

Cinq leçons d'introduction
aux systèmes hyperboliques
de lois de conservation*

* Édition du 13 décembre 2023, conforme à l'édition du 10 décembre 2003.

Université de Versailles Saint-Quentin
Université Pierre et Marie Curie (Paris 6)
Ecole Nationale Supérieure de Techniques Avancées
Ecole Polytechnique

Diplôme d'Études Approfondies
Mathématiques de la Modélisation,
Simulation et Applications de la Physique

Cinq leçons d'introduction
aux systèmes hyperboliques
de lois de conservation

François Dubois

Edition décembre 2023

Table des matières

1. Modèles hyperboliques	
1) Dynamique des gaz	1
2) Méthode des caractéristiques	9
3) Systèmes hyperboliques non linéaires de lois de conservation	15
2. Etude mathématique d'une loi de conservation	
1) Introduction	19
2) Solutions régulières	19
3) Intersection de caractéristiques	22
4) Solutions faibles	24
5) Non unicité des solutions faibles	30
3. Entropie mathématique	
1) Loi de conservation supplémentaire	35
2) Solution entropique d'une loi de conservation	41
3) Chocs entropiques	44
4) Problème de Riemann	47
4. Introduction aux volumes finis	
1) Méthode des lignes	53
2) Schéma de Godunov	56
3) Convergence	62
5. Résolution numérique du problème de Riemann	
1) Rappels succincts de dynamique des gaz	69
2) Problème de Riemann pour le gaz parfait	71
3) Solution approchée pour les fluides réactifs	85
4) Quelques approximations classiques	89
5) Références bibliographiques	94

Modèles hyperboliques

1) Dynamique des gaz

Après avoir rappelé les hypothèses physiques et mécaniques qui conduisent à un modèle très général de la dynamique des gaz, nous le simplifions petit à petit pour aboutir à l'équation d'advection.

Introduction

- La mécanique des fluides est un champ important d'interaction entre les sciences de l'ingénieur et les mathématiques. En première approximation, les modèles mathématiques sont fixés depuis le dix-huitième siècle (Euler, Lagrange) et ils donnent encore lieu à des problèmes mathématiques ouverts, c'est-à-dire qui restent à résoudre. Rappelons que l'approche d'Euler (1755) consiste à chercher le fluide sous la forme de champs définis dans l'espace temps ou une portion Ξ de celui-ci :

$$(1.1) \quad (x, t) \in \Xi \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}.$$

On distingue d'une part les champs **thermodynamiques** tels que la densité notée ρ , l'énergie interne e et la pression p :

$$(1.2) \quad \Xi \ni (x, t) \mapsto (\rho(x, t), e(x, t), p(x, t)) \in]0, \infty[^3$$

et le champ de vitesse u qui décrit la **cinématique** du fluide :

$$(1.3) \quad \Xi \ni (x, t) \mapsto u(x, t) \in \mathbb{R}^3.$$

- Une première fermeture est donnée par la **thermostatique**. La loi d'état du fluide fournit une relation a priori entre la densité, la vitesse et la pression. Nous utilisons dans ce chapitre le modèle le plus simple du gaz parfait polytropique, de rapport des chaleurs spécifiques égal à une constante γ ($\gamma > 1$) :

$$(1.4) \quad p = (\gamma - 1)\rho e, \quad \gamma > 1.$$

Dans ce modèle, les chaleurs spécifiques C_p et C_v à pression et volume constant respectivement sont des constantes et l'énergie interne est proportionnelle à la température T :

$$(1.5) \quad e = C_v T, \quad C_v = \text{constante}, \quad C_p = \text{constante}.$$

- Les autres relations sont associées aux **lois de conservation** de la physique à l'échelle macroscopique et à basse vitesse caractéristique du régime où l'on étudie habituellement un fluide : conservation de la masse, de l'impulsion, de l'énergie. Pour écrire ces lois de conservation, on introduit les **trajectoires** du milieu continu, ce qui revient *in fine* à prendre le point de vue de Lagrange. On résout classiquement l'équation différentielle

$$(1.6) \quad \frac{dx}{dt} = u(x, t)$$

associée à la condition initiale

$$(1.7) \quad x(0) = a;$$

on note $X(a, t)$ la solution de l'équation (1.6) associée à la condition initiale (1.7) ; elle définit le changement de variables entre coordonnées de Lagrange (a, τ) et d'Euler (x, t) :

$$(1.8) \quad \Theta \ni (a, \tau) \mapsto (X(a, \tau), t \equiv \tau) \in \Xi.$$

Un volume V qui occupe à l'instant initial la position V_0 (avec $(V_0, 0) \subset \Theta$) est "suivi dans son mouvement" avec la relation (1.8) et devient un volume $V(\tau) = \{X(a, \tau), a \in V_0\}$. On établit alors (voir par exemple l'ouvrage classique de E. Guyon, J.P. Hulin et L. Petit [Hydrodynamique physique, CNRS-Inter-Editions, 1991]) que la dynamique d'une grandeur conservée ϕ que l'on suit dans son mouvement est équilibrée par le flux $\psi \bullet n$ à travers la surface $\partial V(t)$:

$$(1.9) \quad \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \phi \, dx = \int_{\partial V(t)} \psi \bullet d\gamma,$$

soit sous forme différentielle

$$(1.10) \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div}(u \phi) = \operatorname{div} \psi,$$

par utilisation de (1.6) et de la formule de Green. Pour la conservation de la masse, on a $\phi = \rho$ et aucune source surfacique ($\psi = 0$) :

$$(1.11) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) = 0.$$

Pour la conservation de l'impulsion, on a $\phi = \rho u$ et $\psi = \sigma$, tenseur des contraintes :

$$(1.12) \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) - \operatorname{div} \sigma = 0$$

soit sous forme développée composante par composante :

$$(1.13) \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \sum_j \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) - \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} \right\} = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

La conservation de l'énergie demande de regrouper l'énergie interne volumique ρe et énergie cinétique volumique $\frac{1}{2} \rho |u|^2$:

$$(1.14) \quad \phi = \rho e + \frac{1}{2} \rho |u|^2 \equiv \rho E.$$

Le flux d'énergie est égal à la puissance du flux d'impulsion diminuée du flux de chaleur q :

$$(1.15) \quad \psi_i = \sum_j \sigma_{ij} u_j - q_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Compte tenu de (1.10), (1.14) et (1.15), la conservation de l'énergie (totale) s'écrit

$$(1.16) \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \sum_i \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i E) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j \sigma_{ij} u_j \right) + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \right\} = 0.$$

Nous retenons de ce paragraphe qu'après écriture sous forme d'équations aux dérivées partielles dans le cadre de la mécanique des milieux continus, les lois de conservation de la physique ont une forme générale du type proposé à la relation (1.10).

Equations de Navier Stokes

- Il reste à fixer le modèle mécanique, c'est-à-dire la **loi de comportement** phénoménologique à l'échelle macroscopique. Dans le cas de la mécanique des fluides, le tenseur des contraintes et le flux de chaleur doivent être précisés en fonction des champs thermodynamiques et cinématiques inconnus (relations (1.2) et (1.3)). Pour un **fluide newtonien**, le tenseur des contraintes est la somme des contraintes de pression (ou de fluide parfait) et des contraintes visqueuses, qui utilisent les coefficients de Lamé λ et μ

$$(1.17) \quad \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda(\operatorname{div} u)\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad 1 \leq i, j \leq 3.$$

Lorsque le fluide obéit à la loi de Fourier pour la propagation de la chaleur, on a

$$(1.18) \quad q_i = -k \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i \leq 3, \quad k > 0.$$

Les équations de Navier Stokes de la dynamique des gaz consistent à chercher le champ constitué des inconnues thermodynamiques (1.2) et cinématiques (1.3) (soit six champs scalaires dans le cas de trois dimensions d'espace) qui satisfont à une équation d'état telle que (1.4) dans le cas du gaz parfait polytropique et soumis aux lois de conservation de la masse (1.11), de l'impulsion (1.12) et de l'énergie (1.16) avec l'hypothèse (1.17) de fluide newtonien qui satisfait à la loi de Fourier (1.18).

- La mécanique des fluides se divise alors en deux grandes branches mathématiques reliées à l'**hydrodynamique** d'une part et à la **dynamique des gaz** d'autre part. Dans le cas où la densité est constante (fluide incompressible, ce qui est vrai pour un liquide en première approximation), la conservation de la masse (1.11) s'écrit simplement

$$(1.19) \quad \operatorname{div} u = 0.$$

La conservation de l'impulsion (1.13), compte tenu de (1.19) et (1.17), prend la forme plus simple

$$(1.20) \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_j u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\mu}{\rho} \Delta u_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0.$$

On n'a pas besoin de l'équation de l'énergie ni de la loi d'état (1.4) pour "fermer" le modèle incompressible des équations de Navier Stokes ; la pression peut s'interpréter comme un **multiplicateur de Lagrange** associé à la contrainte d'incompressibilité (1.19). Les "fanas" pourront consulter le livre de R. Temam [Navier Stokes equations, North Holland, Amsterdam, 1977]. Les mathématiciens classent le système (1.19) (1.20) comme "parabolique incomplet", et le système de **Stokes**, obtenu en négligeant le terme non-linéaire $u \cdot \nabla u$ au sein de la relation (1.20) lorsqu'on se limite à d'une étude stationnaire, est de type **elliptique**. Ce type de problème n'est pas développé ici et nous renvoyons le lecteur par exemple à l'ouvrage de V. Girault et P.A. Raviart [Finite Element Methods for Navier Stokes Equations, Springer Series in Computational Mathematics, vol. 5, 1986].

- Lorsque la densité varie fortement (en temps et/ou en espace), on est typiquement dans le cadre de la dynamique des gaz. Les équations de Navier Stokes des fluides compressibles forment le modèle le plus complet pour décrire l'ensemble des conservations de la physique

dans le contexte de la mécanique des milieux continus. Nous remarquons simplement ici que si nous cherchons une **solution particulière de vitesse nulle**, l'équation de l'énergie (1.16) se réécrit aussi, compte tenu de (1.5), (1.11), (1.14) et (1.18) :

$$(1.21) \quad \rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}(k \nabla T) = 0.$$

On retrouve l'**équation de la chaleur** étudiée dans le cours d'équations aux dérivées partielles. Nous retenons ici que l'équation (1.21) de **diffusion** de la chaleur est l'un des modes de transfert de l'énergie, l'autre étant associé au terme non-linéaire $\operatorname{div}(\rho u T)$ négligé dans (1.21), c'est-à-dire la **convection**.

Equations d'Euler des fluides parfaits

- Compte tenu de l'immense complexité mathématique des équations de Navier Stokes qui, dit-on, "contiennent tout" [le lecteur intéressé est invité à consulter l'ouvrage de P.L. Lions "Mathematical Topics in Fluid Mechanics", Oxford Science Publications, 1996], on construit des modèles de plus en plus simples afin de pouvoir maîtriser les mathématiques sous-jacentes. La première étape est de supposer que le fluide est **parfait** ; le tenseur des contraintes néglige alors les termes visqueux associés au gradient du champ de vitesse (on pose $\lambda = \mu = 0$) et le flux de chaleur est supposé nul $q = 0$:

$$(1.22) \quad \sigma = -p \operatorname{Id}.$$

On suppose aussi ici (afin uniquement d'alléger les expressions algébriques) que l'espace est bidimensionnel. Les équations de conservation de la masse (1.11), de l'impulsion (1.13), et de l'énergie (1.16) s'écrivent, avec un champ de vitesse u noté abusivement (u, v) :

$$(1.23) \quad \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2 + p) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u E + pu) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v E + pv) = 0. \end{cases}$$

Ces équations de conservation sont également couplées à la loi des gaz parfait (1.4) et à l'expression (1.14) de l'énergie totale.

- Le modèle (1.4) (1.14) (1.23) est encore hors de portée des méthodes de l'analyse mathématique qui cherchent à démontrer qu'avec des conditions aux limites à préciser, il y a existence (et unicité !) d'une solution $(\rho(x, y, t), u(x, y, t), v(x, y, t), e(x, y, t))$ du modèle de fluide parfait bidimensionnel pour tout instant $t \geq 0$ si on se donne une condition initiale $(\rho_0(x, y), u_0(x, y), v_0(x, y), e_0(x, y))$. Par ailleurs, après discrétisation à l'aide de la méthode des volumes finis (introduite dans les chapitres ultérieurs), le même modèle mécanique (1.4) (1.14) (1.23) est d'emploi courant dans l'industrie aéronautique pour déterminer les efforts aérodynamiques dus au champ de pression autour d'un avion de transport ou autre engin volant.

Equations de Saint-Venant du fluide barotrope

- Il est donc naturel de chercher à simplifier le modèle des équations d'Euler de la dynamique des gaz. Le nouveau modèle est fondé sur l'existence de l'entropie. On définit l'**entropie spécifique** s par la relation

$$(1.24) \quad p = K \rho^\gamma \exp\left(\frac{s}{C_v}\right)$$

(avec une constante $K > 0$ destinée à la cohérence de l'analyse dimensionnelle). On a alors la

- **Proposition 1. Transport de l'entropie.**

Une solution régulière (de classe C^1)

$$\Xi \ni (x, y, t) \longmapsto (\rho(x, y, t), u(x, y, t), v(x, y, t), e(x, y, t)) \in \mathbb{R}^4$$

des équations d'Euler (1.4) (1.14) (1.23) de la dynamique des gaz vérifie l'équation de transport de l'entropie

$$(1.25) \quad \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} + v \frac{\partial s}{\partial y} = 0$$

avec $s(\bullet)$ donnée à l'aide de la relation (1.24).

- La preuve est un exercice (classique mais pas si facile !) laissé au lecteur qui pourra consulter l'ouvrage de référence de E. Godlewski et P.A. Raviart [Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws, Applied Mathematical Sciences, vol. 118, Springer, 1996]. Une conséquence de la relation (1.25), jointe au changement de variables (1.8) est l'invariance de l'entropie le long des lignes de courant. Si on pose

$$(1.26) \quad \Theta \ni (a, \tau) \longmapsto \tilde{s}(a, \tau) \equiv s(X(a, \tau), \tau) \in \mathbb{R},$$

on a alors le calcul numérique (sur lequel nous reviendrons)

$$\frac{\partial \tilde{s}}{\partial \tau} = \frac{\partial X}{\partial \tau} \bullet \nabla s + \frac{\partial s}{\partial t}(X, \tau) = u \bullet \nabla s + \frac{\partial s}{\partial t} = 0.$$

Si elle est constante dans l'ouvert "initial" V_0 et si "la" solution des équations d'Euler est régulière, alors l'entropie est constante.

- Cette propriété mécanique motive l'étude de gaz dont la loi d'état n'est plus (1.4), mais de type (1.24) avec $s = \text{constante}$, et on parle alors de gaz **isentropique**. De façon plus générale, un **gaz barotrope** est un gaz dont la thermostatique est simplifiée et ne comporte qu'une seule variable thermodynamique, en général la densité ρ :

$$(1.27) \quad p = P(\rho), \quad \rho > 0, \quad P(\rho) > 0, \quad \frac{dP}{d\rho} > 0,$$

où $P(\bullet)$ est une fonction régulière $]0, \infty[\ni \rho \longmapsto P(\rho) \in]0, +\infty[$. On élimine alors l'équation de l'énergie, déjà utilisée grâce à (1.25) et l'hypothèse de fluide barotrope. On obtient ainsi le modèle du **fluide parfait barotrope**

$$(1.28) \quad \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + P(\rho)) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u v) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2 + P(\rho)) = 0 \end{cases}$$

qui est mathématiquement identique aux équations des **eaux peu profondes** proposé par A. Barré de Saint-Venant en 1839. Dans le cas d'une dimension d'espace, le système (1.28) se simplifie en

$$(1.29) \quad \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + P(\rho)) = 0. \end{cases}$$

p-système

• Le p -système est une **version lagrangienne** des équations de Saint-Venant (1.28) dans le cas d'une seule dimension d'espace. On suppose qu'on dispose d'une solution régulière $\rho(x, t)$, $u(x, t)$ des équations de Saint-Venant (1.29) à une dimension d'espace, avec la condition

$$(1.30) \quad 0 < \rho_* \leq \rho(x, t) \leq \rho^* < \infty, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0.$$

On construit le changement de variables $(\xi, \tau) \mapsto (x, t)$ des coordonnées de Lagrange vers les coordonnées d'Euler de proche en proche. On commence par l'**instant initial**. On cherche $\mathbb{R} \ni \xi \mapsto X(\xi, 0) \in \mathbb{R}$ de sorte que

$$(1.31) \quad \frac{\partial X}{\partial \xi}(\xi, 0) = \frac{1}{\rho(X(\xi, 0), 0)}, \quad X(\xi_0, 0) = \xi_0$$

où ξ_0 est fixé dans \mathbb{R} . Cette condition initiale est tout à fait **non triviale** et couple l'équation de la masse aux coordonnées. On fait ensuite évoluer $X(\bullet, \bullet)$ avec le temps par la recherche des trajectoires (ou des caractéristiques) :

$$(1.32) \quad \frac{\partial X}{\partial \tau}(\xi, \tau) = u(X(\xi, \tau), \tau), \quad \tau \geq 0, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Si le champ de vitesse est assez régulier (localement lipschitzien), la fonction $\tau \mapsto X(\xi, \tau)$ est définie pour les temps τ assez petits et on suppose que cette fonction peut être, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, prolongée à $[0, +\infty[$. Les coordonnées d'Euler (x, t) prennent par définition la forme suivante, en fonction des coordonnées de Lagrange (ξ, τ) :

$$(1.33) \quad (x, t) = (X(\xi, \tau), \tau).$$

Le jacobien $J(\xi, \tau) = \frac{\partial(x, t)}{\partial(\xi, \tau)} = \begin{vmatrix} \partial X / \partial \xi & \partial X / \partial \tau \\ \partial t / \partial \xi & \partial t / \partial \tau \end{vmatrix} = \frac{\partial X}{\partial \xi}$ est non nul en $\tau = 0$ (cf.

(1.31)) et le produit (ρJ) est constant dans le temps, comme le montre le calcul ci-dessous :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} [\rho(X(\xi, \tau), \tau) J(\xi, \tau)] &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) J + \rho \frac{\partial^2 X}{\partial \tau \partial \xi} \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial x} u \bullet J + \frac{\partial \rho}{\partial t} J + \rho \frac{\partial}{\partial \xi} \left(u(X(\xi, \tau), \tau) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) J + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial \xi} \\
 &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right) J \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

compte tenu de (1.29)

$$(1.34) \quad \rho(X(\xi, \tau)) J(\xi, \tau) = \rho(X(\xi, 0), 0) J(\xi, 0) = 1$$

donc le jacobien $J(\bullet, \bullet)$ ne s'annule jamais.

- On introduit les nouvelles fonctions inconnues, à savoir le volume spécifique $v \equiv 1/\rho$ et le champ de vitesses, noté ζ en lagrangien :

$$(1.35) \quad v(\xi, \tau) = \frac{1}{\rho(x, t)}; \quad \zeta(\xi, \tau) = u(x, t), \quad (x, t) \text{ et } (\xi, \tau) \text{ reliés par (1.33).}$$

Les dérivations se transforment très classiquement :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \tau} &= \frac{\partial x}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial t} = u \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} = \zeta \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \\
 \frac{\partial}{\partial \xi} &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial t} = J \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} = v \frac{\partial}{\partial x}
 \end{aligned}$$

et s'inversent selon

$$(1.36) \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{v} \zeta \frac{\partial}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

L'équation de la masse s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + u \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{v} \right) + \frac{1}{v} \frac{1}{v} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = \frac{1}{v^2} \left(- \frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right) = 0$$

et celle de l'impulsion :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} P(\rho) = \frac{1}{v} \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[P \left(\frac{1}{v} \right) \right] = 0.$$

Les équations du p -système sont la réécriture des équations monodimensionnelles du fluide barotrope avec les coordonnées lagrangiennes définies en (1.31) (1.32) et les inconnues (v, ζ) introduites en (1.35) :

$$(1.37) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = 0 \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} P \left(\frac{1}{v} \right) = 0. \end{cases}$$

On note qu'il est facile d'éliminer la vitesse pour écrire une **équation des ondes non linéaire** :

$$(1.38) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} P \left(\frac{1}{v} \right) = 0, \quad v > 0.$$

Acoustique linéaire

- On revient dans ce paragraphe au cas de deux dimensions d'espace pour fixer les idées. L'étude de l'acoustique consiste à chercher l'évolution des perturbations $(\rho'(x, y, t), u'(x, y, t), v'(x, y, t))$ autour d'un champ **constant** (ρ_0, u_0, v_0) , d'un fluide en évolution isentropique (cf. (1.24)). On a donc

$$(1.39) \quad (\rho, u, v) = (\rho_0 + \rho', u_0 + u', v_0 + v')$$

et le vecteur des inconnues (ρ', u', v') est considéré comme un infiniment petit. Par suite l'équation (1.24) entraîne par dérivation

$$(1.40) \quad p' = c_0^2 \rho', \quad c_0^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho, s) = \frac{\partial p_0}{\partial \rho}$$

et c_0 est (voir plus loin !) la **célérité des ondes sonores**.

- On obtient le système de l'acoustique linéaire en injectant la représentation (1.40) au sein des équations de Saint-Venant (1.28), en négligeant les termes "primes" d'ordre 2 ou plus. On a par exemple

$$\frac{\partial}{\partial x} [(\rho_0 + \rho')(u_0 + u')] = (u_0 + u') \frac{\partial \rho'}{\partial x} + (\rho_0 + \rho') \frac{\partial u'}{\partial x} = u_0 \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + (\text{ordre} \geq 2).$$

Il vient alors facilement

$$(1.41) \quad \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_0 & \rho_0 & 0 \\ c_0^2/\rho_0 & u_0 & 0 \\ 0 & 0 & u_0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_0 & 0 & \rho_0 \\ 0 & v_0 & 0 \\ c_0^2/\rho_0 & 0 & v_0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \end{pmatrix} = 0$$

et par construction même, ce modèle est **linéaire**.

- Dans le cas le plus courant en pratique où l'état constant est de vitesse nulle ($u_0 = v_0 = 0$), on obtient l'**équation des ondes** linéaire en dérivant par rapport à t la première équation de (1.41) et en lui soustrayant la seconde après dérivation par rapport à x puis la troisième après dérivation par rapport à y :

$$(1.42) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \right) \rho' = 0.$$

Equation de Burgers

- Il s'agit d'un modèle purement mathématique proposé par Burgers en 1941 pour comprendre les effets des termes non linéaires de dérivation spatiale d'un produit au sein des équations de la dynamique des gaz (Euler (1.23), Saint-Venant (1.28)) dans le cas simple d'une seule dimension d'espace. On cherche donc un champ $u : \mathbb{R} \times [0, \infty[\ni (x, t) \mapsto u(x, t) \in \mathbb{R}$ (de vitesse ?) satisfaisant à l'équation

$$(1.43) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0, \quad u(x, t) \in \mathbb{R}.$$

On peut aussi écrire cette équation sous une forme "non conservative" en explicitant la dérivée du produit :

$$(1.44) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Equation d'advection

- Si on linéarise l'équation de Burgers autour du champ constant $u_0 \equiv a$, ou si dans l'équation de conservation de la masse (1.11), on suppose que le champ de vitesse u est une constante égale à a , la perturbation $(u - a)$ (ou la densité ρ) suit une équation linéaire posée à une dimension d'espace : l'équation d'advection

$$(1.45) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad u(x, t) \in \mathbb{R}.$$

C'est le modèle hyperbolique le plus simple. Sa résolution algébrique est très facile (voir le paragraphe suivant). Pourtant, son approximation numérique est délicate et nous en reparlerons au chapitre 2.

2) Méthode des caractéristiques

Problème de Cauchy pour l'équation d'advection

• L'équation d'advection (1.45) se résout mathématiquement de manière très élémentaire. Nous posons d'abord le problème de **Cauchy** formé de l'équation d'advection (1.45) pour $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ et de la condition initiale

$$(2.1) \quad u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad u^0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}).$$

• **Proposition 2. Caractéristiques pour l'advection.**

Soit $\mathbb{R} \ni \xi \mapsto u^0(\xi) \in \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Alors le problème de Cauchy pour l'équation d'advection, composé de l'équation (1.45) et de la condition initiale (2.1), a une solution unique $\mathbb{R} \times [0, +\infty[\ni (x, t) \mapsto u(x, t) \in \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 , déterminée par

$$(2.2) \quad u(x, t) = u^0(x - at), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0.$$

Preuve de la proposition 2.

