Y et de troisième projection dans l'ensemble Z.
Si on se donne un ensemble X, on a enfin les notations usuelles $X^2 = X \times X$, $X^3 = X \times X \times X$ et pour n entier supérieur ou égal à 1, $X^n = X \times \cdots \times X$ pour désigner le produit cartésien de l'ensemble X dupliqué n fois. Les éléments de X^n s'appellent des "n-uplets".

- Graphe

On se donne deux ensembles *a priori* non vides X et Y. Un graphe G est un sous-ensemble du produit cartésien $X \times Y$: $G \subset X \times Y$. Les graphes ont un intérêt en soi et permettent de modéliser des liens éventuellement complexes entre deux ensembles.

François Dubois, octobre 2022.

• Application

Une application f est la donnée d'un triplet (X, Y, G), où X est appelé "ensemble de départ" et Y "ensemble d'arrivée". Enfin, $G \subset X \times Y$ est un graphe qui a la propriété suivante : pour tout élément x de l'ensemble de départ X, il existe un unique élément y de l'ensemble d'arrivée Y, noté $f(x)$ et appelé "image de x par l'application f", de sorte que $(x, y) \in G$. Avec un langage symbolique, on a $\forall x \in X, \exists! \, y \in Y, (x, y) \in G$.

On écrit souvent la définition d'une application donnée f sous la forme $X \ni x \longmapsto f(x) \in Y$ qui permet de préciser à la fois les ensembles de départ et d'arrivée et la notation pour les valeurs prises $f(x)$. Dans ce cas, on dit que l'application f est "à valeurs" dans l'ensemble Y, simplement pour indiquer que l'image $f(x)$ appartient toujours à l'ensemble Y.

Le graphe G peut s'écrire $G = \{ \big(x, f(x)\big), x \in X \}$. Cette notation rappelle bien que tout élément $(x \in X)$ a une image et une seule $f(x)$ dans l'ensemble d'arrivée Y.

Par exemple, pour l'application f définie par $\mathbb{N} \ni n \longmapsto f(n) = n + n \in \mathbb{N}$, le graphe G est composé de tous les couples de la forme $(n, 2n)$ pour tous les entiers naturels.

• Égalité de deux applications

On se donne deux applications $f = (X, Y, G)$ et $g = (\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{G})$. Par définition, on dit qu'elles sont égales et on écrit $f = g$ sous les trois conditions suivantes : les deux applications ont même ensemble de départ, elles ont même ensemble d'arrivée et elles ont même graphe. On a donc $(f = g) \Leftrightarrow (X = \widetilde{X}, Y = \widetilde{Y}, G = \widetilde{G})$. En particulier, les images de tout $x \in X$ par les deux applications sont égales : $\forall x \in X, f(x) = g(x)$.

Par exemple, considérons l'application $\mathbb{N} \ni n \longmapsto f(n) = n + n \in \mathbb{N}$ vue plus haut, l'ensemble $P \subset \mathbb{N}$ des nombres entiers pairs et l'application $\widetilde{f} \colon \mathbb{N} \longrightarrow P$ telle que $\widetilde{f}(n) = f(n)$ pour tout entier n. Les deux applications f et $\widetilde{f}$ sont distinctes car même si elles ont même ensemble de départ $\mathbb{N}$ et même façon de déterminer l'image de tout entier, elles n'ont pas le même ensemble d'arrivée.

• Restriction d'une application

On se donne une application f d'un ensemble de départ X dans un ensemble Y. On se donne aussi une partie non vide A de X : $A \subset X$. La restriction de f à l'ensemble A est notée $f_{|A}$. C'est l'unique application qui a pour ensemble de départ A, pour ensemble d'arrivée Y et telle que $\big(\forall x \in A, f_{|A}(x) = f(x)\big)$.

• Prolongement d'une application

On se donne une application f d'un ensemble de départ X dans un ensemble Y. On suppose l'ensemble X inclus dans un ensemble Z "plus grane" : $X \subset Z$. Un prolongement g de f à l'ensemble Z est une application de Z dans Y telle que pour tout $x \in X$, $g(x) = f(x)$. En d'autre termes, l'application f est toujours la restriction à l'ensemble X de chacun de ses prolongements à un ensemble Z qui contient son ensemble de départ X.

