le cnam

Algèbre de Boole, probabilités et arithmétique

Cours 10 Relations d'ordre et d'équivalence

- Relations dans un ensemble

On rappelle que si on se donne deux ensembles non vides E et F, le produit cartésien $E \times F$ est l'ensemble des couples formés d'un élément de E et d'un élément de F :
$E \times F = \{(x, y), x \in E, y \in F\}$. Un graphe G est un sous-ensemble de ce produit cartésien.
Dans ce chapitre, on définit une relation $\mathscr{R}$ dans l'ensemble non vide E en prenant $F = E$ et en fixant une partie $G \subset E \times E$. On dit que $x \in E$ est en relation avec $y \in E$ et on écrit $x \mathscr{R} y$ si et seulement si $(x, y) \in G$.
Le diagramme cartésien d'une relation $\mathscr{R}$ peut *a priori* se présenter de deux façons : avec une approche "fonction" ou avec une approche "matrice". Nous l'illustrons sur un exemple. On note $\mathscr{R}$ la relation décrite avec le graphe G suivant sur l'ensemble $E = \{a, b, c\}$:
$G = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c)\}$.

c		○	●
b	○	●	
a	●		
	a	b	c

a	●	○	
b		●	○
c			●
	a	b	c

Figure 1. Deux modes de représentation cartésienne d'une relation. Le mode "fonction" à gauche et le mode "matrice" à droite. Il s'agit dans les deux cas de la même relation.

Avec le mode de représentation de type fonction (à gauche), on présente le produit cartésien de façon analogue à la représentaion graphique d'une fonction. La première composante d'un élément (x, y) du graphe est placée le long de l'axe des abscisses, qui va de gauche à droite, et la seconde le long d'un axe des ordonnées, orienté du bas vers le haut. Avec le mode de représentation de type matrice (à droite), le produit cartésien est rangé dans un tableau de la même façon que l'on stocke les matrices. La première composante d'un élément du graphe est associée à une ligne de la matrice, avec une orientation de haut en bas, et la seconde à une colonne de la matrice, avec un axe orienté de gauche à droite.

Figure 2. Diagramme sagittal de la relation définie sur l'ensemble $E = \{a, b, c\}$ à l'aide du graphe $G = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c)\}$.

François Dubois, novembre 2023.

- Diagramme sagittal

Le diagramme sagittal de la relation $\mathscr{R}$ sur l'ensemble E consiste à représenter avec une flèche allant de x à y le fait que $x \mathscr{R} y$, x est en relation avec y. Le diagramme sagittal de la relation $\mathscr{R}$ introduite au premier paragraphe est représenté à la figure 2.

- Exemples de relations

Avec $E = \mathbb{Z}$, on se donne un entier $n \geq 1$. On a la relation de congruence $x \equiv y$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ de sorte que $x = y + kn$. Elle a été étudiée lors de la septième leçon.
On se donne un ensemble X. La relation d'inclusion dans l'ensemble $E = \mathscr{P}(X)$ des parties de l'ensemble X est définie par $A \subset B$ si et seulement si $(\forall x \in A)$, on a aussi $x \in B$. Nous l'avons rencontrée au chapitre 3.
On prend $E = \mathbb{N}$, ensemble des entiers positifs. La relation $x \leq y$ est vraie si et seulement si après un certain nombre d'étapes, le nombre y est le successeur du nombre entier x; en d'autres termes, il existe $k \in \mathbb{N}$, $y = x + k$. Nous avons introduit cette inégalité classique au second chapitre ; de plus, la relation $\leq$ s'étend à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers.
On se donne, comme à la leçon 6 sur la division euclidienne, un entier $n \geq 1$ et l'ensemble $D(n)$ de ses diviseurs : $D(n) = \{d \in \mathbb{N}, \exists \ell \in \mathbb{N}, n = d\,\ell\}$. Dans l'ensemble $E = D(n)$, on définit la relation "divise" : $d \,|\, m$ (et on lit "d divise m") si et seulement si il existe $\ell \in \mathbb{N}$ de sorte que $m = d\,\ell$. Nous remarquons aussi que cette relation "divise" est également définie sur l'ensemble $E = \mathbb{N}$ des nombres entiers naturels.