• Il est d'abord immédiat de vérifier que la relation (2.2) définit une solution de (1.45) :

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x} \right\} u^0(x - at) = \left(-a \frac{d}{d\xi} u^0 + a \frac{d}{d\xi} u^0 \right)(x - at) = 0.$$

L'unicité s'obtient à l'aide de la méthode des caractéristiques, qui consiste à chercher les courbes intégrales $\tau \mapsto X(\tau)$ du "champ de vecteurs" $\mathbb{R} \times [0, \infty[\ni (x, t) \mapsto a \in \mathbb{R}$. Soit $X(\bullet)$ une solution de l'équation différentielle

$$(2.3) \quad \frac{dX}{d\tau} = a, \quad \tau > 0$$

et $\tau \mapsto v(\tau)$ la fonction de variable réelle définie par

$$(2.4) \quad v(\tau) = u(X(\tau), \tau)$$

où $\mathbb{R} \ni \mathbb{R} \times [0, \infty[\ni (x, t) \mapsto u(x, t) \in \mathbb{R}$ est une solution de classe \mathcal{C}^1 du problème de Cauchy (1.45) (2.1). On a alors

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dX}{d\tau} + \frac{\partial u}{\partial t} = \left(a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} \right)(X(\tau), \tau) = 0$$

et la fonction $v(\bullet)$ est constante. On dit aussi que "**la solution est constante sur les droites caractéristiques**".

• Etant donné un point $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty[$ arbitraire, soit $\tau \mapsto X(\tau)$ la solution de (2.3) valant x au temps t : $X(t) = x$. On a alors par intégration de (2.3) : $X(\tau) = x + a(\tau - t)$ et en particulier $X(0) = x - at$. La constance de $v(\bullet)$ sur la droite précédente entraîne $v(t) = v(0)$, c'est-à-dire

$$u(x, t) = u(x - at, 0) = u^0(x - at)$$

au vu de (2.1). D'où l'unicité ; la proposition 2 en résulte. \square

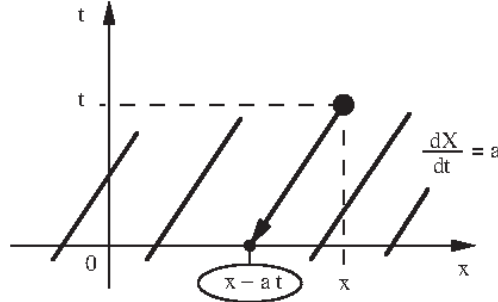


Figure 1. Droites caractéristiques pour l'équation d'advection.

- La figure 1 illustre le résultat (2.2) ; l'ensemble des solutions $\tau \mapsto X(\tau)$ de l'équation (2.3) déterminent une famille de (demi) droites parallèles (de pente a) qui recouvrent l'ensemble du demi-plan $\mathbb{R} \times [0, \infty[$. Au point courant (x, t) , il existe une unique droite caractéristique de la forme (2.3) le long de laquelle toute solution (régulière) de (1.45) est constante. On “remonte” la caractéristique jusqu'à l'instant $t = 0$, où la solution $u(\bullet, 0)$ est connue à l'aide de la condition initiale (2.1).

Conditions aux limites pour l'équation d'advection

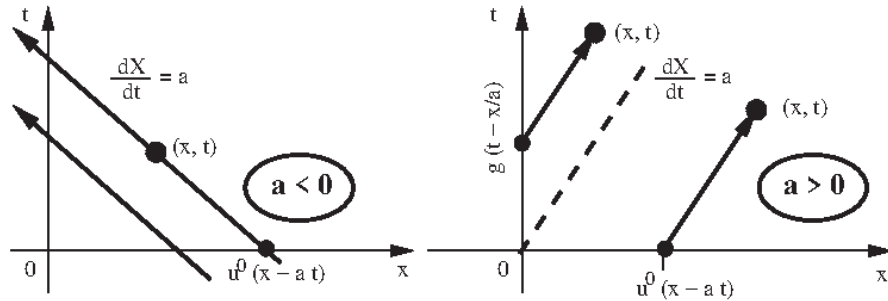


Figure 2. Problème à la limite pour l'équation d'advection. Si $a \leq 0$, les caractéristiques “sortent” du domaine d'étude $\{x > 0, t > 0\}$ et aucune condition limite n'est nécessaire [à gauche]. Si $a > 0$, les droites caractéristiques “entrent” (pour les temps croissants) dans le domaine d'étude et il faut se donner une condition limite de type (2.5) pour déterminer $u(\bullet, \bullet)$ solution de l'équation d'advection (1.45).

- Nous montrons dans ce paragraphe que le problème à la limite formé de (1.45) dans le quart de plan $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, de la condition initiale (2.1) sur la demi-droite $[0, \infty[$ et d'une condition limite en $x = 0$ et $t > 0$ du type

$$(2.5) \quad u(0, t) = g(t), \quad t > 0,$$

soit de façon précise

$$(2.6) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & (x, t) \in [0, +\infty[\times [0, +\infty[\\ u(x, 0) = u^0(x), & x \geq 0 \\ u(0, t) = g(t), & t \geq 0 \end{cases} \quad \{a > 0\}$$

conduit à un problème bien posé (qui admet une solution unique) lorsque $a > 0$ alors que pour $a \leq 0$, il n'en est rien : le problème à valeur initiale et **sans** condition limite, soit

$$(2.7) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & (x, t) \in [0, +\infty[\times [0, +\infty[\\ u(x, 0) = u^0(x), & x \geq 0 \end{cases} \quad \{a \leq 0\}$$

a une solution unique.

• **Proposition 3. Condition limite pour l'équation d'advection.**

Soit $[0, \infty[\ni \xi \mapsto u^0(\xi) \in \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 (condition initiale) et $[0, \infty[\ni \theta \mapsto g(\theta) \in \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 bien définie pour $a > 0$ (condition limite).

(i) Si $a > 0$, le problème (2.6) **à valeur initiale et à la limite** a une unique solution de classe \mathcal{C}^1 , sous les deux conditions :

$$(2.8) \quad u^0(0) = g(0)$$

$$(2.9) \quad \frac{dg}{dt}(0) + a \frac{du^0}{dx}(0) = 0.$$

Elle s'explique via les relations

$$(2.10) \quad u(x, t) = u^0(x - at), \quad x \geq at$$

$$(2.11) \quad u(x, t) = g\left(t - \frac{x}{a}\right), \quad x \leq at.$$

(ii) Si $a \leq 0$, le problème (2.6) **uniquement à valeur initiale** a une solution unique $u(x, t)$ de classe \mathcal{C}^1 , calculée à l'aide de la relation (2.9).

Preuve de la proposition 3.

• Nous étudions d'abord le cas $a > 0$. La condition (2.8) est nécessaire si on cherche $u(\bullet, \bullet)$ continue au point $(0, 0)$ et la condition (2.8) exprime que si $u(\bullet, \bullet)$ est continuellement dérivable au point $(0, 0)$, l'équation d'advection est satisfaite en ce point.

• La méthode des caractéristiques permet ensuite de construire la forme (2.9) (2.10) nécessaire pour une éventuelle solution. Si $x \geq at$, la droite de pente a passant par (x, t) coupe l'axe des x en $(x - at, 0)$ et comme toute solution de (1.45) est constante le long d'une telle droite, la relation (2.9) est nécessaire. Si $x \leq at$, la droite caractéristique passant par (x, t) a une intersection avec l'axe du temps en $(0, t - \frac{x}{a})$ avec $t - \frac{x}{a} \geq 0$, où $g(\bullet)$ est effectivement définie. Donc la relation (2.10) est nécessaire.

• Il reste à vérifier que les relations (2.9) (2.10) déterminent une solution de classe \mathcal{C}^1 du problème (2.6). Le seul point non banal est de vérifier qu'effectivement $u(\bullet, \bullet)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur la demi-droite $\{(t, at), t \geq 0\}$. On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(t, at) &= \frac{du^0}{dx}(0) && \text{si } x > at \\ &= -\frac{1}{a} \frac{dg}{dt}(0) && \text{si } x < at \end{aligned}$$

et la non-ambiguïté de l'existence de $\frac{\partial u}{\partial x}(t, at)$ résulte de la relation (2.9). On a un calcul analogue pour $\frac{\partial u}{\partial t}(t, at)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, at) = -a \frac{du^0}{dx}(0) \quad \text{si } x > at$$

$$= \frac{dg}{dt}(0) \quad \text{si } x < at.$$

- Dans le cas $a \leq 0$, l'ensemble des caractéristiques issues de $[0, \infty[\times \{0\}$ **recouvre** le quart d'espace $[0, \infty[\times [0, \infty[$:

$$(x, t) = (x - at, 0) + (at, t)$$

avec $x - at > 0$ si $x > 0$, $t > 0$ et $a \leq 0$. Par suite, $u(x, t)$ est nécessairement égal à $u(x - at, 0) = u^0(x - at)$ et la relation (2.9) est toujours nécessaire (on remarque d'ailleurs que $\{(x, t) \in \mathbb{R}^2, x \leq at, t > 0\}$ contient $[0, \infty[\times [0, \infty[$ si $a \leq 0$). Il est facile de vérifier que la relation (2.9) définit une solution du problème (2.6) ; la méthode des caractéristiques est tout à fait analogue au cas du "pur" problème de Cauchy. \square

- On retiendra de la proposition 3 le curieux comportement des problèmes hyperboliques vis-à-vis des **conditions aux limites** : on en a parfois besoin (cas $a > 0$, caractéristique entrante dans le domaine d'étude) et parfois pas ($a \leq 0$, caractéristique sortante) ainsi qu'illustré figure 2.

Système hyperbolique linéaire

- Nous abandonnons le modèle le plus simple de l'équation d'advection (complètement résolu !), laissons pour le chapitre suivant l'équation non linéaire de Burgers (1.45), et généralisons (au moins dans le cas d'une dimension d'espace) le modèle (1.42) de l'acoustique linéaire.

- **Définition 1. Système hyperbolique linéaire.**

Soit N un entier supérieur ou égal à 1, A une matrice réelle fixée à N lignes et N colonnes. Le système de lois de conservation

$$(2.12) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + A \bullet \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0$$

d'inconnue $\mathbb{R} \times [0, \infty[\ni (x, t) \mapsto W(x, t) \in \mathbb{R}^N$ est dit **hyperbolique** si la matrice A est **diagonalisable** sur \mathbb{R} ; il existe des valeurs propres réelles

$$(2.13) \quad \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \lambda_{k+1} \leq \dots \leq \lambda_N, \quad \lambda_k \in \mathbb{R}$$

et des vecteurs propres $r_k \in \mathbb{R}^N$ associés à ces valeurs propres :

$$(2.14) \quad A \bullet r_k = \lambda_k r_k.$$

qui forment une **base** de l'espace \mathbb{R}^N .

- Il est facile d'explicitier la solution d'un système hyperbolique linéaire dans le cas d'une dimension d'espace. On décompose le vecteur $W(\bullet, \bullet)$ inconnu sur la base des vecteurs (fixés) r_k :

$$(2.15) \quad W = \sum_{k=1}^N \varphi_k(x, t) r_k.$$

Les inconnues scalaires $\varphi_k(\bullet, \bullet)$ sont aussi appelées les **variables caractéristiques**. Elles sont solution de N équations d'advection de célérité λ_k :

$$(2.16) \quad \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} = 0,$$

résultat qui s'obtient facilement en injectant la représentation (2.15) au sein de l'équation (2.12) :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + A \bullet \frac{\partial W}{\partial x} = \sum_k \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial t} r_k + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} A \bullet r_k \right) = \sum_k \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \right) r_k$$

vu (2.15) et en utilisant le fait que la famille $(r_k)_{1 \leq k \leq N}$ est une base de \mathbb{R}^N .

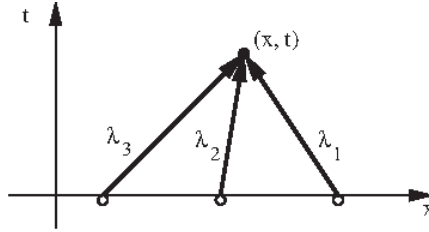


Figure 3. Droites caractéristiques pour un système hyperbolique linéaire.

- Pour calculer la solution $W(\bullet, \bullet)$ au point (x, t) , on décompose le vecteur inconnu sur la base $(r_k)_k$ des vecteurs propres de A . Puis la k^0 variable caractéristique φ_k est solution d'une équation d'advection (2.16), laquelle possède des solutions constantes le long des droites caractéristiques d'équation $\frac{dX}{dt} = \lambda_k$. On a donc

$$(2.17) \quad \varphi_k(x, t) = \varphi_k^0(x - \lambda_k t), \quad 1 \leq k \leq N$$

où la condition initiale $\mathbb{R} \ni \xi \mapsto W^0(\xi) \in \mathbb{R}^N$ est supposée décomposée comme à la relation (2.15) :

$$(2.18) \quad W^0(\xi) = \sum_{k=1}^N \varphi_k^0(\xi) r_k, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Si on regroupe (2.17) et (2.15), on a :

$$(2.19) \quad W(x, t) = \sum_{k=1}^N \varphi_k^0(x - \lambda_k t) r_k.$$

Le point $(x - \lambda_k t, 0)$ sur l'axe des abscisses envoie l'«information» $\varphi_k^0(x - \lambda_k t)$ jusqu'au point (x, t) à la célérité λ_k . Puis on reconstitue l'ensemble de la solution (2.18) de l'équation (2.12) associée à la condition initiale

$$(2.20) \quad W(x, 0) = W^0(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

à l'aide de la relation (2.19) qui est une décomposition sur les vecteurs propres de A . Nous venons d'établir la

- **Proposition 4. Problème de Cauchy pour un système hyperbolique linéaire.** Soit A une matrice fixée comme à la définition 1 et $\mathbb{R} \ni \xi \mapsto \varphi_k^0(x) \in \mathbb{R}$ un ensemble de N fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . Alors la solution classique du problème hyperbolique (2.12) associé à la condition initiale (2.20) définie en (2.18) existe, est unique et est calculée grâce à la relation (2.19).

- Nous terminons ce paragraphe par le problème à valeur initiale et à la limite posé sur le domaine $[0, L] \times [0, +\infty[$ d'espace-temps (figure 4). A l'équation (2.12) posée pour $0 \leq x \leq L$ et $t \geq 0$, on associe la condition initiale (2.18) définie via des fonctions $[0, L] \ni \xi \mapsto \varphi_k^0(\xi) \in \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 ($1 \leq k \leq N$). Les conditions aux limites sont **différentes** en $x = 0$ et en $x = L$. Il faut dans chaque cas déterminer l'ensemble des directions caractéristiques "entrantes" dans le domaine d'étude $[0, L] \times [0, \infty[$.

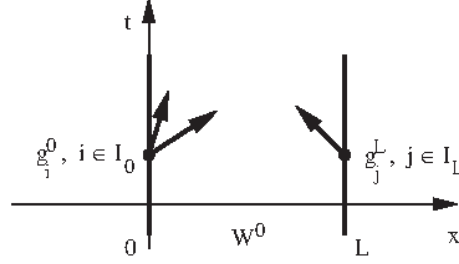


Figure 4. *Problème à valeur initiale et aux limites pour un système hyperbolique linéaire.*

- On se donne d'abord l'ensemble des directions caractéristiques sur lesquelles il **faut** se donner une condition limite en $x = 0$:

$$(2.21) \quad I_0 = \{i \in \{1, \dots, N\}, \lambda_i > 0\}$$

et de même en $x = L$:

$$(2.22) \quad I_L = \{j \in \{1, \dots, N\}, \lambda_j < 0\}.$$

Les conditions en $x = 0$ portent sur les directions $i \in I_0$:

$$(2.23) \quad \varphi_i(0, t) = g_i^0(t), \quad i \in I_0, t \geq 0$$

et de même en $x = L$ avec les indices $j \in I_L$

$$(2.24) \quad \varphi_j(L, t) = g_j^L(t), \quad j \in I_L, t \geq 0.$$

Notons que les données de conditions limites $[0, \infty[\ni \theta \mapsto g_i^0(\theta) \in \mathbb{R}$ et $[0, +\infty[\ni \theta \mapsto g_j^L(\theta) \in \mathbb{R}$ ($i \in I_0, j \in I_L$) sont relatives aux variables caractéristiques définies à la relation (2.15).

- Le problème (2.12) avec la condition initiale (2.18) (2.20) et les conditions aux limites (2.23) (2.24) a une solution unique régulière $W(\bullet, \bullet)$ représentée en (2.15) et évaluée par (2.19) pour $0 \leq x - \lambda_k t \leq L$, et par

$$(2.25) \quad \varphi_i(x, t) = g_i^0\left(t - \frac{x}{\lambda_i}\right), \quad x - \lambda_i t \leq 0, \quad i \in I_0$$

$$(2.26) \quad \varphi_j(x, t) = g_j^L\left(t - \frac{x-L}{\lambda_j}\right), \quad L \leq x - \lambda_j t, \quad j \in I_L$$

dans les cas où les conditions limites (2.23) et (2.24) sont activées. On a aussi à noter les relations de **compatibilité** qui assurent que la solution obtenue est continue :

$$(2.27) \quad \varphi_i^0(0) = g_i^0(0), \quad i \in I_0$$

$$(2.28) \quad \varphi_j^0(L) = g_j^L(0), \quad j \in I_L$$

et celles qui traduisent qu'on dispose d'une solution de classe \mathcal{C}^1 :

$$(2.29) \quad \frac{dg_i^0}{dt}(0) + \lambda_i \frac{d\varphi_i^0}{dx}(0) = 0, \quad i \in I_0$$

$$(2.30) \quad \frac{dg_j^L}{dt}(0) + \lambda_j \frac{d\varphi_j^L}{dx}(L) = 0, \quad j \in I_L.$$

3) Systèmes hyperboliques non linéaires de lois de conservation

Généralités

- Nous donnons dans cette dernière partie un cadre théorique qui permet de “ranger” l'équation de Burgers (1.45), le p -système (1.38), les équations (1.28) des eaux peu profondes et le système (1.23) des équations d'Euler des fluides parfaits. Nous nous plaçons à deux dimensions d'espace pour alléger les notations ; la généralisation aux dimensions supérieures est immédiate et le cas d'une seule dimension d'espace sans difficulté supplémentaire.

- **Définition 2. Système hyperbolique non linéaire.**

Le système de lois de conservation

$$(3.1) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(W) + \frac{\partial}{\partial y} g(W) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0, W(x, t) \in \Omega$$

est dit hyperbolique si pour tout angle $\theta \in [0, 2\pi]$ et tout $W \in \Omega$ la matrice jacobienne

$$(3.2) \quad A(W, \theta) = \cos \theta df(W) + \sin \theta dg(W), \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad W \in \Omega$$

est **diagonalisable** avec des valeurs propres $\lambda_k(W, \theta)$ réelles et des vecteurs propres réels $r_k(W, \theta)$:

$$(3.3) \quad \begin{cases} A_k(W, \theta) \bullet r_k(W, \theta) = \lambda_k(W, \theta) r_k(W, \theta), \\ \theta \in [0, 2\pi], \quad 1 \leq k \leq N, \quad W \in \Omega \end{cases}$$

qui forment une **base** de \mathbb{R}^N .

- La première remarque est que la propriété d'hyperbolicité est **invariante** par changement de fonction inconnue $\Omega \ni W \mapsto V = \mathcal{V}(W) \in \mathcal{Y}$ supposé régulier et bijectif ; elle ne dépend pas de l'écriture “conservative” des équations (3.1). Supposons en effet que l'on effectue le changement de fonction inconnue proposé ci-dessus :

$$(3.4) \quad \Omega \ni W \mapsto V = \mathcal{V}(W) \in \mathcal{Y},$$

et cherchons l'équation satisfaite par V . On pose

$$(3.5) \quad T(W) = d\mathcal{V}(W), \quad W \in \Omega;$$

on a alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(W) + \frac{\partial}{\partial y} g(W) &= \frac{\partial W}{\partial V} \bullet \frac{\partial V}{\partial t} + df(W) \bullet \frac{\partial W}{\partial x} + dg(W) \bullet \frac{\partial W}{\partial y} \\ &= T^{-1}(W) \bullet \left[\frac{\partial V}{\partial t} + T(W) df(W) \bullet T^{-1}(W) \bullet \frac{\partial V}{\partial x} + T(W) \bullet dg(W) \bullet T^{-1}(W) \bullet \frac{\partial V}{\partial y} \right] = 0. \end{aligned}$$

L'équation satisfaite par $V(x, y, t) \in Y$ s'écrit donc

$$(3.6) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + B(V) \bullet \frac{\partial V}{\partial x} + C(V) \bullet \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

avec

$$(3.7) \quad \begin{cases} B(V) = T(W) \bullet df(W) \bullet T^{-1}(W) \\ C(V) = T(W) \bullet dg(W) \bullet T^{-1}(W). \end{cases}$$

c'est une "**forme non conservative**" des équations (3.1).

• **Proposition 5. Condition suffisante d'hyperbolicité**

Pour que le système (3.1) de lois de conservation soit hyperbolique, il suffit de vérifier qu'avec un changement de fonction inconnue (3.4), les matrices $B(V)$ et $C(V)$ définissent, pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, une matrice $D(V, \theta)$ via

$$(3.8) \quad D(V, \theta) = \cos \theta B(V) + \sin \theta C(V), \quad \theta \in [0, 2\pi], V \in \mathcal{V}$$

qui a des valeurs propres réelles et dont les vecteurs propres forment une base de \mathbb{R}^N , *id est* est **diagonalisable** sur \mathbb{R} .

Preuve de la proposition 5.

• Elle est immédiate ; le calcul effectué plus haut montre que les matrices $A(W, \theta)$ et $D(V, \theta)$ sont **semblables** :

(3.9) $D(V, \theta) = T(W) \bullet A(W, \theta) \bullet T^{-1}(W)$. Elles ont donc **mêmes propriétés spectrales** et la diagonalisabilité sur \mathbb{R} de l'une entraîne la même propriété pour l'autre. \square

Equations d'Euler de la dynamique des gaz

• Nous montrons maintenant que le système des équations d'Euler de la dynamique des gaz (1.23) est un **système hyperbolique non linéaire** de lois de conservation et laissons au lecteur le soin de vérifier à titre d'exercice que la même propriété est vraie pour le modèle de Saint-Venant, le p -système ou l'équation de Burgers.

• Le premier point est de préciser la valeur de l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^4$ qui englobe toutes les variables "conservatives" W , avec

$$(3.10) \quad W = (\rho, q, r, \mathcal{E})^t$$

$$(3.11) \quad q = \rho u, \quad r = \rho v$$

$$(3.12) \quad \mathcal{E} = \rho e + \frac{1}{2}(\rho u^2 + \rho v^2) \equiv \rho E.$$

On a donc

$$(3.13) \quad \Omega = \left\{ (\rho, q, r, \mathcal{E})^t, \quad \rho > 0, \quad \mathcal{E} - \frac{1}{2} \left(\frac{q^2}{\rho} + \frac{r^2}{\rho} \right) > 0 \right\}.$$

La vérification de la convexité de Ω est laissé au lecteur.

• Le second point est d'expliciter les fonctions $\Omega \ni W \mapsto f(W) \in \mathbb{R}^4$ et $\Omega \ni W \mapsto g(W) \in \mathbb{R}^4$ pour ramener le système (1.23) dans le cadre général (3.1), compte tenu de la loi des gaz parfaits (1.4) qui s'écrit aussi

$$(3.14) \quad p = (\gamma - 1) \left(\mathcal{E} - \frac{1}{2\rho} (q^2 + r^2) \right)$$

et définit bien une application $\Omega \ni W \mapsto p(W) \in]0, +\infty[$. On a alors

$$(3.15) \quad f(W) = (\rho, \rho u^2 + p, \rho u v, \rho u E + p u)^t$$

$$(3.16) \quad g(W) = (\rho, \rho u v, \rho v^2 + p, \rho v E + p v)^t$$

et par composition des applications $\Omega \ni W \mapsto u(W) = q/\rho \in \mathbb{R}$, $\Omega \ni W \mapsto v(W) = r/\rho \in \mathbb{R}$ et de $\Omega \ni W \mapsto p(W) \in]0, \infty[$ établie en (3.14), la construction de $\Omega \ni W \mapsto f(W) \in \mathbb{R}^4$ et $\Omega \ni W \mapsto g(W) \in \mathbb{R}^4$ n'offre pas de difficulté. On a par exemple

$$(3.17) \quad f(W) = \begin{pmatrix} q \\ \frac{q^2}{\rho} + (\gamma - 1) \left(\mathcal{E} - \frac{q^2 + r^2}{2\rho} \right) \\ \frac{qr}{\rho} \\ \mathcal{E} \frac{q}{\rho} + (\gamma - 1) \frac{q}{\rho} \left(\mathcal{E} - \frac{q^2 + r^2}{2\rho} \right) \end{pmatrix}.$$

• Le troisième point consiste à faire le changement de variables (3.4) le plus approprié, et nous proposons de poser

$$(3.18) \quad V = (\rho, u, v, s)^t$$

avec l'entropie s définie en (1.24). La pression p ne dépend plus alors que de ρ et s ; on a

$$(3.19) \quad \frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho, s) \equiv c^2 = \gamma \frac{p}{\rho} > 0,$$

via un calcul algébrique immédiat par dérivation de (1.24). L'écriture des équations de la dynamique des gaz dans les variables non conservatives V ne demande que du soin et a été suggéré à la proposition 1. On a une évolution donnée par la relation (3.6), avec

$$(3.20) \quad B(V) = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ \frac{c^2}{\rho} & u & 0 & \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix}$$

$$(3.21) \quad C(V) = \begin{pmatrix} v & 0 & \rho & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ \frac{c^2}{\rho} & 0 & v & \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \\ 0 & 0 & 0 & v \end{pmatrix}.$$

Il reste à vérifier que la matrice $D(V, \theta)$ de la relation (3.8) est diagonalisable sur le corps des réels. On pose

$$(3.22) \quad \xi = u \cos \theta + v \sin \theta.$$

On a alors

$$(3.23) \quad D(V, \theta) = \begin{pmatrix} \xi & \rho \cos \theta & \rho \sin \theta & 0 \\ \frac{c^2}{\rho} \cos \theta & \xi & 0 & \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \\ \frac{c^2}{\rho} \sin \theta & 0 & \xi & \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \\ 0 & 0 & 0 & \xi \end{pmatrix}$$

qui montre clairement que ξ est valeur propre. On a ensuite

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \xi - \lambda & \rho \cos \theta & \rho \sin \theta \\ \frac{c^2}{\rho} \cos \theta & \xi - \lambda & 0 \\ \frac{c^2}{\rho} \sin \theta & 0 & \xi - \lambda \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} (\xi - \lambda)^3 - \rho \cos \theta \left(\frac{c^2}{\rho} \cos \theta \right) (\xi - \lambda) + \\ - \rho \sin \theta \left(\frac{c^2}{\rho} \sin \theta \right) (\xi - \lambda) \end{vmatrix} \\ &= (\xi - \lambda) \left((\xi - \lambda)^2 - c^2 \right) \end{aligned}$$

qui montre que ξ est **valeur propre double** ; les deux autres valeurs propres sont

$$(3.24) \quad \lambda_{\pm} = \xi \pm c.$$

• **Proposition 6. Hyperbolicité des équations d'Euler.**

Le système des équations d'Euler de la dynamique des gaz, défini à l'aide des relations (3.10) à (3.16) et (3.1) est un système hyperbolique de lois de conservation. Ses valeurs propres s'écrivent

$$(3.25) \quad \lambda_1 = \xi - c < \lambda_2 = \lambda_3 = \xi < \lambda_4 = \xi + c,$$

avec ξ donné à la relation (3.22).