• Fonction

Une fonction f de X dans Y est également la donnée d'un triplet (X, Y, G). Cette fois, le graphe $G \subset X \times Y$ est tel que pour tout $x \in X$, soit on dispose d'une image unique $f(y) \in Y$ comme dans le cas d'une application, soit $x \in X$ n'a pas d'image.

Pour une fonction f de X dans Y, on a donc
$\forall x \in X, \big((\{y \in Y, (x,y) \in G\} = \varnothing) \text{ ou } (\exists!\, y \in Y, (x,y) \in G)\big)$.
L'ensemble de définition D_f de la fonction f est l'ensemble des $x \in X$ qui ont une image (et une seule !) par l'application f: $D_f = \{x \in X, \exists!\, y \in Y, (x,y) \in G\}$. Une application est une fonction particulière telle que l'ensemble de définition est exactement égal à l'ensemble de départ. La restriction d'une fonction f à une partie $A \subset D_f$ est l'application $f_{|_A}$ de A dans Y telle que $\big(\forall x \in A, f_{|_A}(x) = f(x)\big)$. La restriction d'une fonction f à son ensemble de départ D_f est une application définie sur D_f et à valeurs dans l'ensemble d'arrivée Y.

- Ensemble des applications d'un ensemble dans un autre

On se donne deux ensembles non vides X et Y. L'ensemble $\mathscr{A}(X,Y)$ des applications de X dans Y regroupe toutes les applications qui ont comme ensemble de départ X et comme ensemble d'arrivée Y. On a $f \in \mathscr{A}(X,Y)$ si et seulement si il existe un graphe $G \subset X \times Y$ tel que $(\forall x \in X, \exists!\, y \in Y, (x,y) \in G)$.
Prenons par exemple $X = \{1,2\}$ et $Y = \{a,b,c\}$ et essayons de construire toutes les applications de X dans Y. Si $f \in \mathscr{A}(X,Y)$, alors $f(1)$ prend l'une des valeurs a, b ou c. Notons $y_1 = f(1)$ l'un des trois choix possibles. De même, la seconde image $y_2 = f(2)$ peut prendre une des trois valeurs a, b ou c. Se donner $f \in \mathscr{A}(X,Y)$ revient donc dans ce cas à se donner un couple $(y_1,y_2) \in Y \times Y$. On constate donc que $\mathscr{A}(X,Y)$ peut s'identifier à l'ensemble des couples $(y_1,y_2) \in Y \times Y$, c'est à dire à Y^2.
Si, toutes choses égales par ailleurs, nous changeons $X = \{1,2\}$ pour $X = \{1,\ldots,n\}$, nous construisons l'image $y = f(x)$ du n-uplet $x = (x_1,\ldots,x_n)$ comme un n-uplet $y = (y_1,\ldots,y_n)$ qui appartient Y^n car chaque composante y_i appartient à Y. On peut donc identifier dans ce cas les ensembles $\mathscr{A}(X,Y)$ et Y^n.
Dans le cas général de deux ensemble X et Y quelconques, l'ensemble $\mathscr{A}(X,Y)$ des applications est constitué des "X-uplets" dont chaque composante appartient à Y. On peut donc introduite la notation Y^X pour désigner l'ensemble $\mathscr{A}(X,Y)$.

- Famille indexée, suite paramétrée par les nombres entiers

On se donne un ensemble I d'indices et un ensemble X. Une famille indexée par I d'éléments de X, notée $(x_i)_{i\in I}$, est une application $I \ni i \longmapsto x_i \in X$ qui à tout indice $i \in I$ associe un unique $x_i \in X$. C'est une autre notation pour désigner une application d'ensemble de départ I et d'ensemble d'arrivée X.
Dans le cas où $I = \mathbb{N}$, ensemble des nombres entiers positifs, on parle d'une "suite" pour désigner une famille indexée par $\mathbb{N}$. On note alors, de façon très classique $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une telle application. L'application $\mathbb{N} \ni n \longmapsto f(n) = n+n \in \mathbb{N}$ vue plus haut s'écrit dans ce contexte $x_n = n+n$.

- Ensemble image d'une application

On se donne une application f entre deux ensembles non vides X et Y. L'image de f, notée $\mathrm{Im}(f)$, est le sous ensemble des valeurs $f(x)$ prises par la fonction f lorsque x parcourt l'ensemble X: $\mathrm{Im}(f) = \{f(x), x \in X\}$. C'est un sous-ensemble de Y: $\mathrm{Im}(f) \subset Y$.
Si $y \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $x \in X$ de sorte que $f(x) = y$. On dit que x est un "antécédent" de y.

