le cnam

Département de Mathématiques et Statistiques

Algèbre de Boole et Probabilités

Devoir 4, à rendre pour la séance numéro 13, mercredi 06 janvier 2021

Exercice 1) Jeu de dés

On rappelle que dans un dé non pipé, chaque face a la même probabilité d'être obtenue que les autres. Les résultats sont demandés sous forme de fractions irrédictibles ou en produits de facteurs premiers et de puissances.

a) On jette simultanément 3 dés, non pipés, de couleurs différentes.

(i) Combien de résultats différents peut-on avoir ?

(ii) Quelle est la probabilité de l'événement A : obtenir trois as ?

(iii) Quelle est la probabilité de l'événement S : obtenir trois numéros identiques ?

(iv) Quelle est la probabilité de l'événement B : obtenir au moins un as ?

(v) Quelle est la probabilité de l'événement : obtenir au moins un as sachant qu'au moins un dé présente un 2 ?

(vi) Les événements B et "obtenir au moins un 2" sont-ils indépendants ?

b) On lance maintenant un dé non pipé plusieurs fois de suite. Chaque lancer est indépendant des précédents.

(i) Quelle est la probabilité de l'événement C : n'obtenir un as qu'au bout du 3e lancer ?

(ii) Quelle est la probabilité de l'événement D : obtenir un seul as en trois lancers de suite ?

(iii) Quelle est la probabilité de l'événement E : obtenir au moins un as au cours des trois lancers ?

Exercice 2) Loterie

Une loterie organise ses tirages de la façon suivante : trois roues R1, R2 et R3 sont côte à côte, et permettent de tirer un chiffre de 0 à 9, avec une loi uniforme. Le résultat d'un tirage est une suite de trois chiffres, obtenue en lisant (dans l'ordre) le chiffre tiré par R1, puis le chiffre tiré par R2, et le chiffre tiré par R3.

a) Quelle est la probabilité que le résultat d'un tirage soit 421 ?

b) Donner le cardinal de chacun des ensembles suivants et la probabilité de chacun des événements associés :

A : le résultat donne trois chiffres successifs (comme 012 ou 345)

B : les chiffres tirés par R1 et R3 sont identiques

C : les trois chiffres tirés sont tous impairs

D : le chiffre 0 est tiré par au moins une roue
E : les trois chiffres tirés sont identiques
F : les 3 chiffres tirés sont inférieurs ou égaux à 5

c) Quelle est la probabilité de C (les 3 chiffres sont tous impairs) sachant l'événement E (les trois chiffres tirés sont identiques) ?

d) Les événements C et F sont-ils indépendants ?

Exercice 3) Une relation d'ordre

Soit l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18\}$. On définit une relation $\mathcal{R}$ sur E de la façon suivante : pour a et b dans E, $a \mathcal{R} b$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = ka$ (autrement dit, a est en relation avec b si b est un multiple entier de a).

a) Donner le diagramme cartésien de la relation $\mathcal{R}$ sur l'ensemble E.

b) Pourquoi la relation $\mathcal{R}$ est-elle réflexive ? antisymétrique ?

c) Indiquer trois éléments distincts de E reliés par transitivité.

On admet pour la suite que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur l'ensemble E.

d) Quels sont les éléments maximaux et les éléments minimaux de l'ensemble E pour la relation $\mathcal{R}$?

e) L'ensemble E possède-t-il un plus grand élément ? Un plus petit élément ?

f) Dessiner le diagramme de Hasse de cette relation.

g) Déterminer, quand ils existent, les éléments suivants : $4 \wedge 3$, $4 \vee 3$, $4 \wedge 9$ et $4 \vee 9$.

h) Expliquer pourquoi l'ensemble E, muni de la relation $\mathcal{R}$, n'est pas un treillis.

François Dubois, 09 décembre 2020.