Preuve de la proposition 6.

• L'explicitation du noyau de la matrice $D(V, \theta) - \xi I$ avec D donnée en (1.23) permet de s'assurer que l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda = \xi$ est bien de dimension 2. Si $X = (\zeta, \eta, \varphi, \psi) \in \mathbb{R}^4$ vérifie $D \bullet X = \xi X$, on a :

$$\begin{cases} \rho \cos \theta \eta + \rho \sin \theta \varphi &= 0 \\ \frac{c^2}{\rho} \cos \theta \zeta + \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \psi &= 0 \\ \frac{c^2}{\rho} \sin \theta \zeta + \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \psi &= 0 \end{cases}$$

et les deux dernières relations sont proportionnelles à $(c^2 \zeta + \frac{\partial p}{\partial s} \psi)$, ce qui établit la propriété. Il suffit alors d'utiliser la proposition 5. \square

Etude mathématique d'une loi de conservation

1) Introduction

• Nous étudions un système **hyperbolique** de lois de conservation à une dimension d'espace :

$$(1.1) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(W) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

L'inconnue $W(x, t)$ prend ses valeurs dans un **ouvert convexe** non vide $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ et $\Omega \ni W \mapsto f(W) \in \mathbb{R}^N$ est une fonction de flux assez régulière (de classe \mathcal{C}^1 en pratique) ; sa dérivée de Fréchet $df(W)$

$$(1.2) \quad df(W) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N), \quad W \in \Omega$$

admet une base $(r_k(W))_{1 \leq k \leq N}$ de vecteurs propres dont les valeurs propres associées sont notées $\lambda_k(W)$:

$$(1.3) \quad df(W) \bullet r_k(W) = \lambda_k(W) r_k(W), \quad W \in \Omega, \quad 1 \leq k \leq N.$$

Dans le cas où $N = 1$, on parle d'une loi de conservation scalaire et on utilise une minuscule $u(x, t)$ pour désigner la fonction réelle inconnue. La condition d'hyperbolicité est alors évidente. Le cas où $f(u) = \frac{1}{2} u^2$ correspond à l'équation de Burgers, présentée au chapitre relatif aux modèles hyperboliques.

2) Solutions régulières

• Il est naturel dans un premier temps au moins de supposer que les divers termes de l'équation (1.1) ont un sens classique, donc par exemple que $\frac{\partial W}{\partial t}(x, t)$ et $\frac{\partial W}{\partial x}(x, t)$ sont bien définis au point $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty[$. Une **solution classique** appartient a priori à l'espace $\mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times [0, \infty[, \Omega)$

$$(2.1) \quad W(\bullet, \bullet) \text{ solution classique ; } W \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times [0, \infty[, \Omega).$$

Dans le cas d'une équation ($N = 1$) on pose

$$(2.2) \quad a(u) = f'(u), \quad u \in \Omega.$$

On cherche ici à résoudre le problème de Cauchy, composé d'une part de l'équation (1.1) et d'autre part de la condition initiale

$$(2.3) \quad u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

où $\mathbb{R} \ni x \mapsto u^0(x) \in \Omega$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 .

• Si $u(\bullet, \bullet)$ est solution classique de la loi de conservation (1.1), la règle de la dérivation d'une fonction composée et la définition (2.2) permettent de construire la **forme non conservative**

$$(2.4) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0$$

de l'équation hyperbolique (1.1). Nous allons voir que la méthode des caractéristiques impose des contraintes sur la solution classique $u(\bullet, \bullet)$.

• **Proposition 1. Les caractéristiques sont droites.**

Soit $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times [0, \infty[, \mathbb{R})$ une solution classique de la loi de conservation (1.1) associée à la condition initiale (2.3). Soit $\mathbb{R} \supset I \ni \theta \mapsto X(\theta) \in \mathbb{R}$ une solution de l'équation différentielle

$$(2.5) \quad \frac{dX}{d\theta} = a(u(X(\theta), \theta)), \quad \theta \in I,$$

où I est un intervalle de \mathbb{R} et $a(\bullet)$ la célérité introduite à la relation (2.2). Alors la fonction $v(\bullet)$ définie par

$$(2.6) \quad v(\theta) = u(X(\theta), \theta), \quad \theta \in I$$

est constante ; la courbe intégrale de l'équation (2.6) est une droite.

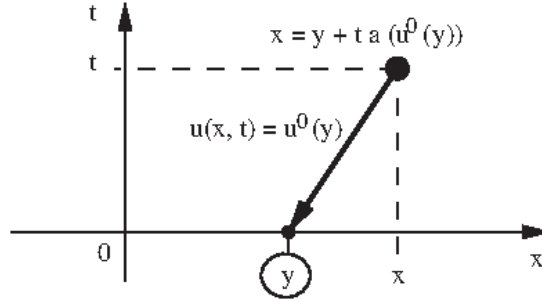


Figure 1. Trouver le pied de la caractéristique nécessite de résoudre une équation.

Preuve de la proposition 1.

• On calcule la dérivée de $v(\bullet)$ par rapport au temps θ ; il vient

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\theta} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{dX}{d\theta} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) (X(\theta), \theta) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} + a(u(X(\theta), \theta)) \frac{\partial u}{\partial x} \right) (X(\theta), \theta) && \text{car } X(\bullet) \text{ est solution de (2.5)} \\ &= 0 && \text{car } u(\bullet, \bullet) \text{ est solution de (2.4).} \end{aligned}$$

Cette propriété établit le premier point de la proposition.

• La solution $I \ni \theta \mapsto X(\theta) \in \mathbb{R}$ de l'équation caractéristique (2.5) vérifie $\frac{dX}{d\theta} = a(v(\theta))$, compte tenu de (2.6) et comme $v(\theta)$ ne dépend pas de θ , $a(v(\theta))$ est une constante. Par suite la fonction $X(\bullet)$ est affine et les caractéristiques sont des droites. \square

• On peut adopter deux points de vue : partir de l'**origine** du temps et construire, pour $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé, la droite caractéristique passant par ce point

$$(2.7) \quad x = x_0 + t a(u^0(x_0)),$$

ou le point (x, t) de l'espace-temps étant fixé, chercher le "pied" de la caractéristique, *i.e.* résoudre l'équation (2.7) par rapport à l'inconnue x_0 .

• **Théorème 1. Solution classique du problème de Cauchy.**

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, $u^0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, $a = \frac{df}{du} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. On suppose que D défini par

$$(2.8) \quad D = \inf_{x \in \mathbb{R}} \left[\frac{d}{dx} (a(u^0(x))) \right]$$

est réel, *i.e.*

$$(2.9) \quad \frac{da}{du} (u^0(x)) \frac{du^0}{dx} \geq D, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On pose

$$(2.10) \quad T^* = \begin{cases} +\infty & \text{si } D \geq 0 \\ -\frac{1}{D} & \text{si } D < 0. \end{cases}$$

Alors le problème de Cauchy

$$(2.11) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x}, & x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \\ u(x, 0) = u^0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

admet une unique solution $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times [0, T^*])$ sur l'intervalle de temps $[0, T^*]$.

Preuve du théorème 1.

• On doit, pour (x, t) fixé dans $\mathbb{R} \times [0, T^*]$, résoudre l'équation (2.7) d'inconnue $x_0 \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire trouver (sans ambiguïté) le pied de la caractéristique passant par le point (x, t) . Pour t fixé ≥ 0 et strictement inférieur à T^* , on pose

$$(2.12) \quad g(y, t) = y + t a(u^0(y)), \quad y \in \mathbb{R}, 0 \leq t < T^*.$$

On a

$$\frac{\partial}{\partial y} (g(y, t)) = 1 + t \frac{d}{dy} (a(u^0(y))) \quad \text{et}$$

$$(2.13) \quad \frac{\partial}{\partial y} (g(y, t)) \geq 1 + t D \geq \epsilon > 0$$

avec $\epsilon = 1$ si $D \geq 0$ et $\epsilon > 0$ choisi de sorte que $t - \frac{\epsilon}{D} \leq T^*$ si $D < 0$. L'application $g(\bullet, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et la condition (2.13) assure qu'elle est croissante, tend vers $-\infty$ si $y \rightarrow -\infty$ et tend vers $+\infty$ si $y \rightarrow +\infty$ puisque $g(y, t) - g(0, t) \geq \epsilon y$ par intégration de la relation (2.13) sur l'intervalle $[0, y]$. C'est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} et l'application réciproque $(g(\bullet, t))^{-1}$ est bien définie.

• Pour $t \in [0, T^*]$ et $x \in \mathbb{R}$, l'équation (2.7) a une solution unique $x_0 \in \mathbb{R}$ donnée par $x_0 = g(t, \bullet)^{-1}(x)$. Compte tenu de la proposition 1, toute solution $u(\bullet, \bullet)$ de classe \mathcal{C}^1 du problème (2.11) est nécessairement de la forme

$$(2.14) \quad u(x, t) = u^0(g(\bullet, t)^{-1}(x)), \quad x \in \mathbb{R}, 0 \leq t < T^*$$

puisque $u(\bullet, \bullet)$ est constante sur la caractéristique (2.5) et vaut u^0 au temps origine.

• Il faut maintenant vérifier que la relation (2.14) définit effectivement une application de classe \mathcal{C}^1 du couple $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T^*]$. Or l'équation qui définit le pied $y = x_0$ de la caractéristique s'écrit

$$(2.15) \quad y + t a(u^0(y)) \equiv g(y, t) = x$$

avec $g(\bullet, \bullet)$ de classe \mathcal{C}^1 et pour (y, t) fixé dans $\mathbb{R} \times [0, T^*[$, l'application $\mathbb{R} \ni \eta \mapsto \frac{\partial g}{\partial y}(y, t) \eta \in \mathbb{R}$ est bijective (cf. (2.13)). Le théorème des fonctions implicites permet de conclure à l'existence d'un voisinage $W(x)$ de $x = g(y, t)$, d'un voisinage $V(t)$ de $t \in [0, T^*[$ et d'une application de classe \mathcal{C}^1 : $W(x) \times V(t) \ni (\xi, \theta) \mapsto \varphi(\xi, \theta) \in \mathbb{R}$ qui est identique à $(g(\bullet, \bullet))^{-1}$ de sorte que toute solution de l'équation $g(y, \theta) = \xi$ avec $\xi \in W(x)$ et $\theta \in V(t)$ s'écrit nécessairement sous la forme $y = \varphi(\xi, \theta)$. On en déduit que l'application $V(t) \times W(x) \ni (\theta, \xi) \mapsto y = (g(\bullet, \theta))^{-1}(\xi) \in \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 . Compte tenu de (2.14) et de l'hypothèse $u^0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, le membre de droite de (2.14) est de classe \mathcal{C}^1 .

• Il reste à vérifier que la fonction $u(\bullet, \bullet)$ définie à l'aide de la relation (2.14) est effectivement une solution du problème de Cauchy (2.11). Soit $y = \varphi(x, t)$ la solution de l'équation (2.15) qui définit le pied de la caractéristique. On a par dérivation successive de (2.15) par rapport au temps et par rapport à l'espace :

$$(2.16) \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{-a(u^0(y))}{1 + ta'(u^0(y))}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{1 + ta'(u^0(y))}$$

donc si $u(\bullet, \bullet)$ est la fonction donnée par la relation (2.14), on a

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x} = (u^0(y))' \left(\frac{\partial y}{\partial t} + a(u) \frac{\partial y}{\partial x} \right) = 0$$

compte tenu des relations (2.16) et le résultat est établi. \square

3) Intersection de caractéristiques

• Le résultat précédent définit la solution classique sur $[0, T^*[$ et une question naturelle est de savoir si on peut **prolonger** cette solution classique jusqu'à $+\infty$. La réponse est **négative** si D défini en (2.8) est strictement négatif. Imaginons pour fixer les idées, deux points $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ de sorte que

$$(3.1) \quad x_1 < x_2$$

$$(3.2) \quad u^0(x_1) \neq u^0(x_2)$$

$$(3.3) \quad a(u^0(x_1)) > a(u^0(x_2)).$$

La caractéristique issue de x_1 à l'origine s'écrit

$$(3.4) \quad x = x_1 + ta(u^0(x_1)), \quad t \geq 0$$

et celle issue de x_2 a pour équation

$$(3.5) \quad x = x_2 + ta(u^0(x_2)), \quad t \geq 0$$

(voir la figure 2). Ces deux droites **se coupent** en $P(x^*, t^*)$. Si $u(\bullet, \bullet)$ solution classique de (2.11) existe au point P , on a nécessairement (compte tenu de la proposition 1) : $u(P) = u(x_1, 0) = u(x_2, 0)$ et cette dernière égalité contredit l'hypothèse (3.2), qui est elle-même une conséquence de la relation (3.3).

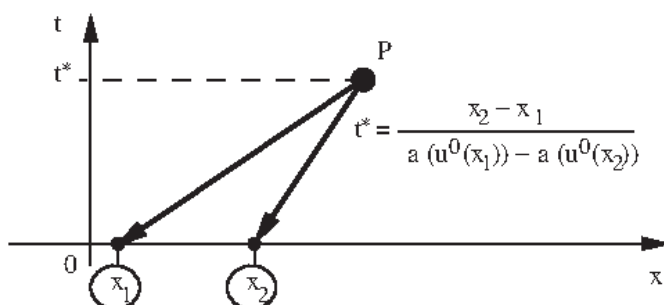


Figure 2. Au point P , il ne peut y avoir de solution classique continue si $u^0(x_1) \neq u^0(x_2)$.

- La remarque précédente peut être précisée. Si

$$f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}), \quad a = f', \quad u^0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), \quad -\infty < D \equiv \inf_{x \in \mathbb{R}} \frac{d}{dx} [a(u^0(x))] < 0$$

et $T^* = -1/D$, alors pour tout $\epsilon > 0$, le problème de Cauchy (2.11) ne peut avoir de solution classique sur $\mathbb{R} \times [0, T^* + \epsilon[$.

- L'exemple qui suit illustre le comportement typique de la solution d'une loi de conservation lorsque les vitesses d'ondes à l'origine ne définissent pas une fonction croissante. Nous étudions l'équation de Burgers, pour laquelle $f(u) \equiv \frac{1}{2} u^2$ et

$$(3.6) \quad a(u) = u, \quad u \in \mathbb{R} \quad (\text{Burgers})$$

avec une donnée initiale u^0 continue (les calculs algébriques sont plus simples !) définie par

$$(3.7) \quad u^0(x_0) = \begin{cases} 1, & x_0 \leq 0 \\ 1 - x_0, & 0 \leq x_0 \leq 1 \\ 0, & x_0 \geq 1. \end{cases}$$

Le calcul de la caractéristique (2.7) est facile :

si $x_0 \leq 0$, $x = x_0 + t$ et $u(x, t) = 1$,

si $0 \leq x_0 \leq 1$, $x = x_0 + t(1 - x_0)$ et $u(x, t) = 1 - x_0 = 1 - \frac{x - t}{1 - t} = \frac{1 - x}{1 - t}$

si $x_0 \geq 1$, $x = x_0$ et $u(x, t) = 0$ si $x \geq 1$.

La construction de la fonction $u(\bullet, \bullet)$ pour $0 \leq t \leq 1$ est donc donnée par

$$(3.8) \quad u(x, t) = \begin{cases} 1 & x \leq t \\ \frac{1 - x}{1 - t} & t \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t < 1 \\ 0 & x \geq 1. \end{cases}$$

- Au fur et à mesure que t croît, le profil $u(t, \bullet)$ se raidit, et la solution (classique) $u(t, \bullet)$ devient **discontinue** en $x = 1$ au temps $t = 1$. Cette discontinuité est un modèle mathématique pour une **onde de choc**. Notons que l'apparition d'une discontinuité est une manifestation naturelle du caractère **non linéaire** de la loi de conservation (1.1) lorsque la donnée initiale $u^0(\bullet)$ est telle que $\mathbb{R} \ni x \mapsto a(u^0(x)) \in \mathbb{R}$ n'est **pas** croissante. Les ondes se propagent avec la vitesse a . La condition initiale est telle que des ondes plus rapides (en valeur algébrique) sont situées "à gauche" de points caractérisés par des vitesses d'ondes plus

lentes. Les **ondes rapides rattrapent les ondes lentes**, le profil se raidit et une discontinuité se crée. Il est donc nécessaire de sortir du cadre trop strict des solutions classiques (de classe \mathcal{C}^1) de la loi de conservation (1.1), afin de permettre aux solutions “faibles” certaines discontinuités.

4) Solutions faibles

• Nous commençons par écrire la loi de conservation (1.1) **sans** faire apparaître explicitement les dérivées $\frac{\partial W}{\partial t}$ et $\frac{\partial f}{\partial x}$, où $\mathbb{R}^N \supset \Omega \ni W \mapsto f(W) \in \mathbb{R}^N$ est la fonction de flux. On suppose que $\mathbb{R} \times [0, +\infty[\ni (x, t) \mapsto W(x, t) \in \Omega$ vérifie une condition initiale

$$(4.1) \quad W(x, 0) = W^0(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

où $\mathbb{R} \ni x \mapsto W^0(x) \in \Omega$ est une fonction donnée de classe \mathcal{C}^1 .

• On multiplie l'équation (1.1) par une fonction vectorielle φ de classe \mathcal{C}^1 à support compact dans $\mathbb{R} \times [0, \infty[$,

$$(4.2) \quad \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)^N.$$

Une telle fonction est nulle hors d'un domaine de type $[x_{\min}, x_{\max}] \times [0, T]$, mais est a priori non nulle sur l'axe $x = 0$, *i.e.* l'intervalle (de \mathbb{R}^2) $[x_{\min}, x_{\max}] \times \{0\}$, ainsi que le suggère la figure 3.

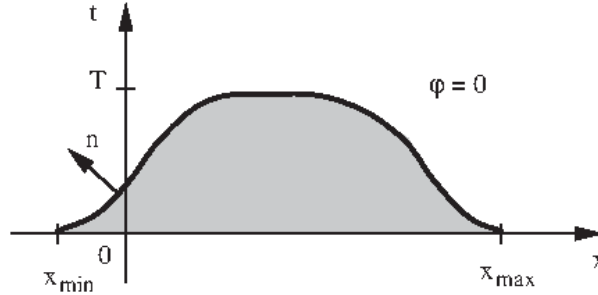


Figure 3. Support typique de $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times [0, \infty[)^N$.

• Puis on intègre l'expression obtenue sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$:

$$(4.3) \quad \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\infty} \left[\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial f(W)}{\partial x} \right] \varphi(x, t) dx dt = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times [0, \infty[)^N$$

sans se priver de le faire par parties :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} dx \int_0^{\infty} dt \left[\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial f(W)}{\partial x} \right] \varphi(x, t) = \\ - \int_{\mathbb{R}} dx \int_0^{\infty} dt \left(W(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(W(x, t)) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \\ + \int_{\partial(\text{supp} \varphi)} [W(x, t) n_t + f(W(x, T)) n_x] \varphi(x, t) d\gamma, \end{aligned}$$

où $n \equiv (n_x, n_t)$ désigne la normale extérieure au support de φ . Mais sur le bord de son support, $\varphi(\bullet, \bullet)$ est nulle, sauf peut être sur le morceau de type $[x_{\min}, x_{\max}] \times \{0\}$ décrit plus haut, où $n = (0, -1)$ et $\varphi(x, t) = \varphi(x, 0)$. On a donc

$$\begin{aligned} \int_{\partial(\text{supp}\varphi)} (W(x, t) n_t + f(W(x, t)) n_x) \varphi(x, t) d\gamma &= - \int_{\mathbb{R}} dx W(x, 0) \varphi(x, 0) \\ &= - \int_{\mathbb{R}} W^0(x) \varphi(x, 0) dx \end{aligned}$$

compte tenu de la condition initiale (4.1).

- Pour une solution régulière $W(\bullet, \bullet)$ de la loi de conservation (1.1) et de la condition initiale (4.1), l'écriture (4.3) s'écrit sous forme équivalente

$$(4.4) \quad \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \left(W(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(W(x, t)) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt \\ + \int_{\mathbb{R}} W^0(x) \varphi(x, 0) dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times [0, \infty[)^N. \end{cases}$$

Cette écriture ne contient **plus** de dérivées de la fonction inconnue $W(\bullet, \bullet)$ et prend un sens dès que $W \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty[^N$, c'est à dire dès que $W \in L^\infty(K)$ pour toute partie compacte K de $\mathbb{R} \times [0, \infty[$. En effet, la fonction régulière $\varphi \in \mathcal{C}_0^1$ est à support compact dans le même espace $\mathbb{R} \times [0, \infty[$ et les intégrales de l'expression (4.4) ont bien un sens. Cette remarque motive la définition qui suit.

- **Définition 1. Solution faible du problème de Cauchy.**

Soit $W^0 \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R})^N$. Une fonction $W \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty[^N$ est dite solution faible du problème de Cauchy (1.1) (4.1) si $W(x, t) \in \Omega$ presque partout (x, t) et satisfait la relation (4.4) pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times [0, \infty[^N$ à support compact dans $\mathbb{R} \times [0, \infty[$.

- Une solution faible est solution au sens des distributions de la loi de conservation (1.1). En effet, on a bien évidemment $\mathbb{R} \times]0, \infty[\subset \mathbb{R} \times [0, \infty[$ et $\mathcal{D}(\mathbb{R} \times]0, \infty[) \subset \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times [0, \infty[)$. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times]0, \infty[)$, φ est nulle sur $\mathbb{R} \times \{0\}$ (car elle est à support compact dans l'**ouvert** $\mathbb{R} \times]0, \infty[$) donc la relation (4.4) entraîne

$$(4.5) \quad \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \left[W(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(W(x, t)) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] dx dt = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times]0, \infty[^N,$$

relation qui exprime par définition la loi de conservation (1.1) au sens des **distributions**. L'intérêt de la notion de solution faible est d'incorporer dans la même écriture à la fois la loi de conservation (1.1) **et** la condition initiale (4.1), *i.e.* l'ensemble des conditions relatives au problème de Cauchy.

- Si, de plus, une solution faible $W(\bullet, \bullet)$ du problème de Cauchy est une fonction de classe \mathcal{C}^1 , *i.e.* $W \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times [0, \infty[, \Omega)$, ou écrit (4.4) avec pour fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times]0, \infty[)$ et il vient après intégration par parties (les termes de bord sont nuls) :

$$(4.6) \quad \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \left[\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(W) \right] \varphi(x, t) dx dt = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times]0, \infty[^N,$$

relation qui entraîne (1.1) sur $\mathbb{R} \times]0, \infty[$. L'application $\mathbb{R} \times [0, \infty[\ni (x, t) \mapsto \left(\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \right)(x, t) \in \mathbb{R}^N$ est une fonction continue et $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ est dense dans $\mathcal{C}(\mathcal{O})$ pour un ouvert quelconque \mathcal{O} de $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$. Par continuité, la loi de conservation (1.1) est satisfaite sur $\mathbb{R} \times]0, \infty[$.

- On intègre ensuite la relation (4.4) par parties “à l’envers” et on tient compte de la relation (1.1) que nous venons d’établir. Il vient

$$(4.7) \quad \int_{\mathbb{R}} (W(x, 0) - W^0(x)) \varphi(x, 0) dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times [0, \infty[)^N,$$

relation qui compte tenu des hypothèses $W^0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})^N$ et $W \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times [0, \infty[, \Omega)^N$, entraîne la condition initiale (4.1). Nous avons démontré la

- **Proposition 2. Une solution faible régulière est solution classique.** Si $W^0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \Omega)$ et $W \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty[)^N$ est une solution faible du problème de Cauchy (1.1) (4.1) qui satisfait de plus à l’hypothèse de régularité $W \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times [0, \infty[, \Omega)$, alors $W(\bullet, \bullet)$ est solution classique du problème de Cauchy (1.1) (4.1).