Attention, un élément y de $\mathrm{Im}(f)$ peut éventuellement avoir plusieurs antécédents !
Par exemple pour l'application f de $X = \{1, 2\}$ dans $Y = \{a, b, c\}$ définie par $f(1) = a$, $f(2) = a$, on a $\mathrm{Im}(f) = \{a\}$. On remarque que cet élément $a \in Y$ a deux antécédents alors que les éléments b et c n'ont pas d'antécédent.

• Image directe

La notion d'image directe est une généralisation de la notion d'image de l'application f définie au paragraphe précédent. On se donne une partie A de l'ensemble de départ X : $A \subset X$. L'image directe $f(A)$ est l'ensemble de toutes les images $f(x)$ lorsque la variable x parcourt l'ensemble A. On a $f(A) = \{f(x), x \in A\}$. C'est un sous-ensemble de l'ensemble d'arrivée : $f(A) \subset Y$.
Lorsque $A = X$, on retrouve l'image de f définie plus haut. On a donc $f(X) = \mathrm{Im}(f)$ et les deux notations sont utilisées indifféremment.
Par exemple pour $\mathbb{N} \ni n \longmapsto f(n) = n+n \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{Im}(f) = f(\mathbb{N}) = P$, ensemble des nombres entiers pairs.
On a les propriétés suivantes pour deux parties arbitraires A_1 et A_2 de l'ensemble de départ X :
$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ et $f(A_1 \cap A_2) \subset (f(A_1) \cap f(A_2))$.

• Image réciproque

On se donne maintenant une partie B de l'ensemble d'arrivée Y : $B \subset Y$. L'image réciproque $f^{-1}(B)$ de la partie B est composée de tous les antécédents $x \in X$ des éléments de B. On a par définition $f^{-1}(B) = \{x \in X, f(x) \in B\}$. On a bien sûr $f^{-1}(B) \subset X$.
L'image réciproque $f^{-1}(B)$ peut très bien être vide si aucun $x \in X$ n'a son image $f(x)$ dans l'ensemble B. Par exemple pour l'application f de $X = \{1, 2\}$ dans $Y = \{a, b, c\}$ définie par $f(1) = a$, $f(2) = a$, on a $f^{-1}(\{b, c\}) = \varnothing$.
Autre exemple. L'image réciproque de l'ensemble d'arrivée $\mathbb{N}$ pour l'application
$\mathbb{N} \ni n \longmapsto n+n \in \mathbb{N}$ est l'ensemble de départ $\mathbb{N}$ lui-même. Par contre l'image réciproque de l'ensemble des nombres impairs pour cette même application est vide !
On a les propriétés suivantes pour deux parties arbitraires B_1 et B_2 de l'ensemble de d'arrivée Y :
$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ et $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

• Composée de deux applications

On se donne deux applications $f = (X, Y, G)$ et $g = (Y, Z, H)$. On remarque que l'ensemble de départ de g est choisi exactement égal à l'ensemble d'arrivée de f. Si on se donne $x \in X$, il existe un unique $y = f(x)$ qui appartient à l'ensemble Y. Cet élément $y = f(x)$ particulier a lui-même une image unique grâce à l'appllcation g et on peut considérer $z = g(y) = g\big(f(x)\big)$.
Par définition, l'application composé $g_\circ f$ (on lit "g rond f") a pour ensemble de départ X, ensemble d'arrivée Z et pour tout $x \in X$, on a $(g_\circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$. On remarque que l'on effectue d'abord f et ensuite g . La notation "$g_\circ f$" n'est donc naturellle que si on le lit de droite à gauche. Elle se justifie par la simplicité de la définition $(g_\circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$ où il n'est pas nécessaire de changer la position des fonctions entre le membre de gauche et le membre de droite de l'égalité.
La composée $(g_\circ f)$ s'appelle aussi "produit de composition" des applications f et g.