- Relation réflexive

La relation $\mathscr{R}$ sur l'ensemble E est réflexive si et seulement si $(\forall x \in E, x \mathscr{R} x)$. Pour la représentaion cartésienne, la diagonale de $E \times E$ est incluse dans le graphe (voir la figure 1). Le diagramme sagittal fait apparaître des boucles pour chaque élément $x \in E$ (voir la figure 2).
Les quatre exemples de relations proposés ci-dessus : $\equiv$, $\subset$, $\leq$ et $|$ sont réflexives.
L'inégalité stricte $<$ définie pour les nombres entiers par $(x < y)$ si et seulement si $(x \leq y)$ et $(x \neq y)$ n'est bien entendu par réflexive.

- Relation transitive

La relation $\mathscr{R}$ sur l'ensemble E est transitive si et seulement si
$\forall (x, y, z) \in E \times E \times E$, $\big(\big((x \mathscr{R} y) \text{ et } (y \mathscr{R} z) \big) \Rightarrow (x \mathscr{R} z) \big)$. En d'autres termes, si la relation $\mathscr{R}$ nous permet d'aller de x à y et de y à z, on peut toujours prendre un raccourci en allant directement de x à z.
La relation $\mathscr{R}$ présentée au début du chapitre et illustrée figure 2 n'est pas transitive. Et la transitivité n'est pas facile à déceler à la lecture du graphe puisqu'il faut étudier *a priori* tous les cas de figure.

a	$\bullet$	$\circ$	
b		$\bullet$	$\circ$
c			$\bullet$
	a	b	c

a	$\bullet$	$\circ$	$\star$
b		$\bullet$	$\circ$
c			$\bullet$
	a	b	c

Figure 3. À gauche : graphe de la relation $\mathscr{R}$ non transitive illustrée figure 2. Si on ajoute le lien $(\star)$ allant de a à c, on obtient le graphe de droite qui correspond à une relation transitive.

Observons que les quatre relations classiques $\equiv$, $\subset$, $\leq$ et $|$ sont transitives :
$\big(x \equiv y \pmod n$ et $y \equiv z \pmod n\big)$ entraîne $x \equiv z \pmod n$, $(A \subset B$ et $B \subset C)$ entraîne $A \subset C$, $(x \leq y$ et $y \leq z)$ entraîne $x \leq z$ et enfin $(a|b)$ et $(b|c)$ entraînent $(a|c)$.

- Relation symétrique

La relation $\mathscr{R}$ sur l'ensemble E est symétrique si et seulement si
$\forall (x,y) \in E \times E,\ \big((x \mathscr{R} y) \Rightarrow (y \mathscr{R} x)\big)$.
Le diagramme sagittal fait toujours apparaître une double flèche de x à y et de y à x si x et y sont différents. Le graphe d'une relation symétrique est représenté par une matrice symétrique. La relation de congruence $\equiv$ est symétrique dans $\mathbb{Z}$. Par contre, les relations d'inclusion $\subset$ dans $\mathscr{P}(X)$, l'inégalité $\leq$ dans $\mathbb{N}$ et la relation de divisibilité $|$ dans $D(n)$ ne sont pas symétriques : on peut toujours trouver $x \neq y$ de sorte que x est en relation avec y mais y n'est pas en relation avec x [exercice !].

- Relation antisymétrique

La relation $\mathscr{R}$ sur l'ensemble E est antisymétrique si et seulement si
$\forall (x,y) \in E \times E,\ \big((x \mathscr{R} y)$ et $(y \mathscr{R} x) \Rightarrow (x = y)\big)$.
Il faut remarquer qu'une relation antisymétrique n'est pas symétrique mais qu'une relation binaire peut être non symétrique sans être pour autant antisymétrique [exercice !]. Le diagramme sagittal d'une relation antisymétrique fait apparaître au plus une simple flèche entre x et y si x et y sont différents. Après une éventuelle réorganisation de l'ordre des éléments de l'ensemble E, le graphe est situé "en haut et à droite" de la diagonale; voir la figure 4.

$$\begin{array}{|c|ccc|} \hline a & \bullet & \circ & \\ b & & \bullet & \circ \\ c & & & \bullet \\ \hline & a & b & c \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|ccc|} \hline b & \bullet & \circ & \\ c & & \bullet & \\ a & \circ & & \bullet \\ \hline & b & c & a \\ \hline \end{array}$$

Figure 4. À gauche : graphe de la relation $\mathscr{R}$ antisymétrique illustrée à la figure 2. Le graphe est situé en haut et à droite de la diagonale. Si on modifier l'ordre de présentation des éléments de l'ensemble $\{b, c, a\}$, on perd cette propriété (à droite).