- On s’intéresse maintenant au cas où $W(\bullet, \bullet)$ est régulière, “sauf sur une famille finie Σ de courbes régulières”. On dit que $W(\bullet, \bullet)$ est “de classe \mathcal{C}^1 par morceaux” si il existe une famille finie Σ de courbes régulières dans $\mathbb{R} \times [0, \infty[$ paramétrées par le temps sous la forme $x = \xi(\theta)$, telles que $W(\bullet, \bullet)$ est de classe \mathcal{C}^1 dans l’ensemble $(\mathbb{R} \times [0, \infty[) \setminus \Sigma$ et admet une **limite à gauche et à droite** en tout point $(x, t) \in \Sigma$:

$$(4.8) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0, \epsilon > 0} W(\xi(t) - \epsilon, t) = W_g(\xi(t), t), \quad (\xi(t), t) \in \Sigma$$

$$(4.9) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0, \epsilon > 0} W(\xi(t) + \epsilon, t) = W_d(\xi(t), t), \quad (\xi(t), t) \in \Sigma.$$

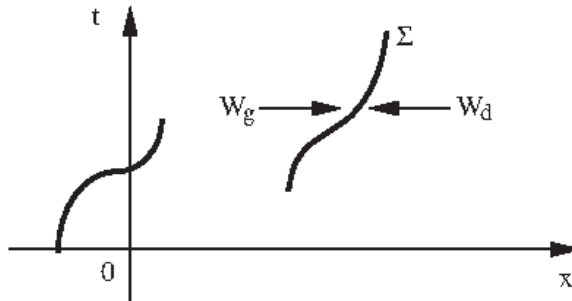


Figure 4. Fonction W de classe \mathcal{C}^1 par morceaux.

- Une condition initiale $W^0 \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R})$ est dite également de classe \mathcal{C}^1 par morceaux si il existe une famille finie P de points de \mathbb{R} telle que W^0 est continuellement dérivable sur $\mathbb{R} \setminus P$, et W^0 a une limite à gauche et une limite à droite en tout point $x \in P$.

- **Théorème 2. Relation de Rankine et Hugoniot.**

On suppose $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ et la condition initiale W^0 de classe \mathcal{C}^1 par morceaux. Alors une fonction $W \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty[)^N$ de classe \mathcal{C}^1 par morceaux est solution faible du problème de Cauchy (1.1) (4.1) si et seulement si

- (i) W est solution classique de (1.1) (4.1) aux points de $\mathbb{R} \times [0, \infty[$ où elle est de classe \mathcal{C}^1 et
- (ii) W satisfait la relation de saut dite de Rankine (1876) et Hugoniot (1887) :

$$(4.10) \quad f(W_d) - f(W_g) = \sigma(W_d - W_g) \quad \text{sur } \Sigma$$

en tout point de la ligne de discontinuité, avec

$$(4.11) \quad \sigma = \frac{d\xi}{d\theta}(x, t), \quad x = \xi(\theta) \quad \text{sur } \Sigma.$$

Preuve du théorème 2.

- Soit W une fonction de classe \mathcal{C}^1 par morceaux qui soit également solution faible du problème de Cauchy (1.1) (4.1). La proposition 2 montre que $W(\bullet, \bullet)$ est solution classique en tout point où elle est de classe \mathcal{C}^1 , ce qui montre le point (i).
- Considérons maintenant un point M de la ligne Σ et D une boule ouverte centrée autour de M assez petite de sorte que $\Sigma \cap D$ soit composé de la seule composante connexe de Σ contenant M (Figure 5).

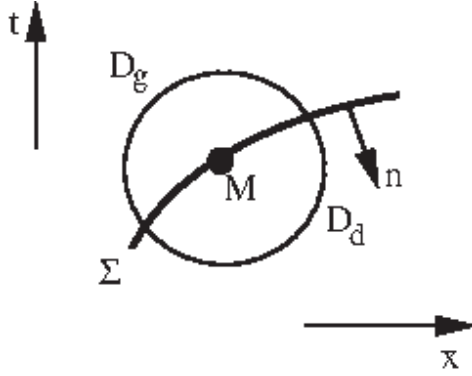


Figure 5. Zoom autour d'un point de discontinuité.

- On appelle D_g et D_d les deux composantes connexes de $D \setminus (\Sigma \cap D)$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(D)^N$. Comme W est solution au sens des distributions, on a

$$0 = \int_D \left(W \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(W) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt = \int_{D_g} + \int_{D_d}.$$

On suppose que le vecteur normal n sur Σ pointe de D_g vers D_d (Figure 5). On intègre l'égalité précédente par parties, en tenant compte du fait que la fonction φ est nulle sur le bord ∂D de l'ouvert D . Il vient :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{D_d} \left(\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(W) \right) \varphi(x, t) dx dt - \int_{\partial D_d} [n_t W + n_x f(W)] \varphi(x, t) d\gamma \\ &\quad - \int_{D_g} \left(\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(W) \right) \varphi(x, t) dx dt + \int_{\partial D_g} [n_t W + n_x f(W)] \varphi(x, t) d\gamma. \end{aligned}$$

On remarque que $W(\bullet, \bullet)$ étant solution classique de (1.1) sur $D_g \cup D_d$, les deux intégrales correspondantes sont nulles. Par ailleurs sur le bord ∂D_g , la fonction $W(\bullet, \bullet)$ est égale à sa limite à gauche W_g et on a un résultat analogue à droite. On tire donc de la relation précédente

$$(4.12) \quad \begin{cases} \int_{\Sigma \cap D} [n_t (W_d - W_g) + n_x (f(W_d) - f(W_g))] \varphi(x, t) d\gamma = 0 \\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(D)^N. \end{cases}$$

La relation (4.14) est vraie pour toute fonction φ régulière sur le bord $\Sigma \cap D$, ce qui établit la relation (4.12), compte tenu de la relation géométrique

$$(4.13) \quad (n_t \times 1) + (n_x \sigma) = 0 \quad \text{sur } \Sigma .$$

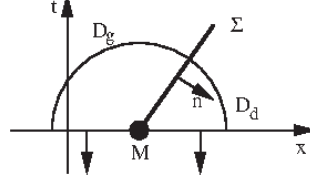


Figure 6. *Discontinuité initiale.*

- Nous détaillons le cas où le point M est situé sur $\mathbb{R} \times \{0\}$, *i.e.* le cas où la ligne de discontinuité Σ a une trace sur l'ensemble $\mathbb{R} \times \{0\}$ associé à la condition initiale W^0 , discontinue au point M . On introduit comme plus haut une boule ouverte D autour de M , mais seule la demi-boule $D \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ est utile maintenant. On utilise une fonction test appartenant à $\mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times [0, \infty[)$ à support dans $D \cap (\mathbb{R} \times [0, \infty[)$; on a (cf. (4.4)) :

$$\int_{D \cap (\mathbb{R} \times [0, \infty[)} \left[W \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(W) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] dx dt + \int_{D \cap (\mathbb{R} \times \{0\})} W^0(x) \varphi(x, 0) dx = 0 .$$

L'intégration par parties de cette relation conduit à :

$$(4.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} - \int_{D_g \cup D_d} \left(\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \right) \varphi dx dt \\ - \int_{\Sigma \cap D} [n_t(W_d - W_g) + n_x(f(W_d) - f(W_g))] \varphi(x, t) d\gamma \\ + \int_{[D_g \cap (\mathbb{R} \times \{0\})] \cup [D_d \cap (\mathbb{R} \times \{0\})]} [W^0(x) - W(x, 0)] \varphi(x, 0) dx = 0 , \\ \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times [0, \infty[)^N \quad \text{supp } \varphi \subset D \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+) . \end{array} \right.$$

On suppose la boule D choisie assez petite de sorte que la portion de courbe passant par M est identique à $\Sigma \cap D$. Par suite, la fonction $W(\bullet, \bullet)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $D_g \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$ et $D_d \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$; compte tenu de la proposition 2, elle vérifie donc la condition initiale (4.1). On a vu plus haut que W vérifie l'équation (1.1) sous forme classique dans $D_g \cup D_d$. Il résulte des deux remarques qui précèdent que seule l'intégrale $\int_{\Sigma \cap D}$ est non nulle au sein de la relation (4.16) et la relation (4.14) est établie à nouveau dans ce cas particulier.

- Réciproquement si W , fonction de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, satisfait les conditions (i) et (ii), un calcul à l'envers des intégrations par parties précédentes montre que la relation (4.4) est vraie, et $W(\bullet, \bullet)$ est solution faible du problème de Cauchy (1.1) (4.1). \square

- Dans le cas particulier de l'équation de Burgers, la relation de Rankine-Hugoniot prend la forme $\frac{1}{2}(u_d^2 - u_g^2) = \sigma(u_d - u_g)$. Par suite ou bien $u_d = u_g$ et il n'y a pas de discontinuité, ou bien

$$(4.15) \quad \sigma = \frac{1}{2}(u_g + u_d) \quad (\text{Burgers}).$$

La vitesse de l'onde de choc est directement explicitable à partir des valeurs de part et d'autre de celle-ci.

- Nous pouvons maintenant construire une solution faible du problème de Cauchy (1.1) (4.1) à valeurs initiales **discontinues**, par exemple

$$(4.16) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u^0(x) \equiv \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

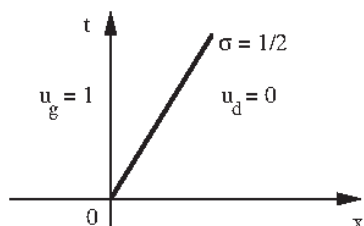


Figure 7. Choc pour l'équation de Burgers.

- La discontinuité proposée en (4.16) génère un choc de vitesse initiale $\sigma = 1/2$ qui se propage sans modification de sa célérité. La fonction $u(\bullet, \bullet)$ définie par

$$(4.17) \quad u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < t/2 \\ 0 & \text{si } x > t/2, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0$$

est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, est solution de l'équation de Burgers et de la condition initiale en tous les points où elle est régulière. Elle vérifie de plus la condition de Rankine-Hugoniot (4.12) en tous les points où elle est discontinue. C'est donc une solution faible du problème de Cauchy en vertu du théorème 2.

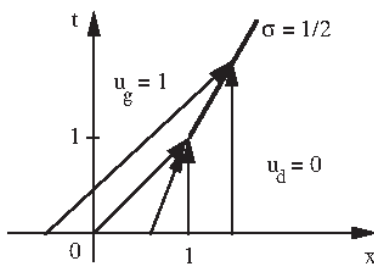


Figure 8. Focalisation d'un choc pour l'équation de Burgers.
Les caractéristiques sont "avalées" par le choc.

- Cette solution particulière permet de prolonger l'exemple donné en (3.7) (3.8) et à la figure 3. A l'instant $t = 1$, la valeur de la solution candidate $u(x, 1)$ par la méthode des caractéristiques est discontinue : $u(x, 1) = 1$ si $x < 1$, $u(x, 1) = 0$ si $x > 1$ et, à un changement de référence du temps et de l'espace près, on retrouve la condition initiale (4.17). Après focalisation (3.8) de la condition initiale décroissante, une discontinuité apparaît au point $(x, t) = (1, 1)$ et se propage ensuite avec la vitesse $\sigma = 1/2$ (Figure 8).

- Nous insistons sur le fait que la relation de saut (4.12) est associée à la forme conservative (1.1) et qu'elle est l'écriture dans le monde des fonctions de classe \mathcal{C}^1 par morceaux de **cette**

loi de conservation et **pas d'une autre**, même si pour les fonctions régulières (de classe \mathcal{C}^1), la loi de conservation (1.1) est équivalente à une autre loi de conservation. L'exemple de l'équation de Burgers est élémentaire pour illustrer le point précédent. Ainsi, l'équation de Burgers s'écrit sous la forme conservative suivante :

$$(4.18) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0$$

et conduit à une vitesse de choc $\sigma(u_g, u_d)$ calculée à la relation (4.5). Sous forme non conservative, l'équation (4.18) s'écrit

$$(4.19) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Après multiplication de (4.19) par u^2 et quelques manipulations algébriques élémentaires, il vient :

$$(4.20) \quad \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial t} (u^3) + \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x} (u^4) = 0$$

et cette relation est une nouvelle forme conservative de l'équation de Burgers qui n'est **pas** équivalente à (4.18). En effet la vitesse $\tilde{\sigma}(u_g, u_d)$ d'un choc entre u_g et u_d issue de la relation de Rankine-Hugoniot associée à la loi de conservation (4.20) s'écrit $\frac{1}{4} [u^4] = \frac{1}{3} \tilde{\sigma} [u^3]$, soit

$$(4.21) \quad \tilde{\sigma} = \frac{3}{4} \frac{u_g^2 + u_d^2}{u_g^2 + u_g u_d + u_d^2} (u_g + u_d),$$

relation **différente** de (4.15) !

- Nous retenons de la discussion précédente le fait que lorsqu'on manipule les solutions faibles, la **forme conservative** (1.1) est première. C'est ce qu'on a vu pour la dynamique des gaz : les équations sous forme conservative ne sont que l'écriture algébrique de la conservation physique de la masse, de l'impulsion, de l'énergie et pas d'autres grandeurs !

5) Non unicité des solutions faibles

- Nous étudions à nouveau un problème de Cauchy pour l'équation de Burgers, voisin (en apparence) de (4.16) :

$$(5.1) \quad u^0(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0. \end{cases}$$

La méthode des caractéristiques permet de transporter u^0 le long du domaine d'espace représenté figure 9. Toutefois, un "trou" apparaît dans le secteur angulaire $0 \leq \frac{x}{t} \leq 1$.

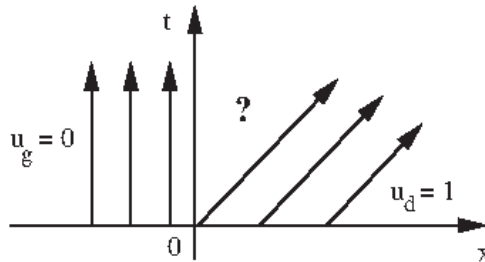


Figure 9. Problème de Cauchy associé à des caractéristiques "fuyantes".

- Une première construction possible est de remarquer que la condition initiale (5.1) est **invariante** par homothétie de rapport $\lambda > 0$:

$$(5.2) \quad u^0(\lambda x) = u^0(x), \quad \lambda > 0, \quad x \neq 0.$$

Par ailleurs toute loi de conservation (1.1) est invariante par dilatation d'espace-temps.

- **Proposition 3. Invariance d'échelle d'une loi de conservation.**

Soit $\lambda > 0$, T_λ la transformation de l'espace-temps définie par

$$(5.3) \quad T_\lambda(x, t) = (\lambda x, \lambda t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0,$$

$W \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty])^N$ une solution faible du problème de Cauchy (1.1) (4.1) qui vérifie donc la relation (4.4), et $T_\lambda W$ la fonction définie par

$$(5.4) \quad (T_\lambda W)(x, t) = W(T_\lambda(x, t)), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0.$$

Alors $(T_\lambda W)$ est solution faible de la loi de conservation (4.4).

Preuve de la proposition 3.

- On remarque que $T_\lambda W(\bullet)$ appartient clairement à $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty])^N$ si c'est le cas pour $W(\bullet)$ et on considère, pour $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times [0, \infty])$, l'expression associée à la relation (4.4) :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R} \times [0, \infty[} [(T_\lambda W) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(T_\lambda W) \frac{\partial \varphi}{\partial x}] dx dt + \int_{\mathbb{R}} (T_\lambda W^0)(x) \varphi(x, 0) dx \\ &= \int_{\mathbb{R} \times [0, \infty[} (W(\lambda x, \lambda t) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(W(\lambda x, \lambda t)) \frac{\partial \varphi}{\partial x}) dx dt + \int_{\mathbb{R}} W^0(\lambda x) \varphi(x, 0) dx \\ &= \int_{\mathbb{R} \times [0, \infty[} \left[W(x', t') \frac{\partial \varphi}{\partial t} \left(\frac{x'}{\lambda}, \frac{t'}{\lambda} \right) + f(W(x', t')) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(\frac{x'}{\lambda}, \frac{t'}{\lambda} \right) \right] \frac{dx' dt'}{\lambda^2} \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}} W^0(x') \varphi \left(\frac{x'}{\lambda}, 0 \right) \frac{dx'}{\lambda} \end{aligned}$$

avec le changement de variables $x' = \lambda x$ et $t' = \lambda t$. On pose $\psi(\xi, \theta) = \varphi \left(\frac{\xi}{\lambda}, \frac{\theta}{\lambda} \right)$ et $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times [0, \infty])^N$ équivaut à la propriété $\psi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times [0, \infty])^N$ si $\lambda > 0$. On a de plus $\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(\frac{\xi}{\lambda}, \frac{\theta}{\lambda} \right)$ et $\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \left(\frac{\xi}{\lambda}, \frac{\theta}{\lambda} \right)$. Il vient alors

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R} \times [0, \infty[} [(T_\lambda W) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(T_\lambda W) \frac{\partial \varphi}{\partial x}] dx dt + \int_{\mathbb{R}} (T_\lambda W^0)(x) \varphi(x, 0) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R} \times [0, \infty[} \left[W(x', t') \lambda \frac{\partial \psi}{\partial t'} + f(W(x', t')) \lambda \frac{\partial \psi}{\partial x'} \right] \frac{dx' dt'}{\lambda^2} + \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}} W^0(x') \psi(x', 0) \frac{dx'}{\lambda} \end{aligned}$$

et cette expression est toujours nulle si W est solution faible du problème de Cauchy (1.1) (4.1). \square

- Il est donc naturel, si $u(\bullet, \bullet)$ est solution de l'équation de Burgers dont la condition initiale satisfait (5.2), d'introduire la solution u_λ associée à (5.4) :

$$(5.5) \quad u_\lambda(x, t) = u(\lambda x, \lambda t), \quad \lambda > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0.$$

La fonction $u_\lambda(\bullet, \bullet)$ est solution faible si u l'est et, compte tenu de l'invariance par dilatation de la condition initiale, elle a même condition initiale que u^0 :

$$(5.6) \quad u_\lambda(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \lambda > 0.$$

Si le problème de Cauchy (même sous forme faible) a une solution unique, la condition (5.6) implique que u_λ , solution de la **même** équation que u avec la **même** condition initiale que u , est **égale** à u . La solution u est **autosemblable** :

$$(5.7) \quad u(x, t) = u(\lambda x, \lambda t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad \lambda > 0.$$

• **Définition 2. Solution autosemblable.**

Une solution faible $W \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty[^N$ de la loi de conservation (1.1) est autosemblable si il existe $V \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R})^N$ de sorte que

$$(5.8) \quad W(x, t) = V\left(\frac{x}{t}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

• Dans le cas de l'équation de Burgers, les solutions autosemblables continues sont appelées **ondes de détente**. La représentation (5.8) au sein de (4.21) s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} \left[v\left(\frac{x}{t}\right) \right] + v \frac{\partial}{\partial x} \left[v\left(\frac{x}{t}\right) \right] = -\frac{x}{t^2} v' + v \frac{1}{t} v' = \frac{1}{t} \left(-\frac{x}{t} + v\left(\frac{x}{t}\right) \right) v'.$$

Une solution autosemblable de l'équation de Burgers est constante (cas à ne pas négliger !) ou bien vérifie

$$(5.9) \quad u(x, t) = \frac{x}{t}.$$

• La solution (5.9) est utilisée pour "recoller" les deux morceaux de solution que l'on ne peut pas traiter la méthode des caractéristiques (cf. figure 9). Il vient

$$(5.10) \quad u(x, t) = \begin{cases} 0 & \frac{x}{t} < 0 \\ \frac{x}{t} & 0 \leq \frac{x}{t} \leq 1 \\ 1 & \frac{x}{t} > 1. \end{cases}$$

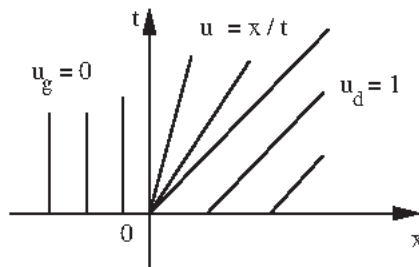


Figure 10. Onde de détente pour l'équation de Burgers.

• On vérifie facilement que la fonction (5.10), appartient à $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R} \times]0, \infty[)$ (elle est même bornée), est continue et est solution faible de l'équation de Burgers (elle est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux) ; le seul point à regarder avec soin est le voisinage de $(0, 0)$, ce que nous laissons au lecteur à titre d'exercice.

- Mais, dans notre recherche de solution unique via l'invariance d'échelle d'une loi de conservation, nous venons de construire une **nouvelle solution faible** de l'équation de Burgers ! En effet, l'exemple (4.16) ne diffère de (4.28) (5.4) que par l'échange de u_g et u_d entre la gauche et la droite. La fonction $\tilde{u}(\bullet)$ directement inspirée de (4.19), c'est-à-dire

$$(5.11) \quad \tilde{u}(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{x}{t} < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } \frac{x}{t} > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

est encore solution faible comme l'illustrent le théorème 2 et la figure 7.

- Nous avons construit dans ce chapitre la notion mathématique de solution faible d'une loi de conservation pour ne pas être bloqué par les contraintes de dérivabilité inhérentes aux solutions classiques. Ceci nous a permis, *via* les relations de saut de Rankine-Hugoniot, de construire des **solutions discontinues d'une loi de conservation**. Toutefois, les ondes de détente sont également une classe naturelle de solutions faibles seulement continues. Dans certains cas, les **deux** types d'ondes (de solutions), à savoir les ondes de détentes et les ondes de chocs peuvent coexister et, à ce stade de la théorie, l'**unicité** du problème de Cauchy n'est pas satisfaite.

Entropie mathématique

1) Loi de conservation supplémentaire

- Nous gardons en tête l'exemple des équations d'Euler de la dynamique des gaz

$$(1.1) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(W) + \frac{\partial}{\partial y} g(W) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, t > 0, W \in \Omega$$

avec

$$(1.2) \quad W = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E)^t, \quad \rho > 0$$

$$(1.3) \quad \rho E = \rho e + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2), \quad e > 0$$

$$(1.4) \quad p = (\gamma - 1) \rho e, \quad \gamma > 1$$

$$(1.5) \quad f(W) = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho u v, \rho u E + p u)^t$$

$$(1.6) \quad g(W) = (\rho v, \rho u v, \rho v^2 + p, \rho v E + p v)^t.$$

Nous avons vu (proposition 1 du chapitre sur les modèles hyperboliques) que si on pose

$$(1.7) \quad s = C_v \log \left(\frac{p}{K \rho^\gamma} \right), \quad K > 0, C_v > 0,$$

alors l'entropie spécifique s est transportée par le mouvement :

$$(1.8) \quad \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} + v \frac{\partial s}{\partial y} = 0.$$

Compte tenu de la loi de conservation de la masse

$$(1.9) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0$$

nous pouvons réécrire l'équation (1.8) sous forme **conservative** :

$$(1.10) \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u s) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v s) = 0.$$

Les mathématiciens (depuis Godunov en 1961 puis Friedrichs et Lax en 1971) introduisent l'**entropie mathématique** $\Omega \ni W \mapsto \eta(W) \in \mathbb{R}$ par la relation

$$(1.11) \quad \eta(W) = -\rho s$$

et les **flux d'entropie** correspondants :

$$(1.12) \quad \xi(W) = -\rho u s$$

$$(1.13) \quad \zeta(W) = -\rho v s$$

et on a la

- **Proposition 1. Conservation de l'entropie.**

Pour le système (1.1) – (1.6) des équations d'Euler du gaz parfait polytropique, il existe une fonction **strictement convexe** $\eta(\bullet)$ donnée par les relations (1.6) et (1.11) et des flux d'entropie $\Omega \ni W \mapsto (\xi(W), \zeta(W)) \in \mathbb{R}^2$ calculés aux relations (1.12) et (1.13) de sorte que toute solution régulière $\mathbb{R} \times [0, \infty[\ni (x, t) \mapsto W(x, t) \in \Omega$ de (1.1) satisfait à la loi de conservation supplémentaire

$$(1.14) \quad \frac{\partial}{\partial t}\eta(W) + \frac{\partial}{\partial x}\xi(W) + \frac{\partial}{\partial y}\zeta(W) = 0.$$

Preuve de la proposition 1.