- Associativité du produit de composition

On se donne maintenant trois applications : $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ et $h : Z \longrightarrow T$. Notons bien les conditions imposées : l'ensemble d'arrivée de f est identique à l'ensemble de départ de g et l'ensemble d'arrivée de g est identique à l'ensemble de départ de h. On peut donc d'une part effectuer $(g_\circ f)$ puis la composer ensuite avec h pour définir $h_\circ(g_\circ f)$ et d'autre part effectuer f puis la composer avec $(h_\circ g)$ pour considérer $(h_\circ g)_\circ f$.
Les deux applications $h_\circ(g_\circ f)$ et $(h_\circ g)_\circ f$ sont égales. Elles ont même ensemble de départ X, même ensemble d'arrivée T et pour tout $x \in X$, on a
$\big(h_\circ(g_\circ f)\big)(x) = \big((h_\circ g)_\circ f\big)(x) = h\big(g\big(f(x)\big)\big)$. On peut placer les parenthèses où l'on veut lors d'un calcul itéré de compositions de plusieurs applications. Le produit de composition $_\circ$ est associatif.

- Non commutativité (en général !) du produit de composition

On se place dans le cadre de deux applications f et g de X dans Y d'une part et de Y dans Z d'autre part. Nous avons pu définir $(g_\circ f)$ comme une application de X dans Z. Peut-on échanger les facteurs de ce eproduit de composition ? Si nous voulons définir $(f_\circ g)$, nous effectons g d'abord $Y \longrightarrow Z$ et nous voulons ensuite faire agir l'application f définie dans l'ensemble X. Pour calculer $f\big(g(y)\big)$, il est d'abord nécessaire d'avoir $Z \subset X$ sinon on ne peut pas évaluer l'expression.
Si nous imaginons ensuite forcer l'égalité des deux applications $(g_\circ f)$ et $(f_\circ g)$, les deux ensembles de départ doivent être égaux, ce qui impose $X = Y$. Les deux ensembles d'arrivées doivent être identiques aussi, ce qui impose maintenant $Z = Y$. La question d'une éventuelle égalité de $(g_\circ f)$ et $(f_\circ g)$ ne peut être envisagé que sous la conditions restrictive $X = Y = Z$.
Si tel est le cas, on peut évaluer sans difficulté d'une part $g\big(f(x)\big)$ et $f\big(g(x)\big)$ qui sont, pour tout $x \in X$, deux éléments de l'ensemble X. Sont-ils égaux ? En général, non, comme l'illustre l'exemple qui suit.
On prend dans cet exemple $X = \mathbb{N}$, $f(n) = 2n$ et $g(n) = 2n+1$ pour tout entier n. On a d'une part $(g_\circ f)(n) = g\big(f(n)\big) = g(2n) = 2\,(2n)+1 = 4n+1$ et d'autre part
$(f_\circ g)(n) = f\big(g(n)\big) = f(2n+1) = 2\,(2n+1) = 4n+2$. les deux nombres entiers sont toujours différents donc $f_\circ g \neq g_\circ f$. Notons qu'il aurait suffi qu'il existe une valeur particulière de $x \in X$ de sorte que $(f_\circ g)(x) \neq (g_\circ f)(x)$ pour conclure. Nous laissons au lecteur le soin de construire d'autres exemples avec un ensemble fini X.

- Application injective

On se donne deux ensembles non vides X et Y ainsi qu'une application i de X dans Y. On dit que i est injective (ou que l'application i est une injection) lorsque deux éléments distincts de X ont des images distinctes dans Y. On a donc $\forall x \in X, \forall x' \in X, \big((x \neq x') \Rightarrow (i(x) \neq i(x'))\big)$.
On préfère en général utiliser la contraposée de l'implication précédente :
$\forall x \in X, \forall x' \in X, \big((i(x) = i(x')) \Rightarrow (x = x')\big)$. En d'autres termes, l'équation $(i(x) = i(x'))$ a pour seules solutions $x = x'$ dans X.
L'application $\mathbb{N} \ni n \longmapsto n+n \in \mathbb{N}$ est injective alors que l'application nulle définie par
$\mathbb{N} \ni n \longmapsto 0 \in \mathbb{N}$ ne l'est pas.

- Application surjective

On se donne deux ensembles non vides X et Y et une application s de X dans Y. On dit que s est surjective (ou que l'application s est une surjection) de X "sur" Y lorsque tous les éléments de l'ensemble d'arrivée Y ont au moins un antécédent : $\forall y \in Y, \exists x \in X, s(x) = y$. Pour tout élément $y \in Y$, l'équation $s(x) = y$ a toujours au moins une solution dans X.
L'application $\mathbb{N} \ni n \longmapsto n+n \in \mathbb{N}$ n'est pas surjective alors que si on modifie l'ensemble d'arrivée pour l'ensemble P des nombres pairs, on obtient l'application $\mathbb{N} \ni n \longmapsto n+n \in P$ qui est, elle, surjective.