- Relation d'équivalence

Une relation $\mathscr{R}$ sur l'ensemble E est une relation d'équivalence si elle est à la fois, réflexive, transitive et symétrique. On la note parfois $\sim$.
La congruence *modulo n* définie sur $\mathbb{Z}$ est une relation d'équivalence.

L'égalité entre deux objets mathématiques, deux ensembles, abordée lors du troisième cours, a toutes les propriétés d'une relation d'équivalence : elle est réflexive, transitive et symétrique. Mais comme l'ensemble de tous les ensembles n'existe pas, on ne peut pas parler de relation d'équivalence en toute rigueur ! Toutefois, la notion de relation d'équivalence est une généralisation dans le contexte de la théorie des ensembles de la notion d'égalité.

L'équipotence entre deux ensembles est définie par l'existence d'une bijection entre ces deux ensembles. Tout ensemble X est équipotent avec lui-même puisque l'identité $X \ni x \longmapsto x \in X$ est bien une bijection. Si il existe une bijection σ de l'ensemble X sur l'ensemble Y et une bijection τ de l'ensemble Y sur l'ensemble Z, la composée $\tau_\circ\sigma$ est une bijection de X sur Z et la relation d'équipotence est transitive. Si il existe une bijection σ de l'ensemble X sur l'ensemble Y, alors pour tout $y \in Y$, il existe un unique antécédent $x \in X$ de sorte que $\sigma(x) = y$. Cet unique antécédent x est l'image de y par l'application réciproque σ^{-1} qui est aussi une bijection, de Y sur X. L'ensemble Y est donc également équipotent à l'ensemble X. La relation d'équipotence est symétrique. Noter que l'équipotence n'est pas un exemple de "relation d'équivalence" car l'ensemble de tous les ensembles n'existe pas.

- Classes d'équivalence

On se donne une relation d'équivalence $\mathscr{R}$ dans l'ensemble non vide E. Si $x \in E$, on considère le sous-ensemble $\dot{x}$ de E défini par $\dot{x} = \{y \in E, x \mathscr{R} y\}$. On a donc $x \in \dot{x}$ puisque la relation $\mathscr{R}$ est réflexive. Par définition, le sous-ensemble $\dot{x}$ de l'ensemble E s'appelle la classe d'équivalence de l'élément $x \in E$. De plus, si deux éléments x et y de l'ensemble E sont en relation, alors leurs classes d'équivalence sont égales : $(x \mathscr{R} y) \Longrightarrow (\dot{x} = \dot{y})$.
Dans l'exemple de la conguence *modulo* 2, il y a deux classes d'équivalence : $\dot{0}$ qui est l'ensemble des nombres entiers pairs et $\dot{1}$, ensemble des nombres impairs.
L'ensemble $C = \{\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots \}$ des classes d'équivalence réalise une "partition" de l'ensemble E. Les classes d'équivalence forment en effet une collection de sous-ensembles $E_j \subset E$ de E telle que $\bigcup_j E_j = E$ et $E_i \cap E_j = \varnothing$ si $i \neq j$, en quelque sorte un "découpage" de l'ensemble E. L'idée de la preuve de cette proposition est de partir de $x_1 \in E$ puisque E n'est pas vide. Si $\dot{x}_1 = E$, on a terminé. Sinon, il existe $x_2 \in E$ tel que $x_2 \notin \dot{x}_1$ et on a une nouvelle classe $\dot{x}_2$ qui contribue à la partition. On continue ainsi de proche en proche.

- Cardinaux

Les cardinaux sont par définition les classes d'équivalence de la relation d'équipotence. La classe $\dot{X}$ de l'ensemble X est formée de tous les ensembles Y qui sont en bijection avec X. Elle définit le cardinal de l'ensemble X et on la note $\mathrm{Card}\, X$. Lorsque l'ensemble X est fini, on a $\mathrm{Card} X = |X|$; c'est un entier naturel, le nombre d'éléments de l'ensemble X. On remarque qu'il existe un seul ensemble de cardinal zéro : l'ensemble vide.
Le cas où l'ensemble X est infini a été exploré pour la première fois lors de la création de la théorie des ensembles par Georg Cantor (1845-1918). Le premier ensemble infini est l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. Un ensemble équipotent à $\mathbb{N}$ est dit "dénombrable". On pose
$\mathrm{Card}\,\mathbb{N} = \aleph_0$ (prononcer "aleph zéro"). L'ensemble P des nombres pairs est dénombrables. On peut construire une bijection de $\mathbb{N}$ sur l'ensemble P des nombres pairs : $\mathbb{N} \ni m \longmapsto m + m \in \mathrm{P}$. L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels (les fractions de numérateur et de dénominateur entiers) est également dénombrable. Par contre, l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels n'est pas dénombrable ; on dit qu'il a "la puissance du continu". La preuve ("argument diagonal") est due à Cantor et elle est détaillée dans le cours d'Analyse Mathématique pour l'Ingénieur.