• Compte tenu de ce qui a été dit plus haut, le seul point non banal est de vérifier que l'application $\Omega \ni W \mapsto \eta(W) \in \mathbb{R}$ est une fonction **strictement convexe** de l'argument W sur l'ensemble

$$(1.15) \quad \Omega = \left\{ (\rho, q, r, \mathcal{E})^t, \rho > 0, \rho e \equiv \mathcal{E} - \frac{1}{2\rho}(q^2 + r^2) > 0 \right\}.$$

Rappelons d'abord que l'ensemble Ω est bien convexe. Ceci résulte de la convexité de l'application

$$(1.16) \quad]0, \infty[\times \mathbb{R}^2 \ni (\rho, q, r) \mapsto \varphi(\rho, q, r) = \frac{1}{2\rho}(q^2 + r^2) \in [0, \infty[.$$

On a en effet

$$(1.17) \quad d\varphi(\rho, q, r) = -\frac{1}{2\rho^2}(q^2 + r^2)d\rho + \frac{q}{\rho}dq + \frac{r}{\rho}dr$$

$$(1.18) \quad d^2\varphi(\rho, q, r) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho^3}(q^2 + r^2) & -\frac{q}{\rho^2} & -\frac{r}{\rho^2} \\ -\frac{q}{\rho^2} & \frac{1}{\rho} & 0 \\ -\frac{r}{\rho^2} & 0 & \frac{1}{\rho} \end{pmatrix}$$

qui définit une matrice positive puisque le terme $(d^2\varphi)_{33}$ est positif (strictement), le mineur $\det[d^2\varphi]_{2 \leq i \leq 3, 2 \leq j \leq 3}$ est également strictement positif et $\det(d^2\varphi) = 0$.

• On rappelle que l'entropie $\eta(\bullet)$ est donnée par la relation

$$(1.19) \quad \eta(W) = -\rho C_v \log \left[\frac{\gamma - 1}{K} \left\{ \frac{\rho E - \frac{1}{2\rho}[(\rho u)^2 + (\rho v)^2]}{\rho^\gamma} \right\} \right]$$

et nous souhaitons du courage au lecteur qui entreprend de démontrer directement que la matrice hessienne $d^2\eta$ est définie positive. Nous préférons utiliser les connaissances classiques de **thermostatique** (voir par exemple H. Callen [Thermodynamics and an introduction to thermostatics, John Wiley & Sons, seconde édition, 1985]).

• Pour un système physique de masse M , volume V et énergie interne ϵ , l'**entropie physique** S est une fonction $\Sigma(\bullet)$ homogène de degré 1 de ces trois champs : $[0, \infty[^3 \ni (M, V, \epsilon) \mapsto S = \Sigma(M, V, \epsilon) \in \mathbb{R}$

$$(1.20) \quad \Sigma(\lambda M, \lambda V, \lambda \epsilon) = \lambda \Sigma(M, V, \epsilon), \quad \lambda, M, V, \epsilon \geq 0$$

qui est de plus **concave**, comme le rappellent par exemple Landau et Lifchitz [Physique statistique, Mir, 1953] :

$$(1.21) \quad \begin{cases} \Sigma((1-\theta)M_1 + \theta M_2, (1-\theta)V_1 + \theta V_2, (1-\theta)\epsilon_1 + \theta\epsilon_2) \\ \geq (1-\theta)\Sigma(M_1, V_1, \epsilon_1) + \theta\Sigma(M_2, V_2, \epsilon_2); \quad 0 \leq \theta \leq 1. \end{cases}$$

Dans le cas du gaz parfait polytropique de rapport γ de chaleurs spécifiques, on a (dans un cadre statique, *i.e.* sans champ de vitesse) :

$$(1.22) \quad \Sigma(M, V, \epsilon) = M C_v \log \left[\frac{\gamma - 1}{K} \frac{V^{\gamma-1}}{M^\gamma} \epsilon \right].$$

On dérive une fois la fonction $\Sigma(\bullet)$:

$$(1.23) \quad d\Sigma = C_v \left\{ \left(\frac{\Sigma}{MC_v} - \gamma \right) dM + (\gamma - 1) \frac{M}{V} dV + \frac{M}{\epsilon} d\epsilon \right\}$$

et par identification avec la relation thermodynamique classique

$$(1.24) \quad d\epsilon \equiv \mu dM - p dV + T dS$$

qui introduit le potentiel chimique massique μ , la pression p et la température T , il vient

$$(1.25) \quad \frac{p}{T} = (\gamma - 1) C_v \frac{M}{V}$$

$$(1.26) \quad \frac{1}{T} = \frac{1}{\epsilon} MC_v \geq 0$$

relations qui redonnent bien la loi (1.4) mais de plus la **positivité de la température**.

• On dérive maintenant la relation (1.23). Il vient :

$$(1.27) \quad d^2\Sigma = \frac{1}{C_v} \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{M} & \frac{\gamma-1}{V} & \frac{1}{\epsilon} \\ \frac{\gamma-1}{V} & -(\gamma-1) \frac{M}{V^2} & 0 \\ \frac{1}{\epsilon} & 0 & -\frac{M}{\epsilon^2} \end{pmatrix}$$

et, comme on l'a fait pour $d^2\varphi$, cette matrice est positive, de rang 2 et son noyau est engendré par le vecteur $(M, V, \epsilon)^t$ puisque Σ est homogène de degré 1 :

$$(1.28) \quad \ker d^2\Sigma(M, V, \epsilon) = \mathbb{R}(M, V, \epsilon)^t.$$

L'entropie mathématique $\eta(\bullet)$ s'exprime très facilement en fonction de l'entropie physique $\Sigma(\bullet)$:

$$(1.29) \quad \eta(\rho, q, r, \mathcal{E}) = -\Sigma\left(\rho, 1, \mathcal{E} - \frac{1}{2\rho}(q^2 + r^2)\right).$$

• La convexité de $\eta(\bullet)$ résulte de la **concavité** de Σ et de la **positivité de la température**, comme le montre le calcul qui suit :

$$\begin{aligned} \eta((1-\theta)W_1 + \theta W_2) &= \\ &= -\Sigma\left((1-\theta)\rho_1 + \theta\rho_2, 1, \right. \\ &\quad \left. (1-\theta)\mathcal{E}_1 + \theta\mathcal{E}_2 - \frac{1}{2}\varphi((1-\theta)\rho_1 + \theta\rho_2, (1-\theta)q_1 + \theta q_2, (1-\theta)r_1 + \theta r_2)\right) \\ &= -\Sigma\left((1-\theta)\rho_1 + \theta\rho_2, 1, \right. \\ &\quad \left. (1-\theta)\mathcal{E}_1 + \theta\mathcal{E}_2 - \frac{1}{2}\varphi((1-\theta)\rho_1 + \theta\rho_2, (1-\theta)q_1 + \theta q_2, (1-\theta)r_1 + \theta r_2)\right) \\ &+ \Sigma\left((1-\theta)\rho_1 + \theta\rho_2, 1, (1-\theta)\mathcal{E}_1 + \theta\mathcal{E}_2 - (1-\theta)\varphi(\rho_1, q_1, r_1) - \theta\varphi(\rho_2, q_2, r_2)\right) \\ &- \Sigma\left((1-\theta)\rho_1 + \theta\rho_2, 1, (1-\theta)\mathcal{E}_1 + \theta\mathcal{E}_2 - (1-\theta)\varphi(\rho_1, q_1, r_1) - \theta\varphi(\rho_2, q_2, r_2)\right) \\ &\leq -\Sigma\left((1-\theta)\rho_1 + \theta\rho_2, 1, (1-\theta)\mathcal{E}_1 + \theta\mathcal{E}_2 - (1-\theta)\varphi(\rho_1, q_1, r_1) - \theta\varphi(\rho_2, q_2, r_2)\right) \end{aligned}$$

car $\varphi(\bullet)$ est convexe et $\Sigma(\rho, 1, \bullet)$ est croissante car la température est positive. Donc, comme $\Sigma(\bullet)$ est concave,

$$\begin{aligned} \eta((1-\theta)W_1 + \theta W_2) &\leq -(1-\theta)\Sigma(\rho_1, 1, \mathcal{E}_1 - \varphi(\rho_1, q_1, r_1)) - \theta\Sigma(\rho_2, 1, \mathcal{E}_2 - \varphi(\rho_2, q_2, r_2)) \\ &= (1-\theta)\eta(W_1) + \theta\eta(W_2) \end{aligned}$$

et la convexité (large) de l'entropie $\eta(\bullet)$ est établie.

• Il reste à démontrer que $\eta(\bullet)$ est **strictement** convexe. On introduit $W_1 \neq W_2$ et $\theta \in]0, 1[$ de sorte que

$$(1.30) \quad \eta((1-\theta)W_1 + \theta W_2) = (1-\theta)\eta(W_1) + \theta\eta(W_2), \quad 0 < \theta < 1.$$

Comme $\eta(\bullet)$ est convexe sur l'intervalle $[W_1, W_2] \subset \Omega$, l'égalité (1.30) a nécessairement lieu pour **tout** $\theta \in [0, 1]$. Par suite, dans la chaîne d'inégalités précédentes, on est toujours dans le cas d'**égalité**, et on déduit

$$(1.31) \quad \begin{cases} \varphi((1-\theta)\rho_1 + \theta\rho_2, (1-\theta)q_1 + \theta q_2, (1-\theta)r_1 + \theta r_2) = \\ = (1-\theta)\varphi(\rho_1, q_1, r_1) + \theta\varphi(\rho_2, q_2, r_2), \end{cases}$$

$$(1.32) \quad \begin{cases} \Sigma((1-\theta)\rho_1 + \theta\rho_2, 1, (1-\theta)\varphi_1 + \theta\varphi_2) = \\ = (1-\theta)\Sigma(\rho_1, 1, \varphi_1) + \theta\Sigma(\rho_2, 1, \varphi_2) \end{cases}$$

pour **tout** $\theta \in [0, 1]$, avec $\varphi_1 = \varphi(\rho_1, q_1, r_1)$, $\varphi_2 = \varphi(\rho_2, q_2, r_2)$ et $\varphi(\bullet)$ définie à la relation (1.16).

• Nous exploitons la relation (1.31) qui a lieu sur le segment $\{(\rho_1, q_1, r_1) + \theta(\rho_2 - \rho_1, q_2 - q_1, r_2 - r_1), 0 \leq \theta \leq 1\}$. En dérivant deux fois dans la direction de segment, on a :

$$(1.33) \quad \begin{cases} d^2\varphi((1-\theta)\rho_1 + \theta\rho_2, (1-\theta)q_1 + \theta q_2, (1-\theta)r_1 + \theta r_2) \bullet \\ \bullet((\rho_2 - \rho_1, q_2 - q_1, r_2 - r_1), (\rho_2 - \rho_1, q_2 - q_1, r_2 - r_1)) = 0, \end{cases}$$

ce qui montre que le vecteur incrément $(\rho_2 - \rho_1, q_2 - q_1, r_2 - r_1)$ est en tout point colinéaire au vecteur propre de $d^2\varphi$ associé à la valeur propre nulle. Comme on a

$$(1.34) \quad \ker d^2\varphi(\rho, q, r) = \mathbb{R}(\rho, q, r),$$

on tire du point précédent :

$$(1.35) \quad \forall \theta \in]0, 1[, \exists \alpha \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} \rho_2 - \rho_1 \\ q_2 - q_1 \\ r_2 - r_1 \end{pmatrix} = \alpha \left[(1-\theta) \begin{pmatrix} \rho_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{pmatrix} + \theta \begin{pmatrix} \rho_2 \\ q_2 \\ r_2 \end{pmatrix} \right].$$

On déduit de la relation (1.35) l'égalité $(1-\alpha\theta)(\rho_2 - \rho_1) = \alpha\rho_1$. Si $\rho_2 = \rho_1$, alors $\alpha = 0$ ($\rho_1 > 0$) et $q_2 = q_1, r_2 = r_1$ d'après (1.35), donc

$$(1.36) \quad u_2 = u_1, \quad v_2 = v_1,$$

et $W_2 = W_1$. Si $\rho_2 \neq \rho_1$, on ne peut avoir $\alpha = 1/\theta$ car alors α est également nul. On tire donc de (1.35)

$$(1.37) \quad (\rho_2, q_2, r_2) = \left(1 + \frac{\alpha}{1-\alpha\theta}\right)(\rho_1, q_1, r_1)$$

et l'identité $q \equiv \rho u, r \equiv \rho v$ montre que la relation (1.36) a lieu encore dans ce cas.

• On exploite maintenant la relation (1.32) sur le segment $[(\rho_1, q_1, \varphi_1), (\rho_2, q_2, \varphi_2)]$. On a de manière analogue à (1.33) :

$$(1.38) \quad \begin{cases} d^2\Sigma((1-\theta)\rho_1 + \theta\rho_2, 1, (1-\theta)\epsilon_1 + \theta\epsilon_2 - ((1-\theta)\varphi_1 + \theta\varphi_2)) \\ \bullet((\rho_2 - \rho_1, 0, (\epsilon_2 - \epsilon_1) - (\varphi_2 - \varphi_1)), (\rho_2 - \rho_1, 0, (\epsilon_2 - \epsilon_1) - (\varphi_2 - \varphi_1))) = 0. \end{cases}$$

S'il est non nul, le vecteur $(\rho_2 - \rho_1, 0, (\epsilon_2 - \epsilon_1) - (\varphi_2 - \varphi_1))$ est colinéaire à $((1 - \theta)\rho_1 + \theta\rho_2, 1, (1 - \theta)(\epsilon_1 - \varphi_1) + \theta(\epsilon_2 - \varphi_2))$, compte-tenu de (1.28). Donc ce vecteur est nul. Les états W_1 et W_2 vérifient la relation (1.36) ainsi que $\rho_1 = \rho_2$ et $\varphi_1 = \varphi_2$, donc $\epsilon_2 = \epsilon_1$. Ces deux vecteurs sont donc égaux, ce qui établit la contradiction et la propriété demandée. \square

• De manière générale, nous pouvons chercher à **quelle condition** sur le triplet (η, ξ, ζ) (cf. les relations (1.1) à (1.13) dans le cas de la dynamique des gaz), on dispose d'une loi de conservation supplémentaire (1.14) si $W(\bullet)$ est solution d'une loi de conservation de type (1.1). On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \xi(W) + \frac{\partial}{\partial y} \zeta(W) &= d\eta(W) \bullet \frac{\partial W}{\partial t} + d\xi(W) \bullet \frac{\partial W}{\partial x} + d\zeta(W) \bullet \frac{\partial W}{\partial y} \\ &= d\eta(W) \bullet \left[\frac{\partial W}{\partial t} + df(W) \bullet \frac{\partial W}{\partial x} + dg(W) \bullet \frac{\partial W}{\partial y} \right] \\ &\quad + [d\zeta(W) - d\eta(W) \bullet df(W)] \frac{\partial W}{\partial x} + [d\zeta(W) - d\eta(W) \bullet dg(W)] \frac{\partial W}{\partial y}. \end{aligned}$$

La première ligne est nulle si $W(\bullet)$ est solution de (1.1) et les deux dernières le sont si on a les relations suivantes entre l'entropie $\eta(\bullet)$ et les flux d'entropie $\xi(\bullet)$ et $\zeta(\bullet)$:

$$(1.39) \quad d\xi(W) = d\eta(W) \bullet df(W)$$

$$(1.40) \quad d\zeta(W) = d\eta(W) \bullet dg(W).$$

Ces considérations motivent la définition qui suit.

• **Définition 1. Entropie mathématique.**

Soit Ω un ouvert convexe de \mathbb{R}^N , $\Omega \ni W \mapsto (f(W), g(W)) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ deux fonctions de flux relatives à la loi de conservation (1.1). Une fonction $\Omega \ni W \mapsto \eta(W) \in \mathbb{R}$ **strictement convexe** est une **entropie** mathématique pour la loi de conservation (1.1) si et seulement si il existe deux flux d'entropie $\Omega \ni W \mapsto (\xi(W), \zeta(W)) \in \mathbb{R}^2$ tels que (1.39) et (1.40) ont lieu. Toute solution régulière de (1.1) vérifie alors la loi de conservation supplémentaire (1.14).

• Une conséquence intéressante de l'existence d'une entropie pour un système de lois de conservations, est l'hyperbolicité.

• **Proposition 2. Hyperbolicité.**

Soit (1.1) un système de lois de conservations qui possède une entropie au sens de la définition 1. Alors le système (1.1) est hyperbolique : pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$ la matrice

$$(1.41) \quad A(W, \theta) = (\cos \theta) df(W) + (\sin \theta) dg(W), \quad W \in \Omega$$

est **diagonalisable** sur le corps des réels.

Preuve de la proposition 2.

• Il s'agit essentiellement de tirer les conséquences du fait que $d\eta(W) \bullet df(W)$ est la différentielle d'une fonction :

$$(1.42) \quad \sum_{j=1}^N \frac{\partial \eta}{\partial W_j} \frac{\partial f_j(W)}{\partial W_i} = \frac{\partial \xi}{\partial W_i}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad \forall W \in \Omega.$$

On dérive une seconde fois l'identité (1.41) et on utilise l'identité de Schwarz d'égalité des dérivées croisées $\frac{\partial^2 \xi}{\partial W_i \partial W_k} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial W_k \partial W_i}$:

$$\sum_j \frac{\partial^2 \eta}{\partial W_j \partial W_k} \frac{\partial f_j}{\partial W_i} + \sum_j \frac{\partial \eta}{\partial W_j} \frac{\partial^2 f_j}{\partial W_i \partial W_k} = \sum_j \frac{\partial^2 \eta}{\partial W_j \partial W_i} \frac{\partial f_j}{\partial W_k} + \sum_j \frac{\partial \eta}{\partial W_j} \frac{\partial^2 f_j}{\partial W_k \partial W_i} .$$

Compte tenu de la propriété de Schwarz pour la fonction $f_j(\bullet)$, *i.e.* $\frac{\partial^2 f_j}{\partial W_i \partial W_k} = \frac{\partial^2 f_j}{\partial W_k \partial W_i}$,

il vient

$$(1.43) \quad \sum_j \frac{\partial^2 \eta}{\partial W_j \partial W_k} \frac{\partial f_j}{\partial W_i} = \sum_j \frac{\partial^2 \eta}{\partial W_j \partial W_i} \frac{\partial f_j}{\partial W_k} .$$

La relation (1.42) exprime que la matrice $F(W)$ de composantes

$$(1.44) \quad F_{ik}(W) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 \eta}{\partial W_j \partial W_k} \frac{\partial f_j(W)}{\partial W_i}, \quad W \in \Omega$$

est **symétrique** :

$$(1.45) \quad F(W) = F(W)^t, \quad W \in \Omega$$

et il en est de même de la matrice G définie par

$$(1.46) \quad G_{ij} \equiv \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 \eta}{\partial W_i \partial W_k} \frac{\partial g_k}{\partial W_j}, \quad W \in \Omega$$

$$(1.47) \quad G(W) = G(W)^t, \quad W \in \Omega .$$

on note également H la matrice hessienne de l'entropie mathématique $\eta(\bullet)$:

$$(1.48) \quad H(W)_{ij} = \frac{\partial^2 \eta(W)}{\partial W_i \partial W_j}, \quad W \in \Omega$$

Elle est symétrique définie positive ainsi que sa matrice inverse H^{-1} :

$$(1.49) \quad H^{-1}(W) = (H^{-1})^t(W), \quad W \in \Omega .$$

On tire de (1.44) et (1.48) :

$$(1.50) \quad H(W) \bullet df(W) = F(W), \quad W \in \Omega$$

d'où

$$(1.51) \quad df(W) = H^{-1}(W) \bullet F(W), \quad W \in \Omega$$

avec $H^{-1}(W)$ symétrique définie positive car $\eta(\bullet)$ est strictement convexe et $F(W)$ est symétrique. On a de même, compte tenu de (1.45) et (1.47) :

$$(1.52) \quad dg(W) = H^{-1}(W) \bullet G(W), \quad W \in \Omega .$$

• On introduit une racine carrée de $H^{-1}(W)$ par décomposition de $H^{-1}(W)$ dans une base orthogonale pour le produit scalaire de \mathbb{R}^N :

$$(1.53) \quad H^{-1}(W) = P^{-1}(W) \bullet \Lambda(W) \bullet P(W), \quad W \in \Omega ,$$

Λ diagonale à éléments strictement positifs, donc

$$(1.54) \quad \sqrt{H^{-1}(W)} = P^{-1}(W) \bullet \Lambda^{1/2}(W) \bullet P(W), \quad W \in \Omega$$

avec

$$(1.55) \quad \Lambda_{ij}^{1/2}(W) = \sqrt{\Lambda_{ij}(W)}, \quad i \leq i, j \leq N, \quad W \in \Omega$$

on a bien clairement :

$$(1.56) \quad H^{-1}(W) = \sqrt{H^{-1}(W)} \bullet \sqrt{H^{-1}(W)}.$$

on déduit alors de (1.51), et (1.51)

$$(1.57) \quad df(W) = \sqrt{H^{-1}(W)} (\sqrt{H^{-1}(W)} \bullet F(W) \bullet \sqrt{H^{-1}(W)}) (\sqrt{H^{-1}(W)})^{-1}$$

$$(1.58) \quad dg(W) = \sqrt{H^{-1}(W)} (\sqrt{H^{-1}(W)} \bullet G(W) \bullet \sqrt{H^{-1}(W)}) (\sqrt{H^{-1}(W)})^{-1}$$

Les matrices $df(W)$ et $dg(W)$ sont conjuguées de deux matrices symétriques, lesquelles sont diagonalisables ; donc elles sont diagonalisables sur le corps des réels. De même pour la matrice $A(W, \theta)$:

$$(1.59) \quad A(W, \theta) = \sqrt{H^{-1}} \bullet (\sqrt{H^{-1}} \bullet (\cos \theta F + \sin \theta G) \bullet \sqrt{H^{-1}}) \bullet (\sqrt{H^{-1}})^{-1},$$

ce qui établit le résultat. \square

• Un système de lois de conservation qui possède une entropie mathématique est toujours hyperbolique, *i.e.* “propage de l’information à vitesse finie”. On dispose dans ce cas d’une forme **symétrique** du système (1.1) des lois de conservation. On pose

$$(1.60) \quad \varphi_i = \frac{\partial \eta(W)}{\partial W_i}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad W \in \Omega.$$

Alors, dans le cas de solutions régulières, le système (1.1) s’écrit aussi

$$(1.61) \quad H^{-1}(W) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + df(W) \bullet H^{-1}(W) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + dg(W) \bullet H^{-1}(W) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

avec des matrices H^{-1} , $df \bullet H^{-1}$ et $dg \bullet H^{-1}$ symétriques (cf. (1.51), (1.52), (1.45) et (1.47)) et H^{-1} symétrique définie positive.

2) Solution entropique d’une loi de conservation

• Nous supposons dans ce paragraphe que $W(\bullet)$ est un champ scalaire (noté u) et nous nous restreignons au cas d’une dimension d’espace. Nous remarquons d’abord que la loi de conservation scalaire

$$(2.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0$$

possède **toujours** une entropie ; on a même mieux puisque toute fonction **strictement convexe** $\mathbb{R} \ni u \mapsto \eta(u) \in \mathbb{R}$ est une entropie mathématique pour la loi de conservation (2.1). Il suffit en effet de poser

$$(2.2) \quad \xi(u) = \int_0^u \eta'(v) f'(v) dv, \quad u \in \mathbb{R}$$

pour trouver un flux d’entropie associé à $\eta(\bullet)$ *via* la relation (1.38). Nous étudions ensuite, pour $\epsilon \rightarrow 0, \epsilon > 0$ le comportement de la solution $u^\epsilon(\bullet)$ de la “perturbation visqueuse” suivante

$$(2.3) \quad \frac{\partial u^\epsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u^\epsilon) - \epsilon \frac{\partial^2 u^\epsilon}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0, u^\epsilon(x, t) \in \mathbb{R}.$$

• **Théorème 1. Limite visqueuse.**

Soit $\eta(\bullet)$ une entropie mathématique pour la loi de conservation scalaire (2.1) de flux associé $\xi(\bullet)$, $(u^\epsilon(\bullet))_{\epsilon>0}$ une famille de solutions (de classe \mathcal{C}^2) de la perturbation visqueuse (2.3), qu'on suppose bornée uniformément dans $L^\infty(\mathbb{R} \times]0, \infty[)$:

$$(2.4) \quad \exists C > 0, \quad \forall \epsilon > 0, \quad \|u^\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times]0, \infty[)} \leq C,$$

avec une constante C est indépendante de $\epsilon > 0$. On suppose que la famille $(u^\epsilon(\bullet))_{\epsilon>0}$ converge presque partout pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times]0, \infty[$ vers une fonction $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times]0, \infty[)$:

$$(2.5) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0, \epsilon > 0} u^\epsilon(x, t) = u(x, t), \quad \text{pp}(x, t) \in \mathbb{R} \times]0, \infty[.$$

Alors $\mathbb{R} \times]0, \infty[\ni (x, t) \mapsto u(x, t) \in \mathbb{R}$ est solution au sens des distributions de la loi de conservation (2.1) et satisfait de plus à l'inégalité d'entropie

$$(2.6) \quad \frac{\partial}{\partial t} \eta(u) + \frac{\partial}{\partial x} \xi(u) \leq 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times]0, \infty[)$$

c'est-à-dire au sens des distributions :

$$(2.7) \quad \int_{\mathbb{R} \times]0, \infty[} \left[\eta(u) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \xi(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] dx dt \geq 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times]0, \infty[), \quad \varphi \geq 0.$$

Preuve de la théorème 1.