- Bijection

On se donne toujours deux ensembles non vides X et Y. Une bijection b de X sur Y est une application de X dans Y à la fois injective et surjective. On a donc la relation
$\forall y \in Y, \exists! x \in X, b(x) = y$.
Comme une application f entre deux ensembles Z et T exprime que
$\forall z \in Z, \exists! t \in T, t = f(z)$, on constate qu'il existe une application de Y dans X, appelée application réciproque et notée b^{-1} qui à tout $y \in Y$ associe l'unique $x \in X$ solution de l'équation $b(x) = y$.
La difficulté principale de l'application réciproque est qu'on échange les ensembles de départ et d'arrivée. L'ensemble de départ de b est l'ensemble d'arrivée de b^{-1} et l'ensemble d'arrivée de b devient l'ensemble de départ de b^{-1}.
On peut démontrer que l'application réciproque b^{-1} est elle-même bijective. De plus, si on appelle "identité de l'ensemble Z" et qu'on note id_Z l'application de Z dans Z qui à tout $z \in Z$, associe $\mathrm{id}_Z(z) = z$, on peut établir les relations suivantes : $(b^{-1})_\circ b = \mathrm{id}_X$ et $b_\circ b^{-1} = \mathrm{id}_Y$. Nous laissons cette propriété en exercice au lecteur.

- Réciproque de la composée de deux bijections

On se donne une application $f : X \longrightarrow Y$ bijective et une seconde bijection $g : Y \longrightarrow Z$. On peut bien sûr former la composée $g_\circ f$. Cette nouvelle application est bijective de X sur Z et la bijection réciproque de Z sur X peut s'écrire $(g_\circ f)^{-1} = (f^{-1})_\circ (g^{-1})$.

Exercices

- Non-associativité de la notion de triplet

Avec la définition proposée dans le cours pour un couple (u, v), montrer qu'on a toujours $\big((x, y), z\big) \neq \big(x, (y, z)\big)$.

- Propriétés des images directes et réciproques

On se donne une application f entre les ensembles non vides X et Y. On se donne deux parties quelconques A_1 et A_2 de l'ensemble de départ X et deux parties arbitraires B_1 et B_2 de l'ensemble de d'arrivée Y.
a) Montrer que $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
b) Montrer que $f(A_1 \cap A_2) \subset (f(A_1) \cap f(A_2))$.
c) Avec un contre-exemple simple, montrer que cette inclusion est stricte en général ; il

existe des éléments de $f(A_1) \cap f(A_2)$ qui ne sont pas image par f d'éléments de l'intersection $A_1 \cap A_2$.

d) Démontrer que $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

e) Établir la relation $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

- Injection, surjection et bijection entre ensembles finis

On rappelle que si Z est un ensemble fini quelconque, on note $|Z|$ le nombre de ses éléments. On se donne deux ensembles finis X et Y et f une application de X dans Y. Comparer les cardinaux $|X|$ et $|Y|$ dans les trois cas suivants :

a) f est injective [on peut montrer par récurrence que $|X| \geq |f(X)|$]

b) f est surjective

c) f est bijective.

- Sur la non-commutativité de la loi de composition

On se donne un ensemble X à trois éléments et les applications f et g de X dans X définies par les relations suivantes : $f(a) = a$, $f(b) = c$, $f(c) = b$ et $g(a) = b$, $g(b) = a$, $g(c) = c$.

a) Montrer que les applications f et g sont bijectives de X sur X.

b) Calculer les applications réciproques f^{-1} et g^{-1}. Que remarque-on dans ce cas très particulier ?

c) Expliciter les deux composées $(g_\circ f)$ et $(f_\circ g)$ avant de constater que $f_\circ g \neq g_\circ f$.

d) Montrer que la composée $(g_\circ f)$ est bijective.

e) Évaluer complètement l'application réciproque $(g_\circ f)^{-1}$.

f) Calculer la composée $(f^{-1})_\circ g^{-1}$. Que constate-t-on ?