- Relation d'ordre

Une relation $\mathscr{R}$ sur l'ensemble non vide E est une relation d'ordre si elle est à la fois, réflexive, transitive et antisymétrique.
L'inclusion dans l'ensemble des parties $\mathscr{P}(X)$, l'inégalité dans l'ensemble des entiers et la rela-

tion de divisibilité dans l'ensemble des diviseurs d'un entier donné sont des relations d'ordre.
Le diagramme de Hasse (Helmut Hasse, 1898 - 1979) est une simpfication du diagramme sagittal d'une relation d'ordre. On élimine les boucles, puisqu'il devient implicite que la relation est réflexive. On ne retient des flèches $x \longrightarrow y$ reliant deux éléments x et y que celles qui sont "primitives" : si la relation $x \mathscr{R} z$ est la conséquence des relations $x \mathscr{R} y$ et $y \mathscr{R} z$, on ne représente pas la flèche $x \longrightarrow z$. La transitivité est elle aussi essentiellement implicitée. Le diagramme de Hasse permet de reconstituer l'ensemble de la relation d'ordre sous-jacente. Le diagramme de Hasse de la relation d'inégalité dans $\mathbb{Z}$ est ainsi une simple chaîne.

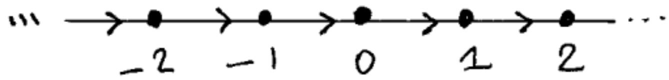


Figure 5. Diagramme de Hasse de la relation $\leq$ sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers.

Le diagramme de Hasse de l'inclusion dans $E = \mathscr{P}(\{a, b, c\})$ permet de bien mettre en évidence les singletons et les paires.

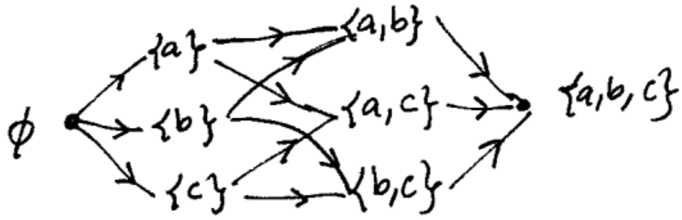


Figure 6. Diagramme de Hasse de la relation d'inclusion $\subset$ pour l'ensemble $\mathscr{P}(\{a, b, c\})$ des parties d'un ensemble à trois éléments.

- Ordre total et ordre partiel

Une relation d'ordre $\mathscr{R}$ sur l'ensemble non vide E est une relation d'ordre total si et seulement si deux éléments quelconques de l'ensemble de référence peuvent toujours être comparés : pour tout $x \in E$ et pour tout $y \in E$, on a $(x \mathscr{R} y)$ ou $(y \mathscr{R} x)$. C 'est le cas pour le relation $\leq$ entre les nombres entiers.
Si la relation d'ordre n'est pas une relation d'ordre total, on dit que c'est une relation d'ordre partiel. C'est la cas par exemple pour $\mathscr{P}(X)$ muni de la relation d'inclusion $\subset$ dès que l'ensemble X a au moins deux éléments.
La relation "divise" est aussi une relation d'ordre partiel dans l'ensemble $D(n)$ des diviseurs d'un entier, présentée figure 7 pour $D(6) = \{1, 2, 3, 6\}$ et $D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$.