• On multiplie la perturbation visqueuse (2.3) par $\eta'(u^\epsilon)$ et compte tenu de (1.38), il vient

$$(2.8) \quad \frac{\partial \eta(u^\epsilon)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \xi(u^\epsilon) = \epsilon \eta'(u^\epsilon) \frac{\partial^2 u^\epsilon}{\partial x^2}.$$

On évalue le membre de droite de la relation (2.8) grâce à une intégration par parties :

$$\epsilon \eta'(u^\epsilon) \frac{\partial^2 u^\epsilon}{\partial x^2} = \epsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\eta(u^\epsilon)) - \epsilon \eta''(u^\epsilon) \left(\frac{\partial u^\epsilon}{\partial x} \right)^2$$

et comme $\eta(\bullet)$ est convexe et $\epsilon > 0$, on a

$$(2.9) \quad \epsilon \eta'(u^\epsilon) \frac{\partial^2 u^\epsilon}{\partial x^2} \leq \epsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \eta(u^2)$$

relation qui, compte tenu de (2.8), entraîne

$$(2.10) \quad \frac{\partial}{\partial t} \eta(u^\epsilon) + \frac{\partial}{\partial x} \xi(u^\epsilon) \leq \epsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} \eta(u^\epsilon), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

On suppose que $u^\epsilon(\bullet)$ vérifie la relation (2.5). On a alors

$$(2.11) \quad u_\epsilon \rightarrow u \quad \text{si } \epsilon \rightarrow 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times]0, \infty[)$$

puis par continuité des opérateurs de dérivation dans \mathcal{D}' (voir par exemple le traité de L. Schwartz [Théorie des distributions, Hermann, 1950]),

$$(2.12) \quad \begin{cases} \frac{\partial u^\epsilon}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} & \text{si } \epsilon \rightarrow 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times]0, \infty[) \\ \frac{\partial^2 u^\epsilon}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{si } \epsilon \rightarrow 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times]0, \infty[) \end{cases}$$

donc

$$(2.13) \quad \epsilon \frac{\partial^2 u^\epsilon}{\partial x^2} \rightarrow 0 \quad \text{si } \epsilon \rightarrow 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times]0, \infty[).$$

• Compte tenu de l'hypothèse (2.4) et de la régularité du flux $\mathbb{R} \ni u \mapsto f(u) \in \mathbb{R}$, la fonction composée $f_\circ u^\epsilon$ est bornée sur $[-C, C]$, donc

$$(2.14) \quad |f(u^\epsilon(x, t))| \leq K, \quad |f(u(x, t))| \leq K, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad \epsilon > 0$$

et pour Ξ partie bornée de $\mathbb{R} \times]0, \infty[$, on a

$$(2.15) \quad f(u^\epsilon(x, t)) \rightarrow f(u(x, t)) \quad \text{pp}(x, t) \in \Xi$$

$$(2.16) \quad |f(u^\epsilon(x, t)) - f(u(x, t))| \leq 2K, \quad \text{pp}(x, t) \in \Xi.$$

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue montre qu'alors

$$(2.17) \quad f(u^\epsilon(x, t)) \rightarrow f(u(x, t)) \quad \text{dans } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times [0, +\infty[).$$

Il en résulte que pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times]0, \infty[)$ arbitraire, on a

$$(2.18) \quad \begin{cases} \int_{\mathbb{R} \times]0, \infty[} \left[u^\epsilon(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(u^\epsilon(x, t)) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \epsilon u^\epsilon(x, t) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right] dx dt \\ \rightarrow \int_{\mathbb{R} \times]0, \infty[} \left[u(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(u(x, t)) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] dx dt, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times]0, \infty[), \end{cases}$$

donc que $u(\bullet)$ est solution de (2.1) au sens des distributions.

• De manière analogue au raisonnement fait pour le flux $f(\bullet)$, on a

$$(2.19) \quad \eta(u^\epsilon) \rightarrow \eta(u) \quad \text{et} \quad \xi(u^\epsilon) \rightarrow \xi(u) \quad \text{dans } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times]0, \infty[).$$

On multiplie l'inégalité (2.10) par φ positive appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R} \times]0, \infty[)$ et on intègre par parties ; il vient

$$(2.20) \quad \begin{cases} \int_{\mathbb{R} \times]0, \infty[} \left[-\eta(u^\epsilon) \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \xi(u^\epsilon) \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \epsilon \eta(u^\epsilon) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right] dx dt \leq 0, \\ \epsilon > 0, \quad \varphi \geq 0, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times]0, \infty[). \end{cases}$$

Puis on fait tendre ϵ vers 0. Compte tenu de (2.19), il vient

$$(2.21) \quad \begin{cases} \int_{\mathbb{R} \times]0, \infty[} \left[\eta(u(x, t)) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \xi(u(x, t)) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] dx dt \geq 0, \\ \varphi \geq 0, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times]0, \infty[) \end{cases}$$

qui établit la relation (2.7), *i.e.* que la relation l'inégalité d'entropie (2.6) a lieu au sens des distributions. \square

Le théorème 1 motive la définition qui suit.

• **Définition 2. Solution entropique d'une loi de conservation.**

Soit $\mathbb{R} \ni x \mapsto u^0(x) \in \mathbb{R}$ une condition initiale ($u^0 \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R})$) et $u(\bullet) \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times [0, \infty[)$ une solution faible de (2.1) associée à la condition initiale

$$(2.22) \quad u(x, t) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

La fonction $u(\bullet)$ est dite **solution entropique** du problème de Cauchy (2.1) (2.22) si pour **toute** entropie mathématique $\eta(\bullet)$ de flux associé $\xi(\bullet)$, on a l'inégalité (2.6) écrite faiblement, *i.e.*

$$(2.23) \quad \begin{cases} \int_{\mathbb{R} \times]0, \infty[} \left[\eta(u(x, t)) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \xi(u(x, t)) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] dx dt \geq 0, \\ \forall \varphi \geq 0, \quad \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times]0, \infty[). \end{cases}$$

L'intérêt de la notion de solution entropique pour le problème de Cauchy est le théorème suivant, dû à Volpert (1967) et Kručkov (1970), et que nous admettons.

• **Théorème 2. Existence et unicité pour le problème de Cauchy.**

On suppose que la fonction de flux $\mathbb{R} \ni u \mapsto f(u) \in \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 et que la condition initiale u^0 appartient à $L^\infty(\mathbb{R})$:

$$(2.24) \quad u^0 \in L^\infty(\mathbb{R}).$$

Alors le problème de Cauchy (2.1) (2.22) a une **unique solution entropique bornée** :

$$(2.25) \quad u \in L^\infty(\mathbb{R} \times]0, \infty[).$$

Cette solution satisfait de plus à l'estimation

$$(2.26) \quad \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times]0, \infty[)} \leq \|u^0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

et on a le principe du maximum suivant : si

$$(2.27) \quad \alpha \leq u^0(x) \leq \beta, \quad \text{pp}(x) \in \mathbb{R},$$

alors

$$(2.28) \quad \alpha \leq u(x, t) \leq \beta, \quad \text{pp}(x) \in \mathbb{R}, \quad \forall t > 0.$$

3) Chocs entropiques

• On s'intéresse maintenant au cas particulier des solutions $u(\bullet, \bullet)$ de classe \mathcal{C}^1 par morceaux : $u(\bullet, \bullet)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $(\mathbb{R} \times]0, \infty[) \setminus \Sigma$, où Σ est une famille finie de courbes régulières admettant un paramétrage de la forme $x = \xi(\theta)$. Dans toute zone de régularité de la solution $(x, t) \mapsto u(x, t) \in \mathbb{R}$, l'inégalité d'entropie est en fait une loi de conservation supplémentaire de la forme $\frac{\partial}{\partial t} \eta(u) + \frac{\partial}{\partial x} \xi(u) = 0$. Le long des courbes de discontinuité, on a la relation de Rankine-Hugoniot

$$(3.1) \quad f(u_d) - f(u_g) = \sigma (u_d - u_g)$$

$$(3.2) \quad \sigma = \frac{d\xi}{d\theta}(t)$$

La condition d'entropie (2.6) impose alors une inégalité supplémentaire.

• **Proposition 3. Inégalité de saut d'entropie.**

Soit $u(\bullet)$ une solution de classe \mathcal{C}^1 par morceaux de la loi de conservation (2.1). Alors $u(\bullet)$ est une solution entropique si et seulement si en tout point $(\xi(\theta), \theta)$ de la ligne de discontinuité Σ , on a l'inégalité

$$(3.3) \quad \xi(u_d) - \xi(u_g) \leq \sigma (\eta(u_d) - \eta(u_g)),$$

pour tout couple entropie-flux (η, ξ) .

Preuve de la proposition 3.

• Elle se traite exactement comme la preuve de la relation de Rankine-Hugoniot (théorème 2 du chapitre sur l'étude mathématique d'une loi de conservation). On écrit la relation (2.23) dans une boule localisée autour du point $(x, t) \in \Sigma$ (figure 1) :

$$\begin{aligned} 0 \leq & \int_{\mathbb{R} \times]0, \infty[} \left[\eta(u) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \xi(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] dx dt \\ & - \int_{D_g \cup D_d} \left[\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right] \varphi dx dt - \int_{\Sigma \cap D} [(\eta(u_d) - \eta(u_g)) n_t + (\xi(u_d) - \xi(u_g)) n_x] \varphi dx dt \end{aligned}$$

$$= \int_{\Sigma} \{ [\eta(u_d) - \eta(u_g)] \sigma - (\xi(u_d) - \xi(u_g)) \} n_x \varphi \, d\gamma$$

qui entraîne, puisque $n_x > 0$ et $\varphi \geq 0$ arbitraire,

$$(3.4) \quad \sigma(\eta(u_d) - \eta(u_g)) - (\xi(u_d) - \xi(u_g)) \geq 0 .$$

i.e. la relation (3.3). □

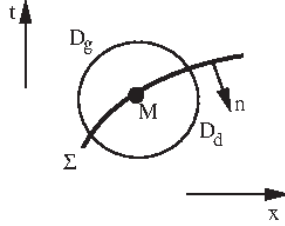


Figure 1. Saut d'entropie le long de la courbe régulière Σ .

- Une discontinuité (u_g, u_d) de part et d'autre d'une courbe régulière Σ est un **choc entropique** si $u_g \neq u_d$ et si la condition (3.1) de Rankine-Hugoniot est satisfaite. Dans le cas où la fonction de flux est strictement convexe (en particulier pour l'équation de Burgers où $f(u) = u^2/2$), on a une caractérisation très simple des chocs entropiques.

- **Proposition 4. Choc entropique pour un flux strictement convexe.** Soit $\mathbb{R} \ni u \mapsto f(u) \in \mathbb{R}$ une fonction de flux de classe \mathcal{C}^1 strictement convexe et $u(\bullet, \bullet)$ une solution de classe \mathcal{C}^1 par morceaux de la loi de conservation (2.1). Le choc (u_g, u_d) au travers d'une ligne de discontinuité Σ est entropique si et seulement si

$$(3.5) \quad u_g \geq u_d .$$

Preuve de la proposition 4.

- On suppose dans un premier temps que la discontinuité (u_g, u_d) est un choc entropique. On fixe une entropie $\eta(\bullet)$ strictement convexe et son flux associé $\xi(\bullet)$ (qui vérifie $\xi' = \eta' \bullet f'$). Comme $u_g \neq u_d$, on peut écrire l'inégalité (3.3) en utilisant la relation (3.1) de Rankine-Hugoniot :

$$(3.6) \quad \frac{f(u_d) - f(u_g)}{u_d - u_g} [\eta(u_d) - \eta(u_g)] - [\xi(u_d) - \xi(u_g)] \geq 0 .$$

Pour u_g fixé, on "fait varier" u_d ; on pose donc

$$(3.7) \quad g(v) = \frac{f(v) - f(u_g)}{v - u_g} [\eta(v) - \eta(u_g)] - [\xi(v) - \xi(u_g)] .$$

La fonction $\mathbb{R} \ni v \mapsto g(v) \in \mathbb{R}$ est continue et vérifie

$$(3.8) \quad g(u_g) = 0 , \quad g(u_d) \geq 0$$

compte tenu de l'inégalité (3.5).

- Montrons que lorsque $f(\bullet)$ et $\eta(\bullet)$ sont strictement convexes, $g(\bullet)$ est strictement décroissante. Pour $v \neq u_g$, on a

$$g'(v) = \frac{f'(v)[v - u_g] - f(v) + f(u_g)}{(v - u_g)^2} (\eta(v) - \eta(u_g)) + \frac{f(v) - f(u_g)}{v - u_g} \eta'(v) - \xi'(v)$$

soit après réduction au même dénominateur :

$$(3.9) \quad g'(v) = - \left[\frac{f(u_g) - f(v) - f'(v)(u_g - v)}{(v - u_g)^2} \right] [\eta(u_g) - \eta(v) - \eta'(v)(u_g - v)].$$

Comme η et f sont strictement convexes, la caractérisation de cette propriété par le fait que “la fonction est au-dessous de sa tangente” montre que les deux crochets du membre de droite de (3.8) sont strictement positifs, donc $g'(v) < 0$ si $v \neq u_g$. La fonction $g(\bullet)$ est strictement décroissante sur \mathbb{R} et les conditions (3.7) entraînent alors (3.4).

• Réciproquement, si la discontinuité (u_g, u_d) est admissible comme solution faible (*i.e.* si la relation (3.1) a lieu) et satisfait de plus la relation (3.5), nous fixons une entropie strictement convexe $\eta(\bullet)$ et introduisons comme plus haut la fonction $g(\bullet)$ par l’expression (3.6). Le calcul fait plus haut montre que $g(\bullet)$ est strictement décroissante donc $g(u_d) \geq g(u_g) = 0$, ce qui établit l’inégalité (3.5) en vertu de la relation de Rankine et Hugoniot. \square

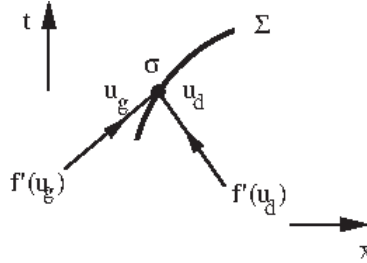


Figure 2. *Choc entropique.*

Les caractéristiques “entrent” dans la ligne de discontinuité.

• On remarque que la condition (3.4) est établie en utilisant **une seule entropie mathématique** $\eta(\bullet)$. De plus, la stricte convexité de $f(\bullet)$ et la condition (3.14) entraînent

$$(3.10) \quad f'(u_d) < \frac{f(u_g) - f(u_d)}{(u_g - u_d)} < f'(u_g), \quad u_d < u_g$$

soit, compte tenu de la relation (3.1),

$$(3.11) \quad f'(u_g) > \sigma > f'(u_d), \quad \text{choc entropique}$$

ainsi qu’illustré figure 2. L’inégalité (3.11) (dite de Lax qui l’a proposée en 1954), permet de sélectionner les chocs entropiques parmi ceux admissibles pour la loi de conservation (2.1). Ainsi on retrouve l’unicité des solutions entropiques, mais sans oublier la condition (2.25) du théorème 2 : on cherche une solution entropique **bornée** ($u \in L^\infty(\mathbb{R} \times]0, \infty[)$).

• Le contre exemple qui suit montre à quel point la condition d’unicité est asservie également à l’hypothèse de chercher une **solution bornée** à la loi de conservation (2.1). Considérons la fonction $\mathbb{R} \times]0, \infty[\ni (x, t) \mapsto u(x, t) \in \mathbb{R}$ définie par

$$(3.12) \quad u(x, t) = \begin{cases} 0, & x < -\sqrt{t} \\ x/t, & -\sqrt{t} < x < \sqrt{t} \\ 0, & x > \sqrt{t}. \end{cases}$$

Elle satisfait les deux conditions qui caractérisent les solutions faibles entropiques relatives au problème de Cauchy

$$(3.13) \quad u(x, t) = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0, & x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$(3.14) \quad \int_{\mathbb{R} \times]0, \infty[} \left[u(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] dx dt = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times [0, \infty[)$$

$$(3.15) \quad \int_{\mathbb{R} \times]0, \infty[} \left[\eta(u) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \xi(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] dx dt \geq 0, \quad \forall \varphi \geq 0, \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times]0, \infty[)$$

mais elle **n'est pas** localement bornée au voisinage de $(0, 0)$. Elle n'appartient **pas** à l'espace $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty[)$; donc elle ne peut pas avoir le statut de "solution faible !"

4) Problème de Riemann

• Nous étudions dans ce paragraphe le problème de Riemann $\mathcal{R}(W_g, W_d)$ pour des lois de conservation du type

$$(4.1) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(W) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

Il s'agit du problème de Cauchy pour une donnée $\mathbb{R} \ni x \mapsto W^0(x) \in \mathbb{R}^N$:

$$(4.2) \quad W(x, 0) = W^0(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

qui est formée de **deux états constants** :

$$(4.3) \quad W^0(x) = \begin{cases} W_g, & x < 0 \\ W_d, & x > 0. \end{cases}$$

Avec les outils fondamentaux introduits à ce niveau, nous pouvons étudier les solutions faibles du système d'équations (4.1)-(4.2)-(4.3) dans le cas où le flux $f(\bullet)$ est hyperbolique linéaire

$$(4.4) \quad f(W) \equiv A \bullet W, \quad W \in \mathbb{R}^N, \quad A \text{ matrice } N \times N \text{ diagonalisable sur } \mathbb{R}$$

ainsi que les solutions faibles entropiques pour une loi de conservation scalaire de flux strictement convexe

$$(4.5) \quad f(u) \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

• Proposition 5. Problème de Riemann pour d'advection.

Dans le cas d'une loi de conservation scalaire linéaire, *i.e.*

$$(4.6) \quad f(u) = a u, \quad a \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathbb{R},$$

le problème de Riemann $\mathcal{R}(u_g, u_d)$ défini par les conditions

$$(4.7) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (a u) = 0, & x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \\ u(x, 0) = \begin{cases} u_g, & x < 0 \\ u_d, & x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

a une unique solution faible entropique

$$(4.8) \quad W^0(x) = \begin{cases} u_g, & x < at \\ u_d, & x > at, t > 0. \end{cases}$$

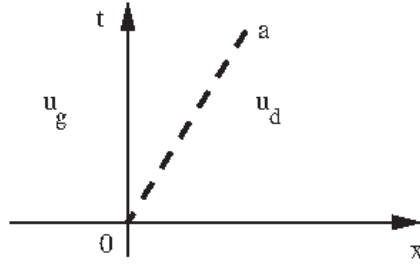


Figure 3. *Problème de Riemann pour l'équation d'advection.*

Preuve de la proposition 5.

- Il s'agit d'une application du théorème 2. La condition initiale est bornée et la fonction de flux (4.6) est de classe C^1 . L'unique solution faible entropique est de classe C^1 par morceaux ; en effet, il est immédiat de constater que la fonction $u(\bullet)$ définie en (4.8) est régulière hors de la demi-droite $x = at$ ($t \geq 0$) et qu'à travers celle-ci, on a la relation de Rankine-Hugoniot :

$$f(u_d) - f(u_g) = a(u_d - u_g) = \sigma(u_d - u_g)$$
 puisque $\sigma = \frac{dx}{dt} = a$ si $x = at$. □

- La solution (4.8) est bien une fonction discontinue si la donnée initiale (cf (4.7)) l'est. **La discontinuité se propage avec la vitesse caractéristique a .** Cette propriété est générale : si (W_g, W_d) est une discontinuité admissible pour la loi de conservation (linéaire vectorielle) (4.4), la relation de Rankine-Hugoniot s'écrit

$$(4.9) \quad f(W_d) - f(W_g) \equiv A \bullet (W_d - W_g) = \sigma (W_d - W_g) .$$

Elle exprime que pour $W_g \neq W_d$, le nombre σ est une **valeur propre** de la matrice A de la fonction de flux. Dans le cas linéaire, les **discontinuités se propagent** avec une **célérité qui est valeur propre** de la jacobienne de la fonction de flux.

- Nous pouvons détailler la (une ?) solution du problème de Riemann $\mathcal{R}(W_g, W_d)$ dans le cas d'un système hyperbolique linéaire de lois de conservation

$$(4.10) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + A \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad W \in \mathbb{R}^N .$$

On décompose l'espace \mathbb{R}^N sous forme de combinaison linéaire des vecteurs propres de A :

$$(4.11) \quad W = \sum_{j=1}^N \varphi_j r_j \quad ; \quad A \bullet r_j = \lambda_j r_j$$

et chaque variable caractéristique φ_j est alors solution d'une loi de conservation scalaire linéaire de célérité λ_j :

$$(4.12) \quad \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} + \lambda_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} = 0, \quad 1 \leq j \leq N .$$

On décompose la condition initiale sur les vecteurs propres r_j :

$$(4.13) \quad W_g = \sum_{j=1}^N \varphi_j^g r_j, \quad W_d = W_g + \sum_{j=1}^N \alpha_j r_j .$$

Compte tenu de la proposition 5, on a

$$(4.14) \quad \varphi_j(x, t) = \begin{cases} \varphi_j^g, & x < \lambda_j t \\ \varphi_j^g + \alpha_j & x > \lambda_j t. \end{cases}$$

Si on ordonne les valeurs propres de A dans un ordre croissant, *i.e.*

$$(4.15) \quad \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_j \leq \lambda_{j+1} \leq \dots \leq \lambda_N,$$

la solution faible entropique du problème (4.10)-(4.2)-(4.3) s'exprime de la manière suivante :

$$(4.16) \quad W(x, t) = \begin{cases} W_g, & x < \lambda_1 t \\ W_g + \sum_{j=1}^i \alpha_j \varphi_j, & \lambda_i t < x < \lambda_{i+1} t \\ W_d, & x > \lambda_N t \end{cases}$$

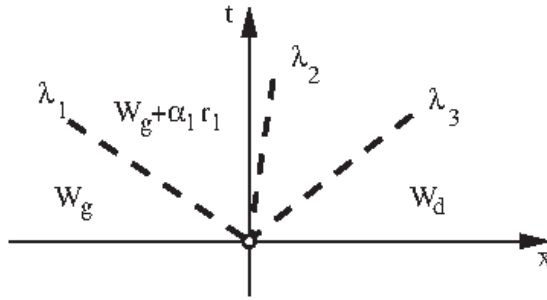


Figure 4. Problème de Riemann pour un système hyperbolique linéaire.

• Remarquons que la fonction (4.15) est **autosemblable**, que l'état constant $W_{i+1/2}$ dans le secteur $\lambda_i < \frac{x}{t} < \lambda_{i+1}$ s'exprime de deux façons :

$$(4.17) \quad W_{i+1/2} = W_g + \sum_{j=1}^i \alpha_j r_j = W_d - \sum_{j=i+1}^N \alpha_j r_j, \quad \lambda_i < \frac{x}{t} < \lambda_{i+1}$$

et que le saut entre $W_{i-1/2}$ et $W_{i+1/2}$ à travers la caractéristique de vitesse λ_i est égal à la i° composante de la discontinuité $W_d - W_g$:

$$(4.18) \quad W_{i+1/2} - W_{i-1/2} = \alpha_i r_i, \quad 1 \leq i \leq N.$$

On vérifie bien la relation de Rankine-Hugoniot :

$$f(W_{i+1/2}) - f(W_{i-1/2}) = A \bullet (W_{i+1/2} - W_{i-1/2}) = A \bullet (\alpha_i r_i) = \alpha_i \lambda_i r_i$$

qui exprime que la célérité de la discontinuité est égale à la $i^{\text{ème}}$ valeur propre λ_i (Figure 4).

• **Proposition 6. Problème de Riemann pour l'équation de Burgers.** Dans le cas de l'équation de Burgers, *i.e.*

$$(4.19) \quad f(u) = \frac{1}{2} u^2, \quad u \in \mathbb{R},$$

le problème de Riemann $\mathcal{R}(u_g, u_d)$ défini par

$$(4.20) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^2) = 0, & x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} u_g, & x < 0 \\ u_d, & x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

a une unique solution faible entropique $u(x, t) \equiv \mathcal{U}\left(\frac{x}{t}; u_g, u_d\right)$ qui s'exprime par

(i) $u_g \leq u_d$: **onde de détente**

$$(4.21) \quad \mathcal{U}\left(\frac{x}{t}; u_g, u_d\right) = \begin{cases} u_g & x \leq u_g t \\ \frac{x}{t} & u_g t \leq x \leq u_d t \\ u_d & u_d t \leq x \end{cases}$$

(ii) $u_g > u_d$: **onde de choc**

$$(4.22) \quad \mathcal{U}\left(\frac{x}{t}; u_g, u_d\right) = \begin{cases} u_g & x < \frac{u_g + u_d}{2} t \\ u_d & x > \frac{u_g + u_d}{2} t. \end{cases}$$

Preuve de la proposition 6.

- Elle résulte du théorème 2, dont le point mathématiquement délicat est l'unicité. Vérifier que (4.21) et (4.22) sont solutions faibles a été fait plus haut. La relation (4.22) définit bien un choc entropique ainsi qu'étudié à la proposition 4. \square

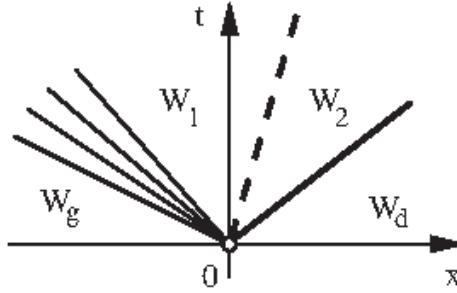


Figure 5. *Problème de Riemann pour l'équation de Burgers.*

- On remarque à nouveau que dans les deux cas (i) et (ii), la solution entropique $\mathcal{U}(\cdot, u_g, u_d)$ du problème de Riemann $\mathcal{R}(u_g, u_d)$ est bien **autosemblable**. Dans le cas où $f(\cdot)$ est strictement convexe, la proposition 6 se généralise sans difficulté. Dans le cas où elle n'est pas convexe, nous renvoyons par exemple à l'ouvrage de C. Dafermos [Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics, *Grundlehren des mathematischen Wissenschaften*, vol. 325, Springer, New York, 2000].

• **Proposition 7. Vitesse de propagation finie.**

Soit $\Omega \ni W \mapsto f(W) \in \mathbb{R}^N$ l'une des deux fonctions de flux suivantes

$$(4.23) \quad \Omega = \mathbb{R} \quad \text{et} \quad f(W) = \frac{1}{2} W^2$$

$$(4.24) \quad \Omega = \mathbb{R}^N \quad \text{et} \quad f(W) = A \bullet W,$$

avec A matrice diagonalisable fixée. On pose, pour W_g et W_d appartenant à Ω :

$$(4.25) \quad a(W_g, W_d) = \max\{ |\lambda_j(W_g)|, |\lambda_j(W_d)|, 1 \leq j \leq N \}.$$

La solution entropique $\mathcal{U}(\cdot; W_g, W_d)$ du problème de Riemann $\mathcal{R}(W_g, W_d)$ vérifie la propriété suivante :

$$(4.26) \quad \mathcal{U}\left(\frac{x}{t}; W_g, W_d\right) = \begin{cases} W_g & \text{si } \frac{x}{t} < -a(W_g, W_d) \\ W_d & \text{si } \frac{x}{t} > a(W_g, W_d); \end{cases}$$

la plus grande vitesse des ondes du problème de Riemann $\mathcal{R}(W_g, W_d)$ est inférieure ou égale à $a(W_g, W_d)$.

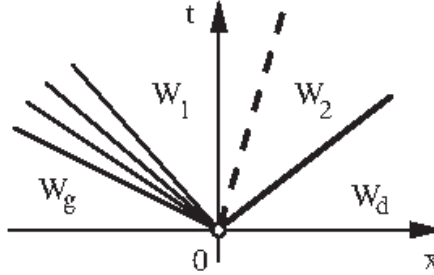


Figure 6. Vitesse finie de propagation au sein du problème du Riemann.

Preuve de la proposition 7.

• Pour l'équation de Burgers, on a $a(W_g, W_d) = \max(|W_g|, |W_d|)$ et il y a deux cas de figure pour la solution du problème de Riemann. Ou bien $W_g > W_d$, et la solution contient un choc de vitesse $\sigma = \frac{1}{2}(W_g + W_d)$. On a alors

$$|\sigma| \leq \frac{1}{2}(|W_g| + |W_d|) \leq \max(|W_g|, |W_d|) = a(W_g, W_d)$$

et l'on a donc en particulier :

$$\mathcal{U}\left(\frac{x}{t}; W_g, W_d\right) = \begin{cases} W_g & \text{si } \frac{x}{t} < -\max(|W_g|, |W_d|) \leq -|\sigma| \\ W_d & \text{si } \frac{x}{t} > \max(|W_g|, |W_d|) \geq |\sigma|, \end{cases}$$

ce qui établit la propriété (4.26) dans ce cas. Si $W_g \leq W_d$, la solution du problème de Riemann $\mathcal{R}(W_g, W_d)$ n'est différente des deux états W_g et W_d que dans la zone de l'onde de détente, décrite par les conditions

$$W_g \leq \frac{x}{t} \leq W_d,$$

et la propriété (4.26) est alors claire.

• Dans le cas d'un système hyperbolique linéaire, on a $a(W_g, W_d) = \max(|\lambda_1|, |\lambda_N|)$ et la relation (4.26) est une conséquence de l'expression (4.16) de la solution du problème de Riemann. \square

Introduction aux volumes finis

1) Méthode des lignes

- Nous étudions une loi de conservation à une dimension d'espace

$$(1.1) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(W) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0$$

où $\Omega \ni W \mapsto f(W) \in \mathbb{R}^N$ est une fonction de flux régulière et Ω un ouvert convexe de \mathbb{R}^N . On suppose donné un pas d'espace $\Delta x > 0$ et une famille de points x_j :

$$(1.2) \quad x_j = j \Delta x, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

La méthode des volumes finis demande de définir avec soin un **maillage** \mathcal{T} associé à la famille de points proposée à la relation (1.2). Un maillage (même monodimensionnel) est constitué d'une part de **sommets** (ici les points x_j) qui forment un ensemble $\mathcal{S}_{\mathcal{T}}$ et d'autre part **d'éléments** (notés K dans la suite) qui forment un ensemble $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$. Le bord des éléments contient les sommets du maillage et la réunion des adhérences des éléments recouvre tout l'espace :

$$(1.3) \quad \bigcup_{K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}} \overline{K} = \mathbb{R}.$$

L'intersection de deux éléments K et L du maillage est vide, ou est un sommet du maillage, ou $K = L$. Noter qu'à deux ou trois dimensions spatiales, ces notions se généralisent sans difficulté en utilisant la notion classique en topologie de **complexe cellulaire** (voir par exemple C. Godbillon [Eléments de topologie algébrique, Hermann, Paris, 1971]). Dans le cas présent, avec le choix

$$(1.4) \quad \mathcal{S}_{\mathcal{T}} = \{x_j, j \in \mathbb{Z}\},$$

on a simplement

$$(1.5) \quad \mathcal{E}_{\mathcal{T}} = \{K =]x_j, x_{j+1}[, j \in \mathbb{Z}\}.$$

Pour chaque élément K du maillage ($K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}$), on introduit la **valeur moyenne** $W_K(t)$ de "la" solution de (1.1), qu'on suppose exister, quitte à se restreindre au cas d'une équation scalaire ou au cas d'un système hyperbolique linéaire que nous avons déjà étudié :

$$(1.6) \quad W_K(t) = \frac{1}{|K|} \int_K W(x, t) dx, \quad K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}$$

et on cherche quelle est l'équation vérifiée par les fonctions $[0, \infty[\ni t \mapsto W_K(t) \in \Omega$. Il est utile d'introduire les deux sommets $S_-(K)$ et $S_+(K)$ qui composent le bord de l'élément K :

$$(1.7) \quad \partial K = \{S_-(K), S_+(K)\}; \quad K =]S_-(K), S_+(K)[, \quad K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}.$$

On intègre l'équation (1.1) en espace dans le volume K . Il vient après intégration du terme divergeant $\frac{\partial f}{\partial x}$:

$$(1.8) \quad |K| \frac{dW_K}{dt} + f(W(S_+(K), t)) - f(W(S_-(K), t)) = 0, \quad K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}.$$

La difficulté est que pour une solution $W(\bullet)$ de la loi de conservation (1.1), les flux $f(W(S_{\pm}(K), t))$ ne sont **pas** une fonction simple de l'ensemble

$$(1.9) \quad \mathcal{W}(t) = \{ W_K(t), \quad K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}} \}$$

de toutes les valeurs moyennes définies en (1.6).

- On construit un schéma **conservatif** semi-discrétisé en espace et continu en temps en se donnant, pour tout sommet S du maillage, une **fonction de flux numérique** ψ_S qui dépend a priori de l'ensemble $\mathcal{W}(t)$ de toutes les valeurs moyennes et approche le flux de la solution exacte au sommet $S \in \mathcal{S}_{\mathcal{T}}$:

$$(1.10) \quad f(W(S, t)) \simeq \psi_S(\mathcal{W}(t)), \quad S \in \mathcal{S}_{\mathcal{T}}.$$

Le schéma de volumes finis est obtenu en remplaçant dans la relation (1.8) les flux de la solution exacte aux sommets du maillage par la **fonction de flux numérique** sur ces sommets ; on obtient une équation d'évolution de la valeur moyenne

$$(1.11) \quad |K| \frac{dW_K}{dt} + \psi_{S_+(K)}(\mathcal{W}(t)) - \psi_{S_-(K)}(\mathcal{W}(t)) = 0, \quad K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}.$$

Une fois les fonctions de flux numériques ψ_S connues, *i.e.*

$$(1.12) \quad \Omega^{\mathcal{E}_{\mathcal{T}}} \ni \mathcal{W} \mapsto \psi_S(\mathcal{W}) \in \mathbb{R}^N, \quad S \in \mathcal{S}_{\mathcal{T}},$$

l'équation (1.11) est un système d'équations différentielles ordinaires qui porte le nom de **méthode des lignes**. En pratique, pour les schémas numériques à deux points invariants par translation auxquels nous nous restreignons ici, le flux numérique ψ_S sur l'interface S entre les deux éléments $K_g(S)$ et $K_d(S)$ "qui contiennent S dans leur bord", *i.e.*

$$(1.13) \quad S = \partial K_g(S) \cap \partial K_d(S), \quad S \in \mathcal{S}_{\mathcal{T}}$$

n'est fonction que des deux plus proches voisins W_{K_g} et W_{K_d} , ou à la rigueur également des deux voisins à l'ordre suivant. Nous posons ici donc pour fixer les idées

$$(1.14) \quad \psi_S(\mathcal{W}) = \Phi(W_{K_g(S)}, W_{K_d(S)}), \quad S \in \mathcal{S}_{\mathcal{T}}$$

et toute la connaissance du schéma (1.12) se résume à celle de la fonction de deux variables Φ ; on parle alors d'une **fonction de flux à deux points** :

$$(1.15) \quad \Omega \times \Omega \ni (W_g, W_d) \mapsto \Phi(W_g, W_d) \in \mathbb{R}^N.$$

- **Définition 1. Consistance d'un schéma de volumes finis.**

La fonction de flux numérique Φ de la relation (1.15) est dite **consistante** avec la loi de conservation (1.1) si l'on a

$$(1.16) \quad \Phi(W, W) = f(W), \quad W \in \Omega.$$

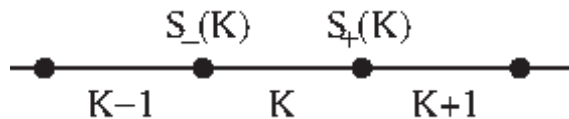


Figure 1. *Sommets et éléments d'un maillage à une dimension d'espace.*

- Si on se donne une fonction de flux à deux points (1.15) consistante avec la loi de conservation (1.1), le schéma de volumes finis défini par la méthode des lignes permet de décrire

l'évolution en temps des moyennes W_K pour les éléments du maillage avec une équation qui couple l'élément courant K avec son voisin de droite

$$(1.17) \quad K + 1 = K_d(S_+(K)) , \quad K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}$$

et son voisin de gauche $K - 1$:

$$(1.18) \quad K - 1 = K_g(S_-(K)) , \quad K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}$$

décrits à la figure 1. On obtient de cette façon l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$(1.19) \quad \frac{dW_K}{dt} + \frac{1}{|K|} [\Phi(W_K, W_{K+1}) - \Phi(W_{K-1}, W_K)] = 0 , \quad K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}} .$$

Bien entendu, ce schéma se généralise facilement aux dimensions supérieures (voir par exemple, pour les fanas, le livre de E. Godlewski et P.A. Raviart [Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws, Applied Mathematical Sciences, vol. 118, Springer, 1996]) et la notation choisie en (1.17) et (1.18) est particulière du cas monodimensionnel.

- La discrétisation en temps de la méthode des lignes ne demande que d'explicitier les divers schémas de base pour une équation différentielle générale :

$$(1.20) \quad \frac{dU}{dt} + F(U) = 0 , \quad U \in \mathbb{R}^N$$

qu'on peut identifier à (1.19) avec la correspondance

$$U = \mathcal{W}(t) , \quad F_K(t) = \frac{1}{|K|} [\Phi(W_K, W_{K+1}) - \Phi(W_{K-1}, W_K)]$$

si on suppose le maillage \mathcal{T} constitué d'un nombre fini N d'éléments. On dispose, une fois fixé un pas de temps $\Delta t > 0$, du schéma d'**Euler explicite** :

$$(1.21) \quad \frac{1}{\Delta t} (U^{n+1} - U^n) + F(U^n) = 0 , \quad n \in \mathbb{N}$$

mais aussi du schéma d'**Euler implicite**

$$(1.22) \quad \frac{1}{\Delta t} (U^{n+1} - U^n) + F(U^{n+1}) = 0 , \quad n \in \mathbb{N}$$

et de leur moyenne la plus simple, le schéma de **Crank-Nicolson**, qui est d'ordre 2 alors que les deux schémas d'Euler sont d'ordre un :

$$(1.23) \quad \frac{1}{\Delta t} (U^{n+1} - U^n) + \frac{1}{2} (F(U^n) + F(U^{n+1})) = 0 , \quad n \in \mathbb{N} .$$

En pratique, on utilise souvent le schéma de Runge et Kutta d'ordre 2 (schéma de Heun) qui a l'avantage d'être explicite :

$$(1.24) \quad \frac{1}{\Delta t} (U^{n+1} - U^n) + \frac{1}{2} (F(U^n) + F(U^n - \Delta t F(U^n))) = 0 , \quad n \in \mathbb{N}$$

mais demande plus d'évaluations de la fonction $F(\bullet)$.

- Dans le cas de l'équation d'advection

$$(1.25) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 , \quad x \in \mathbb{R} , \quad t \geq 0 , \quad u(x, t) \in \mathbb{R}$$

si on utilise le flux centré

$$(1.26) \quad \Phi(u_g, u_d) \equiv \frac{1}{2} a (u_g + u_d)$$

on obtient le **schéma centré instable** si on utilise le schéma d'Euler explicite en temps (1.21) :

$$(1.27) \quad \frac{1}{\Delta t} (u_K^{n+1} - u_K^n) + \frac{a}{2\Delta x} (u_{K+1}^n - u_{K-1}^n) = 0, \quad K =]x_j, x_{j+1}[, j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$$

et le schéma implicite centré (toujours stable) si on utilise le schéma d'Euler rétrograde (1.22) :

$$(1.28) \quad \frac{1}{\Delta t} (u_K^{n+1} - u_K^n) + \frac{a}{2\Delta x} (u_{K+1}^{n+1} - u_{K-1}^{n+1}) = 0, \quad K =]x_j, x_{j+1}[, j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$$

• Toujours pour l'approximation numérique de l'équation d'advection, on peut aussi utiliser un flux décentré amont, *i.e.*

$$(1.29) \quad \Phi(u_g, u_d) = \begin{cases} a u_g, & a > 0 \\ a u_d, & a < 0. \end{cases}$$

L'emploi du schéma d'Euler implicite (1.22) en temps permet de retrouver le schéma de Courant ; on a par exemple pour $a > 0$:

$$(1.30) \quad \frac{1}{\Delta t} (u_K^{n+1} - u_K^n) + \frac{a}{\Delta x} (u_K^{n+1} - u_{K-1}^{n+1}) = 0, \quad K =]x_j, x_{j+1}[, j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$$

alors que l'emploi du schéma d'Euler explicite (1.21) réintroduit le schéma décentré amont, stable dans le cas $a > 0$ sous la condition de Courant-Friedrichs-Lewy (1927)

$$(1.31) \quad 0 < \frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

et qui s'écrit

$$(1.32) \quad \frac{1}{\Delta t} (u_K^{n+1} - u_K^n) + \frac{a}{\Delta x} (u_K^n - u_{K-1}^n) = 0, \quad K =]x_j, x_{j+1}[, j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}.$$

2) Schéma de Godunov

• L'approche de Godunov (1955) permet de relier les notions de schéma numérique et de solution du problème de Riemann. On suppose dans la suite de cette partie que le problème de Riemann $\mathcal{R}(W_g, W_d)$ pour le système de lois de conservation (1.1) associé à une condition initiale (W_g, W_d) , *i.e.*

$$(2.1) \quad W(x, 0) = \begin{cases} W_g, & x < 0 \\ W_d, & x > 0 \end{cases}$$

a une unique solution entropique autosemblable $\mathcal{U}(\bullet; W_g, W_d)$:

$$(2.2) \quad W(x, t) = \mathcal{U}\left(\frac{x}{t}; W_g, W_d\right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, c'est le cas dans le cas d'une loi de conservation scalaire et nous avons détaillé le cas de l'équation de Burgers ($u \in \mathbb{R}$, $f(u) = u^2/2 \in \mathbb{R}$) et pour un système hyperbolique linéaire de lois de conservation. Le cas d'une classe assez générale de systèmes hyperboliques (incluant la dynamique des gaz) sera traité au chapitre suivant.

- L'idée est de discrétiser au temps $t^n = n\Delta t$ le champ inconnu $W^n(x)$ par des volumes finis, *i.e.* un champ **constant dans chaque maille** $K =]x_j, x_{j+1}[$

$$(2.3) \quad W^n(x) = W_{j+1/2}^n, \quad x \in K =]x_j, x_{j+1}[.$$

La remarque fondamentale de Godunov est que pour des temps $t > 0$ assez petits, on **connait** une solution entropique du problème de Cauchy composé de (1.1) et de la condition "initiale"

$$(2.4) \quad W(x, 0) = W^n(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

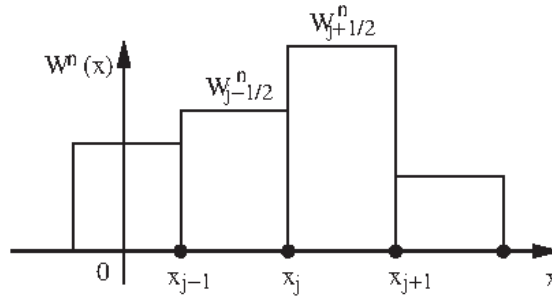


Figure 2. *Discretisation au temps t^n du champ.*

- Pour l'interface x_j , la condition initiale (2.3)(2.4) définit un problème de Riemann entre les états $W_{j-1/2}^n$ et $W_{j+1/2}^n$

$$(2.5) \quad \begin{cases} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(W) = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ W(x, 0) = \begin{cases} W_{j-1/2}^n, & x < x_j \\ W_{j+1/2}^n, & x > x_j \end{cases} \end{cases}$$

tant que l'on s'intéresse au voisinage immédiat ($|x - x_j|$ assez petit) de cette interface (figure 2). La solution du problème (2.5) s'écrit donc :

$$(2.6) \quad W(x, t) = \mathcal{U} \left(\frac{x - x_j}{t - t^n}; W_{j-1/2}^n, W_{j+1/2}^n \right), \quad t \geq t^n.$$

On note $a_{j+1/2}^n$ la célérité maximale des ondes relatives à l'état $W_{j+1/2}^n$:

$$(2.7) \quad a_{j+1/2}^n = \sup_{1 \leq k \leq} |\lambda_k(W_{j+1/2}^n)|, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Compte tenu de la proposition 7 du chapitre précédent sur la vitesse de propagation finie, tant que la condition

$$(2.8) \quad \left| \frac{x - x_j}{t - t^n} \right| \geq \max(|a_{j-1/2}^n|, |a_{j+1/2}^n|)$$

est satisfaite, la solution du problème (2.5) est donnée par les relations suivantes :

$$(2.9) \quad W(x, t) = \begin{cases} W_{j-1/2}^n, & \frac{x - x_j}{t - t^n} < -\max(|a_{j-1/2}^n|, |a_{j+1/2}^n|) \\ W_{j+1/2}^n, & \frac{x - x_j}{t - t^n} > \max(|a_{j-1/2}^n|, |a_{j+1/2}^n|). \end{cases}$$

- La solution du problème de Riemann est égale à un état constant si on est assez loin de l'interface x_j ; ceci a lieu en particulier au milieu $x_{j-1/2}$ de la maille $K_{j-1/2}$ et au milieu

$x_{j+1/2}$ de la maille $K_{j+1/2}$ pour tout instant t tel que $t^n < t < t^n + \Delta t$ lorsque l'on a la condition

$$(2.10) \quad \Delta t < \frac{\Delta x / 2}{\max(|a_{j-1/2}^n|, |a_{j+1/2}^n|)}.$$

Lorsque la condition (2.10) a lieu pour toutes les mailles, soit

$$(2.11) \quad \Delta t \left(\sup_{j \in \mathbb{Z}} a_{j+1/2}^n \right) \leq \frac{\Delta x}{2},$$

on peut alors "recoller" entre elles les solutions des différents problèmes (2.7). Et pour $t^n < t < t^n + \Delta t$, une solution du problème de Cauchy (1.1)-(2.4) s'écrit pour $|x - x_j| < \Delta x / 2$ et $t < \Delta t$:

$$(2.12) \quad \begin{cases} W(x, t) = \mathcal{U}\left(\frac{x - x_j}{t - t^n}; W_{j-1/2}^n, W_{j+1/2}^n\right), \\ |x - x_j| < \frac{\Delta x}{2}, \quad 0 < t - t^n < \Delta t, \quad j \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

En effet, lorsque la condition (2.6) est satisfaite, les ondes issues du problème de Riemann à l'interface x_j parcourent une distance maximale égale à $\frac{\Delta x}{2}$, donc **n'interagissent pas entre elles** pour deux problèmes de Riemann posés entre interfaces voisines (figure 3).

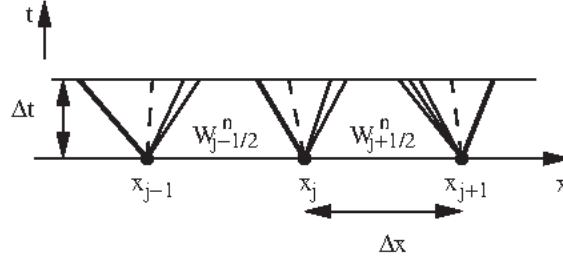


Figure 3. Solution du problème de Cauchy (1.1)-(2.4) sous la condition de stabilité (2.11).

- Le schéma de Godunov est défini à partir de la solution (2.12) en prenant la moyenne sur chaque maille K à l'instant Δt :

$$(2.13) \quad W_K^{n+1} = \frac{1}{|K|} \int_K W(x, \Delta t) dx, \quad W(x, t) \text{ donné en (2.12).}$$

- **Proposition 1. Flux numérique du schéma de Godunov.**

Le schéma de Godunov, défini par les relations (2.3) à (2.13), s'écrit aussi sous la forme

$$(2.14) \quad \begin{cases} \frac{1}{\Delta t} (W_K^{n+1} - W_K^n) + \frac{1}{\Delta x} [\Phi(W_K^n, W_{K+1}^n) - \Phi(W_{K-1}^n, W_K^n)] = 0 \\ K =]x_j, x_{j+1}[, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0, \end{cases}$$

où $\Phi(\bullet, \bullet)$ est la fonction de flux numérique définie par

$$(2.15) \quad \Phi(W_g, W_d) = f(\mathcal{U}(0; W_g, W_d)), \quad W_g, W_d \in \Omega.$$

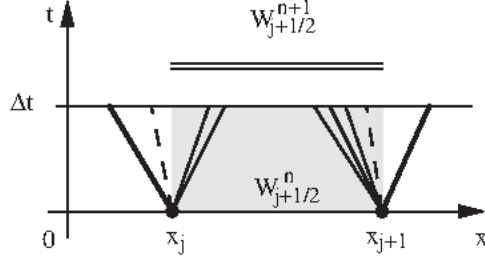


Figure 4. Volume de contrôle dans l'espace-temps pour l'explicitation du flux du schéma de Godunov.

- Le schéma de Godunov est donc clairement **consistant** avec la loi de conservation (1.1) ; en effet, $\mathcal{U}(0; W, W) = W$, donc $\Phi(W, W) = f(W)$, ce pour tout état W .

Preuve de la proposition 1.