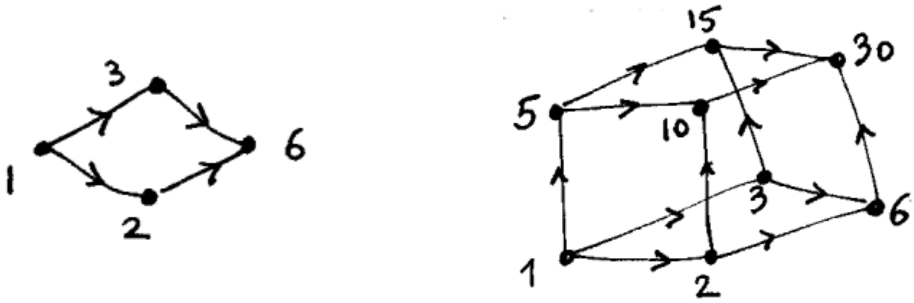


Figure 7. Diagramme de Hasse des diviseurs de 6 et des diviseurs de 30 pour la relation "divise" $|$. On remarque qu'on retrouve le diagramme de gauche au sein de la figure de droite

puisque $D(6) \subset D(30)$.
Nous nous intéressons dans la suite aux ordre partiels qui offrent des structures possibles très riches.

• Éléments minimaux et maximaux

À partir de ce paragraphe, la relation d'ordre sur l'ensemble E est désignée par le symbole "$\leq$", même s'il ne s'agit pas de l'inégalité dans l'ensemble des entiers !
Par définition, un élément minimal m ne peut pas être minoré par un autre élément de l'ensemble de référence : $(x \leq m) \Rightarrow (x = m)$. Il se situe "au début des flèches" du diagramme de Hasse. Un élément maximal M ne peut pas être majoré par un autre élément de l'ensemble de référence : $(M \leq x) \Rightarrow (x = M)$. Il se situe "au bout des flèches" du diagramme de Hasse.
Un théorème (difficile !) de la théorie des ensemble énonce que les éléments minimaux et maximaux existent toujours. De façon précise, tout élément $x \in E$ est minoré par au moins un élément minimal m et et majoré par au moins un élément maximal M:
$\forall x \in E,\ \exists m \in E,\ \big(\forall y \in E, \big((y \leq m) \Rightarrow (y = m)\big)\big),\ \exists M \in E,\ \big(\forall z \in E,\ \big((M \leq z) \Rightarrow (z = M)\big)\big)$ et $m \leq x \leq M$.

• Plus grand et plus petit élément

On se donne un ensemble fini E non vide et une relation d'ordre $\leq$ sur cet ensemble E.
Si l'ensemble E possède un unique élément minimal, c'est "le plus petit élément de E" et on le note $\inf E$ ou $\perp$: $\forall x \in E,\ (\inf E = \perp\ \leq x)$.
Si l'ensemble E possède un unique élément maximal, c'est "le plus grand élément de E" et on le note $\sup E$ ou $\top$. On a $\forall x \in E,\ (x \leq \top = \sup E)$.
Par exemple, l'ensemble $\mathscr{P}(\{a, b, c\})$ a un plus petit élément $\perp$ pour l'inclusion : l'ensemble vide $\varnothing$. Il a aussi un plus grand élément $\top$ pour $\subset$: l'ensemble $\{a, b, c\}$ (voir la figure 6).
Autre exemple explicité figure 7 : l'ensemble des diviseurs de 30. Le plus petit élément pour la relation "divise" est l'entier 1 et le plus grand élément le nombre 30.

• Majorants et minorants communs à deux éléments

L'ensemble non vide E est muni d'un ordre (partiel) noté $\leq$. L'ensemble des majorants d'un élément $x \in E$ donné est noté $\mathrm{maj}\,(x)$. On a $\mathrm{maj}\,(x) = \{z \in E, x \leq z\}$. Ce sont les points qui "suivent" l'élément x dans le diagramme de Hasse. L'ensemble des minorants d'un élément $x \in E$ donné est noté $\min\,(x)$: $\min\,(x) = \{z \in E, z \leq x\}$. Ce sont les points qui "précèdent" l'élément x dans le diagramme sagittal de Hasse.
On se donne maintenant deux éléments x et y de l'ensemble E. L'ensemble $\mathrm{maj}\,(x, y)$ des majorants communs à x et y est l'intersection de $\mathrm{maj}\,(x)$ et $\mathrm{maj}\,(y)$:
$\mathrm{maj}\,(x, y) = \mathrm{maj}\,(x) \cap \mathrm{maj}\,(y)$. De façon analogue, l'ensemble $\min\,(x, y)$ des minorants communs à x et y est l'intersection de $\min\,(x)$ et $\min\,(y)$: $\min\,(x, y) = \min\,(x) \cap \min\,(y)$.

Si l'ensemble $\mathrm{maj}\,(x, y)$ des majorants communs à x et y a un plus petit élément, c'est par définition la borne supérieure des éléments x et y et on le note $\sup\,(x, y) = x \vee y$. Si l'ensemble $\min\,(x, y)$ des minorants communs à x et y a un plus grand élément, c'est par définition la borne inférieure des éléments x et y; on le note $\inf\,(x, y) = x \wedge y$.

Par exemple dans $\mathbb{N}$ avec la relation “divise”. Pour $x = 8$, on a $\operatorname{maj}(8) = \{8, 16, 24, ...\}$ et pour $y = 12$, $\operatorname{maj}(12) = \{12, 24, ...\}$. Donc $8 \vee 12 = 24$, c'est le plus petit multiple commun (ppcm) de 8 et 12. De même, $\min(8) = D(8) = \{1, 2, 4, 8\}$ et $\min(12) = D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, donc $\min(8, 12) = \{1, 2, 4\}$ et $8 \wedge 12 = 4$; c'est le plus grand diviseur commun (pgcd) de 8 et 12. Nous l'avons défini exactement de cette façon au chapitre 6.
L'inclusion dans l'ensemble $\mathscr{P}(X)$ des parties d'un ensemble fournit un autre cas intéressant. Si $A \subset X$, le sous-ensemble $\min(A)$ est formé de tous les sous-ensembles de A et $\max(A)$ est composé par les “sur-ensembles” de A, c'est à dire des sous-ensembles de X qui contiennent A. On voit alors que $\inf(A, B) = A \wedge B = A \cap B$ est bien le plus grand des ensembles contenus à la fois dans les ensembles A et B. De même, $\sup(A, B) = A \vee B = A \cup B$ est bien le plus petit (pour l'inclusion) des ensembles contenant à la fois les ensembles A et B.

- Treillis

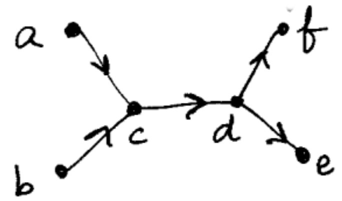
On se donne un ensemble fini E non vide et une relation d'ordre $\leq$ sur E. On dit que cette structure définit un treillis si et seulement si pour tout couple (x, y) d'éléments de E, la borne inférieure $\inf(x, y) = x \wedge y$ et la borne supérieure $\sup(x, y) = x \vee y$ existent bien : ce sont des éléments de l'ensemble E. Un treillis se note $(E, \wedge, \vee, \leq)$.
L'ensemble des parties d'un ensemble X avec l'inclusion définit le treillis $(\mathscr{P}(X), \cap, \cup, \subset)$.
L'ensemble $D(n)$ des diviseurs de l'entier $n \geq 1$ permet de définir le treillis
$(D(n), \text{ pgcd}, \text{ ppcm}, \text{ divise}) = (D(n), \wedge, \vee, |)$. On peut reprendre la figure 7 ; le pgcd de deux nombres est le premier nœud commun quand on remonte les flèches et le ppcm de ces deux nombres le premier nœud commun en avançant dans le sens des flèches.

Un treillis a de nombreuses propriétés. Il a toujours un plus petit élément, noté 0 ou $\perp$ ainsi qu'un plus grand élément, noté 1 ou $\top$. On a également les propriétés suivantes :
commutativité : $x \wedge y = y \wedge x$, $x \vee y = y \vee x$,
associativité : $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge y \wedge z$, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z = x \vee y \vee z$,
idempotence : $x \wedge x = x$, $x \vee x = x$,
compatibilité avec la relation d'ordre : $x \wedge y \leq x$, $x \wedge y \leq y$, $x \leq x \vee y$, $y \leq x \vee y$.
Noter par contre que la distributivité entre $\wedge$ et $\vee$ n'est pas en général satisfaite dans un treillis.

Exercices

• Diagramme de Hasse

Une relation d'ordre $\leq$ est définie sur l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e, f\}$ à l'aide du diagramme de Hasse ci-dessous :



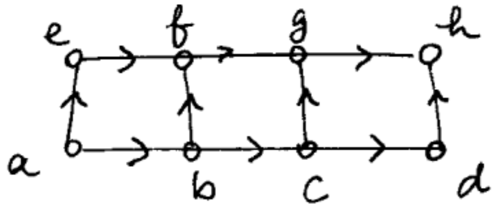
a) Quel est le diagramme cartésien de cette relation ?

b) Quels sont les éléments minimaux et maximaux ?

c) Existe-t-il un plus grand et un plus petit élément ? [non]

• Un autre diagramme de Hasse

Une relation d'ordre sur l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ est définie à l'aide du diagramme de Hasse ci-dessous :



a) Quel est l'ensemble $\text{maj}\,(f)$ des majorants de f ?

Quel est l'ensemble $\text{maj}\,(d)$ des majorants de d ?

Quel est l'ensemble $\text{maj}\,(d, f)$ des majorants communs à d et à f ? [$\{h\}$]

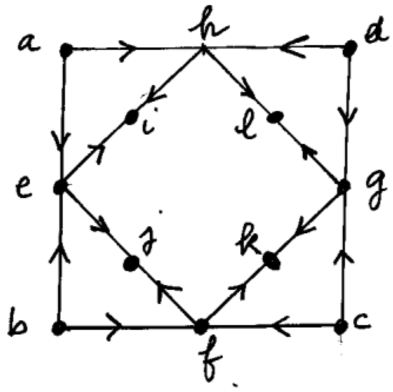
c) Quel est l'ensemble $\min\,(f)$ des minorants de f ?

Quel est l'ensemble $\min\,(d)$ des minorants de d ?

Quel est l'ensemble $\min\,(d, f)$ des minorants communs à d et à f ? [$\{a, b\}$]

• Existence des bornes supérieure et inférieure

On se donne une relation d'ordre sur l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$ avec le diagramme de Hasse ci-dessous :



a) Quels sont les majorants de a ?

b) Quels sont les minorants de j ?

c) Quels sont les éléments maximaux et minimaux ?

d) L'ensemble E admet-il un plus grand élément ? un plus petit élément ?

e) La borne supérieure $\sup(a, b) = a \vee b$ est-elle définie ? $[a \vee b = e]$

f) Même question pour la borne supérieure $\sup(a, c) = a \vee c$.
[non défini ; $\text{maj}(a) \cap \text{maj}(c) = \{j, l\}$]

- Transformer une relation

a	1		1	1
b		1		1
c	1		1	
d				1
	a	b	c	d

On se donne une relation à l'aide du diagramme cartésien ci-dessus. Pour les différentes lignes $i \in \{a, b, c, d\}$ et les différentes colonnes $j \in \{a, b, c, d\}$ de ce tableau, on a la relation $i \mathscr{R} j$ si et seulement le coefficient de la i^o ligne et de la j^o colonne est égal à 1.

a) Est-elle réflexive ? transitive ? symétrique ? antisymétrique ?

On désire compléter ce tableau afin d'obtenir une relation symétrique, S, ceci en ajoutant le minimun de couples (x, y) tels que xSy.

b) Quel diagramme obtient-on ? Quels couples a-t-on ajoutés ?

c) La relation S est-elle transitive ? Est-ce une relation d'équivalence ?

On désire maintenant modifier le tableau initial afin d'obtenir une relation anti- symétrique, R, ceci en supprimant le minimun de couples (x, y) tel que x R y

d) Quel diagramme obtient-on ? Quels couples a-t-on supprimé ?

e) Montrer que R est une relation d'ordre et tracer le diagramme de Hasse.

f) Quels sont les éléments minimaux ? maximaux ? Existe-t-il un plus petit élément ? un plus grand élément ?

- Construction d'un diagramme de Hasse

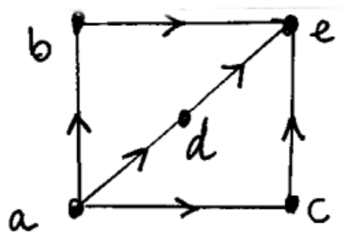
a) Rappeler quels sont les éléments de l'ensemble $D(24)$ des diviseurs de 24.

b) Expliciter tous les couples (x, y) composés de diviseurs de 24 de sorte que x divise y.

c) Quel est le diagramme de Hasse de l'ensemble $D(24)$ pour la relation "divise" ?

- Distributivité de la borne inféreure relativement à la borne supérieure ?

Une relation d'ordre $\leq$ est définie sur l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e\}$ par le diagramme de Hasse ci-dessous :



a) Montrer que cette cette relation d'ordre définit un treillis $(E, \wedge, \vee, \leq)$.

b) La relation $d \wedge (b \vee c) = (d \wedge b) \vee (d \wedge c)$ est-elle satisfaite ?