- On intègre la loi de conservation (1.1) avec la solution particulière du problème de Cauchy associé à la condition initiale (2.3) par la relation (2.12) dans le domaine d'espace-temps $]x_j, x_{j+1}[\times]0, \Delta t[$:

$$(2.16) \quad \int_{\partial(]x_j, x_{j+1}[\times]0, \Delta t[)} [W(x, t) n_t + f(W(x, t)) n_x] d\gamma(x, t) = 0.$$

- Le bord du rectangle $]x_j, x_{j+1}[\times]0, \Delta t[$ fait apparaître quatre termes (cf. figure 4) :

$$\int_{]x_j, x_{j+1}[\times \{0\}} W(x, t) n_t d\gamma(x, t) = -|K| W_{j+1/2}^n$$

$$\int_{]x_j, x_{j+1}[\times \{\Delta t\}} W(x, t) n_t d\gamma(x, t) = |K| W_{j+1/2}^{n+1}$$

$$\int_{\{x_j\} \times]0, \Delta t[} f(W(x, t)) n_x d\gamma(x, t) = -\Delta t f(\mathcal{U}(0; W_{j-1/2}^n, W_{j+1/2}^n))$$

$$\int_{\{x_{j+1}\} \times]0, \Delta t[} f(W(x, t)) n_x d\gamma(x, t) = \Delta t f(\mathcal{U}(0; W_{j+1/2}^n, W_{j+3/2}^n)).$$

Le regroupement des quatre termes précédents au sein de (2.16) s'écrit, en tenant compte de la relation (2.15)

$$(2.17) \quad \begin{cases} |K| (W_{j+1/2}^{n+1} - W_{j+1/2}^n) + \\ + \Delta t (\Phi(W_{j+1/2}^n, W_{j+3/2}^n) - \Phi(W_{j-1/2}^n, W_{j+1/2}^n)) = 0 \end{cases}$$

et cette relation est, à la notation près, identique à la relation (2.14). \square

- Dans le cas de l'équation d'advection ; le schéma de Godunov est identique au schéma décentré amont

$$(2.18) \quad f(\mathcal{U}(0; u_g, u_d)) = \begin{cases} a u_g, & a > 0 \\ a u_d, & a < 0 \end{cases} \quad \text{pour} \quad \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

• **Proposition 2. Cas d'un système hyperbolique linéaire.**

Soit A une matrice diagonalisable sur \mathbb{R} de valeurs propres λ_k et vecteurs propres $r_k \in \mathbb{R}^N$

$$(2.19) \quad A \bullet r_k = \lambda_k r_k, \quad 1 \leq k \leq N$$

et $\mathbb{R} \times]0, \infty[\ni (x, t) \mapsto W(x, t) \in \mathbb{R}^N$ la solution du problème de Riemann

$$(2.20) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + A \bullet \frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

$$(2.21) \quad W(x, 0) = \begin{cases} W_g, & x < 0 \\ W_d, & x > 0. \end{cases}$$

Le flux de Godunov $\Phi(W_g, W_d) = A \bullet W(0, t)$ de la relation (2.10) se calcule aussi *via* la relation

$$(2.22) \quad \Phi(W_g, W_d) = A^+ \bullet W_g + A^- \bullet W_d$$

où les matrices A^\pm sont définies par les relations

$$(2.23) \quad \lambda_k^+ = \max(0, \lambda_k), \quad \lambda_k^- = \min(0, \lambda_k), \quad 1 \leq k \leq \lambda$$

$$(2.24) \quad A^\pm \bullet r_k = \lambda_k^\pm r_k, \quad 1 \leq k \leq N.$$

- Les ondes de célérité $\lambda_k > 0$ transmettent l'information de l'état W_g jusqu'à l'interface $\{x = 0\}$ alors que celles de vitesse $\lambda_k < 0$ la propagent de W_d jusqu'à l'interface (figure 5).

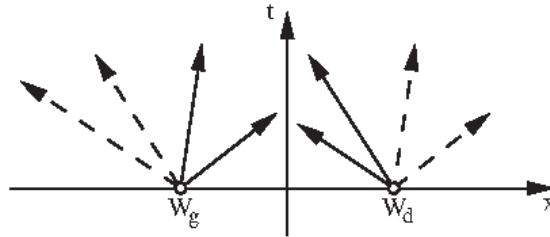


Figure 5. Schéma de Godunov pour un système hyperbolique linéaire :

$$\Phi(W_g, W_d) = A^+ \bullet W_g + A^- \bullet W_d.$$

Preuve de la proposition 5.

- Elle résulte du calcul fait au chapitre 4 avec la méthode des caractéristiques. On décompose d'abord la condition initiale (W_g, W_d) sur les vecteurs propres de A :

$$(2.25) \quad W_g = \sum_{k=1}^N \varphi_{g,k} r_k, \quad \varphi_{g,k} \in \mathbb{R}$$

$$(2.26) \quad W_d = \sum_{k=1}^N \varphi_{d,k} r_k, \quad \varphi_{d,k} \in \mathbb{R}$$

c'est-à-dire

$$(2.27) \quad \varphi_k^0(x) = \begin{cases} \varphi_{g,k}, & x < 0 \\ \varphi_{d,k}, & x > 0. \end{cases}$$

L'analyse des caractéristiques nous a montré que la solution du problème (2.20)-(2.21) s'écrit :

$$(2.28) \quad W(x, t) = \sum_{k=1}^N \varphi_k^0(x - \lambda_k t) r_k.$$

Il en résulte que

$$W(0, t) = \sum_{k=1}^N \varphi_k^0(-\lambda_k t) r_k, \quad t > 0$$

$$W(0, t) = \sum_{k=1}^N \varphi_k^0(-\lambda_k) r_k \quad \text{vu l'invariance d'échelle (2.27)}$$

$$W(0, t) = \sum_{-\lambda_k < 0} \varphi_{g,k} r_k + \sum_{-\lambda_k > 0} \varphi_{d,k} r_k, \quad t > 0$$

Par suite

$$\Phi(W_g, W_d) = A \bullet W(0, t) = \sum_{\lambda_k > 0} \varphi_{g,k} A \bullet r_k + \sum_{\lambda_k < 0} \varphi_{d,k} A \bullet r_k = A^+ \bullet W_g + A^- \bullet W_d$$

ce qui établit la relation (2.22). \square

- On peut vérifier que pour la résolution numérique du système linéaire (2.20), le schéma de Godunov, composé de (2.14) et (2.22) est **stable** sous la condition de Courant-Friedrichs-Levy

$$(2.29) \quad \left(\sup_k |\lambda_k| \right) \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

alors que c'est une condition de type " $CFL = 1/2$ " dont on a eu besoin en (2.11) pour effectuer proprement le recollement entre les divers problèmes de Riemann dans le cas **non linéaire**. Par ailleurs, le schéma de Godunov est **d'ordre 1** au sens de l'erreur de troncature, ainsi que le suggère la relation (2.18) puisque pour l'advection le schéma de Godunov correspond au schéma aux différences finies décentré amont.

- **Proposition 3. Stabilité L^∞ .**

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de flux réelle de classe \mathcal{C}^2 , $u^0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ une donnée initiale, \mathcal{T} un maillage de \mathbb{R} de pas $\Delta x > 0$ uniforme et $\Delta t > 0$ un pas de temps. On construit le schéma de Godunov à l'aide de la condition initiale discrète suivante

$$(2.30) \quad u_K^0 = \frac{1}{|K|} \int_K u^0(x) dx, \quad K =]j\Delta x, (j+1)\Delta x[, \quad j \in \mathbb{Z},$$

et des équations (2.14)-(2.15). Sous la condition de stabilité

$$(2.31) \quad \Delta t \sup_{|\xi| \leq \|u^0\|_{L^\infty}} |f'(\xi)| \leq \frac{1}{2} \Delta x,$$

le schéma de Godunov préserve le principe du maximum :

$$(2.32) \quad \left(\alpha \leq u^0 \leq \beta \text{ pp}(x) \right) \implies \left(\alpha \leq u_K^n \leq \beta, \quad \forall K, \forall n \right).$$

Preuve de la proposition 3.

- Il est clair d'une part qu'on a

$$(2.33) \quad |u_K^0| \leq \|u^0\|_{L^\infty}, \quad \forall K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}$$

et pour $K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}$, la solution entropique bornée $\mathcal{U}\left(\frac{x}{t}; u_K^0, u_{K+1}^0\right)$ du problème de Riemann $\mathcal{R}(u_K^0, u_{K+1}^0)$ satisfait la condition

$$(2.34) \quad \left| \mathcal{U} \left(\frac{x}{t}; u_K^0, u_{K+1}^0 \right) \right| \leq \max (|u_K^0|, |u_{K+1}^0|) .$$

Comme on a, compte tenu de (2.31),

$$(2.35) \quad \begin{cases} u_K^1 = \frac{1}{|K|} \left[\int_0^{\Delta x/2} \mathcal{U} \left(\frac{x}{\Delta t}; u_{K-1}^0, u_K^0 \right) dx \right. \\ \left. + \int_{-\Delta x/2}^0 \mathcal{U} \left(\frac{x}{\Delta t}; u_K^0, u_{K+1}^0 \right) dx \right], \quad K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}} \end{cases}$$

et on en déduit simplement $|u_K^1| \leq \|u^0\|_{L^\infty}$ pour $K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}$, et après une récurrence immédiate :

$$(2.36) \quad |u_K^n| \leq \|u^0\|_{L^\infty}, \quad K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}, \quad n \in \mathbb{N} .$$

• La relation (2.32) s'établit de façon analogue : la condition $\alpha \leq u^0 \leq \beta$ presque partout se traduit par intégration sur la condition initiale du schéma :

$$(2.37) \quad \alpha \leq u_K^0 \leq \beta, \quad K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}$$

et l'unique solution entropique bornée du problème de Riemann $\mathcal{R}(u_K^0, u_{K+1}^0)$ satisfait à la relation

$$(2.38) \quad \alpha \leq \mathcal{U} \left(\frac{x}{t}; u_K^0, u_{K+1}^0 \right) \leq \beta, \quad K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}$$

si c'est le cas pour la condition initiale (relation (2.37)). Il suffit alors d'utiliser (2.38) et la relation de projection (2.35) pour montrer qu'on a $\alpha \leq u_K^1 \leq \beta$, $K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}$. La relation (2.32) s'en déduit immédiatement par récurrence. \square

3) Convergence

• Nous fixons une condition initiale scalaire $u^0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, que nous discrétisons sur un maillage \mathcal{T}_m de pas $\Delta x_m > 0$:

$$(3.1) \quad (u_m)_K^0 = \frac{1}{|K|} \int_K u^0(x) dx, \quad K =]j\Delta x, (j+1)\Delta x[, \quad j \in \mathbb{Z} .$$

Nous utilisons un pas de temps $\Delta t_m > 0$ et cherchons une fonction $u_m : \mathbb{R} \times]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ supposée constante dans chaque produit cartésien de la forme $]j\Delta x_m, (j+1)\Delta x_m[\times]n\Delta t_m, (n+1)\Delta t_m[$:

$$(3.2) \quad \begin{cases} u_m(x, t) = (u_m)_K^n, & x \in K =]j\Delta x_m, (j+1)\Delta x_m[, \\ t^n = n\Delta t_m \leq t \leq t^{n+1}, & j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N} . \end{cases}$$

Nous utilisons un flux numérique à deux points $\mathbb{R}^2 \ni (u_g, u_d) \mapsto \Phi(u_g, u_d) \in \mathbb{R}$ et un schéma de volumes finis explicite pour calculer u_K^{n+1} par récurrence sur l'entier n :

$$(3.3) \quad \frac{1}{\Delta t_m} \left[(u_m)_K^{n+1} - (u_m)_K^n \right] + \frac{1}{\Delta x_m} \left\{ \Phi((u_m)_K^n, (u_m)_{K+1}^n) - \Phi((u_m)_{K-1}^n, (u_m)_K^n) \right\} = 0 .$$

Lorsque $\Delta x_m \rightarrow 0$ et $\Delta t_m \rightarrow 0$ pour $m \rightarrow \infty$, le comportement de la famille de fonctions $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ peut converger vers une solution faible du problème de Cauchy, ainsi que la propose le résultat suivant de Lax et Wendroff (1960).

• **Théorème 1. Convergence de la méthode des volumes finis vers une éventuelle solution faible.** On se place dans le cadre fixé ci-dessus d'une famille \mathcal{T}_m de maillages uniformes de \mathbb{R} de pas $\Delta x_m > 0$ et d'une famille Δt_m de pas de temps, pour $m \in \mathbb{N}$. On construit une suite $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de fonctions à l'aide de la relation (3.2), de la condition initiale (3.1) et de la relation de récurrence (3.3). On fait les hypothèses suivantes :

• la fonction de flux numérique $\Phi(\bullet, \bullet)$ est consistante avec le flux f de la loi de conservation :

$$(3.4) \quad \Phi(u, u) = f(u), \quad u \in \mathbb{R}$$

• la suite $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est uniformément bornée dans L^∞ :

$$(3.5) \quad \exists K > 0, \quad \|u^0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq K, \quad \|u_m\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times]0, \infty[)} \leq K, \quad m \in \mathbb{N}$$

• la fonction de flux numérique Φ est lipschitzienne sur $[-K, K]^2$:

$$(3.6) \quad \begin{cases} \exists C > 0, & |\Phi(u_g, u_d) - \Phi(v_g, v_d)| \leq C (|u_g - v_g| + |u_d - v_d|), \\ & u_g, u_d, v_g, v_d \in [-K, K] \end{cases}$$

• il existe $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times]0, \infty[)$ telle que

$$(3.7) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} u_m(x, t) = u(x, t) \quad \text{pp}(x, t).$$

Alors $u(\bullet, \bullet)$ est solution faible du problème de Cauchy avec la condition initiale u^0 .

• **Attention :** Le théorème précédent ne dit pas qu'un schéma de volumes finis conservatif et consistant converge. Il nous dit que **si** la famille de solutions numériques $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge, c'est vers une solution faible du problème de Cauchy. En fait, le schéma de Godunov converge vers la solution faible entropique bornée du problème de Cauchy. La preuve utilise des notions d'analyse fonctionnelle qui sont du domaine d'un cours spécialisé.

• **Définition 2. Consistance avec la condition d'entropie.**

Un schéma de volumes finis explicite à deux points est consistant avec l'inégalité d'entropie si, pour toute entropie mathématique η , il existe une fonction de flux numérique d'entropie ψ consistante avec le flux d'entropie ξ :

$$(3.8) \quad \psi(W, W) = \xi(W), \quad W \in \Omega$$

de sorte que si W_K^n est donné par le schéma numérique, *i.e.*

$$(3.9) \quad \frac{1}{\Delta t} (W_K^{n+1} - W_K^n) + \frac{1}{\Delta x} [\Phi(W_K^n, W_{K+1}^n) - \Phi(W_{K-1}^n, W_K^n)] = 0$$

on a également une inégalité discrète d'entropie

$$(3.10) \quad \frac{1}{\Delta t} [\eta(W_K^{n+1}) - \eta(W_K^n)] + \frac{1}{\Delta x} [\psi(W_K^n, W_{K+1}^n) - \psi(W_{K-1}^n, W_K^n)] \leq 0.$$

Cette définition permet de compléter le théorème de Lax-Wendroff.

• **Proposition 4. Convergence de la méthode des volumes finis vers une éventuelle solution entropique.** Sous les hypothèses du théorème 1, si le schéma (3.3) est consistant avec la condition d'entropie au sens donné en (3.10) et que, pour toute entropie η , le flux numérique ψ est lipschitzien sur l'intervalle $[-K, K]$, alors la limite u introduite à la relation (3.7) est l'unique solution faible entropique bornée du problème de Cauchy.

- **Proposition 5.** Le schéma de Godunov est consistant avec la condition d'entropie. Le schéma de Godunov, défini aux relations (2.13) ou (2.14)-(2.15) est consistant avec la condition d'entropie. Le flux numérique d'entropie $\psi(\bullet, \bullet)$ s'évalue ainsi :

$$(3.11) \quad \psi(W_g, W_d) = \xi(\mathcal{U}(0; W_g, W_d)) , \quad W_g, W_d \in \Omega .$$

Preuve de la proposition 5.

- Soit v une fonction admettant un ensemble fini de points de discontinuité sur l'intervalle $[0, \Delta x]$. On a alors

$$(3.12) \quad \eta\left(\frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} v(\theta) d\theta\right) \leq \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} \eta(v(\theta)) d\theta$$

qui est un cas particulier de l'inégalité de Jensen. Il suffit d'appliquer un argument classique sur les sommes de Riemann : on découpe l'intervalle $[0, \Delta x]$ en m intervalles de longueur $\frac{1}{m}\Delta x$. On a alors

$$(3.13) \quad \frac{1}{\Delta x} \sum_{k=1}^m \frac{\Delta x}{m} v\left(k \frac{\Delta x}{m}\right) \longrightarrow \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} v(\theta) d\theta \quad \text{si } m \rightarrow \infty$$

$$(3.14) \quad \frac{1}{\Delta x} \sum_{k=1}^m \frac{1}{m} \eta\left(v\left(\frac{\Delta x}{m}\right)\right) \longrightarrow \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} \eta(v(\theta)) d\theta \quad \text{si } m \rightarrow \infty .$$

Mais on a aussi l'inégalité de convexité

$$(3.15) \quad \eta\left(\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m v\left(k \frac{\Delta x}{m}\right)\right) \leq \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \eta\left(v\left(k \frac{\Delta x}{m}\right)\right) .$$

A l'aide de (3.13) et (3.14), on passe à la limite dans les deux membres de la relation (3.15), ce qui établit l'inégalité (3.12).

- On applique l'inégalité de Jensen avec

$$(3.16) \quad v(x) = \begin{cases} \mathcal{U}\left(\frac{x}{\Delta t}; W_{K-1}^n, W_K^n\right) , & -\frac{\Delta x}{2} \leq x \leq 0 \\ \mathcal{U}\left(\frac{x}{\Delta t}; W_K^n, W_{K+1}^n\right) , & 0 \leq x \leq \Delta x/2 \end{cases}$$

et compte tenu de la définition (2.13) du schéma de Godunov, on obtient

$$(3.17) \quad \eta(W_K^{n+1}) \leq \frac{1}{\Delta x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \eta(W(x, \Delta t)) dx , \quad K =]x_j, x_{j+1}[.$$

- On utilise maintenant le fait que la solution $W(x, t)$ est solution entropique de la loi de conservation (1.1). On a donc

$$(3.18) \quad \int_K \int_0^{\Delta t} \left[\frac{\partial \eta(W)}{\partial t} + \frac{\partial \xi(W)}{\partial x} \right] dx dt \leq 0$$

soit après intégration par parties

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} [\eta(W(x, \Delta t)) - \eta(W(x, 0))] dx + \int_0^{\Delta t} [\xi(W(x_{j+1}, t)) - \xi(W(x_j, t))] dt \leq 0$$

id est

$$(3.19) \quad \begin{cases} \Delta x \left[\int_{x_j}^{x_{j+1}} \eta(W(x, \Delta t)) \frac{dx}{\Delta x} - \eta(W_K^n) \right] \\ + \Delta t [\xi(\mathcal{U}(0; W_K^n, W_{K+1}^n)) - \xi(\mathcal{U}(0; W_{K-1}^n, W_K^n))] \leq 0 . \end{cases}$$

On déduit de (3.17) et (3.19) (pour $K =]x_j, x_{j+1}[$) :

$$\eta(W_K^{n+1}) \leq \eta(W_K^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\xi(\mathcal{U}(0; W_K^n, W_{K+1}^n)) - \xi(\mathcal{U}(0; W_{K-1}^n, W_K^n)) \right]$$

ce qui établit l'ensemble des relations (3.10) et (3.11). \square

• Nous revenons à la méthode des lignes introduite au début de ce chapitre. On dispose de fonctions $[0, +\infty[\ni t \mapsto W_K(t) \in \Omega$, $K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ qui satisfait au système (infini ?) suivant d'équations différentielles ordinaires

$$(3.20) \quad \frac{dW_K}{dt} + \frac{1}{|K|} [\Phi(W_K, W_{K+1}) - \Phi(W_{K-1}, W_K)] = 0, \quad t \geq 0, \quad K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}$$

pour une fonction de flux $\Phi(\bullet, \bullet)$ à deux points.

• **Définition 2. Consistance avec la condition d'entropie pour la méthode des lignes.** La méthode des lignes (3.20) est **consistante** avec la condition d'entropie si, pour toute entropie mathématique $\eta(\bullet)$, il existe un flux numérique d'entropie $\psi(\bullet, \bullet)$ qui satisfait à la relation de consistance (3.8) de sorte que si $t \mapsto W_K(t)$ est solution du système différentiel (3.20), on a aussi

$$(3.21) \quad \frac{d}{dt} \eta(W_K(t)) + \frac{1}{|K|} [\psi(W_K, W_{K+1}) - \psi(W_{K-1}, W_K)] \leq 0, \quad K \in \mathcal{E}_{\mathcal{T}}.$$

• **Proposition 6. Condition suffisante de consistance entropique pour la méthode des lignes.** Soit $\Omega \ni W \mapsto \eta(W) \in \mathbb{R}$ une entropie mathématique pour la loi de conservation (1.1), $\Omega \ni W \mapsto \pi(W) = \varphi \in \mathbb{R}^N$ le vecteur des variables entropiques, *i.e.*

$$(3.22) \quad \pi_i(W) \equiv \varphi_i = \frac{\partial \eta(W)}{\partial W_i}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad W \in \Omega.$$

Si la fonction de flux numérique satisfait à

$$(3.23) \quad \mathcal{D}_{g,d} \equiv \int_{\varphi_g}^{\varphi_d} d\varphi [\Phi(W(\varphi_g), W(\varphi_d)) - f(W(\varphi))] \leq 0$$

pour tout couple (φ_g, φ_d) de variables entropiques, alors la méthode des lignes est consistante avec la condition d'entropie au sens de la définition 3, et on a un flux numérique d'entropie $\psi(\bullet, \bullet)$ qui peut être calculé par la relation

$$(3.24) \quad \psi(W_g, W_d) = \xi(W_d) + \varphi_d \bullet [\Phi(W_g, W_d) - f(W_d)].$$

• Ce résultat est dû à S. Osher (1984). Rappelons d'abord que l'entropie η est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur Ω strictement convexe, donc l'application $\Omega \ni W \mapsto \pi(W) \in \mathbb{R}^N$ est injective. Elle est donc bijective sur son image ϕ :

$$(3.25) \quad \Omega \ni W \mapsto \pi(W) \in \phi, \quad \pi_i(W) = \frac{\partial \eta(W)}{\partial W_i} \equiv \varphi_i.$$

Une **variable entropique** φ est un "vecteur ligne", alors que l'état W est un "vecteur colonne". On introduit les fonctions duales de l'entropie η et du flux d'entropie ξ :

$$(3.26) \quad \eta^*(\varphi) \equiv \varphi \bullet W(\varphi) - \eta(W(\varphi))$$

$$(3.27) \quad \xi^*(\varphi) \equiv \varphi \bullet f(W(\varphi)) - \xi(W(\varphi))$$

où $\phi \ni \varphi \mapsto W(\varphi) \in \Omega$ est l'application réciproque de π . On a alors facilement

$$(3.28) \quad d\eta^*(\varphi) = d\varphi \bullet W(\varphi)$$

$$(3.29) \quad d\xi^*(\varphi) = d\varphi \bullet f(W(\varphi))$$

puisque $\eta(\bullet)$ est une entropie mathématique, donc $d\xi(W) = d\eta \bullet df = \varphi \bullet df$ avec $d\eta(W) = \varphi \bullet dW$.

Preuve de la proposition 6.

- On remarque d'abord que \mathcal{D}_{gd} peut s'écrire :

$$(3.30) \quad \mathcal{D}_{g,d} = (\varphi_d - \varphi_g) \Phi_{gd} - (\xi^*(\varphi_d) - \xi^*(\varphi_g))$$

avec $\Phi_{gd} \equiv \Phi(W_g, W_d) = \Phi(W(\varphi_g), W(\varphi_d))$ au vu de (3.23) et de la relation (3.29).

- On multiplie la relation (3.20) par $\varphi_K \equiv \eta(W_K)$. Il vient

$$0 = \varphi_K \bullet \left(\frac{dW_K}{dt} + \frac{1}{|K|} [\Phi(W_K, W_{K+1}) - \Phi(W_{K-1}, W_K)] \right)$$

soit

$$(3.31) \quad \frac{d}{dt}[\eta(W_K)] + \frac{1}{|K|} [\varphi_K \bullet \Phi(W_K, W_{K+1}) - \varphi_K \bullet \Phi(W_{K-1}, W_K)] = 0.$$

Or $\varphi_d \Phi_{gd} = \psi_{gd} - \xi_d + \varphi_d f_d$ (cf. (3.24)) qui est égal à $\psi_{gd} - \xi_d^*$ au vu de (3.27). De même,

$$\begin{aligned} \varphi_K \Phi(W_K, W_{K+1}) &= \varphi_{K+1} \Phi(W_K, W_{K+1}) - (\varphi_{K+1} - \varphi_K) \Phi(W_K, W_{K+1}) \\ &= \psi(W_K, W_{K+1}) - \xi^*(\varphi_{K+1}) - (\varphi_{K+1} - \varphi_K) \Phi(W_K, W_{K+1}). \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \varphi_K [\Phi(W_K, W_{K+1}) - \Phi(W_{K-1}, W_K)] &= \\ &= \psi(W_K, W_{K+1}) - \xi^*(\varphi_{K+1}) - (\varphi_{K+1} - \varphi_K) \Phi(W_K, W_{K+1}) - \psi(W_{K-1}, W_K) + \xi^*(\varphi_K) \\ &= \psi(W_K, W_{K+1}) - \psi(W_{K-1}, W_K) - \mathcal{D}_{W_K, W_{K+1}} \end{aligned}$$

et on déduit de (3.31) :

$$(3.32) \quad \frac{d\eta(W_K)}{dt} + \frac{1}{|K|} [\psi(W_K, W_{K+1}) - \psi(W_{K-1}, W_K)] = \frac{1}{|K|} \mathcal{D}_{W_K, W_{K+1}}$$

ce qui établit la propriété. \square

- La condition “de dissipation” (3.23) permet d'assurer que la méthode des lignes fournit un schéma consistant avec la condition d'entropie. La question naturelle qui suit concerne le schéma en temps : garde-t-on un schéma de volumes finis consistant avec la condition d'entropie après discrétisation en temps de l'équation différentielle (3.30) ? La réponse est à priori négative si on utilise un schéma explicite mais E. Tadmor (1987) a montré qu'avec un schéma implicite (donc non linéaire !) d'Euler, *i.e.*

$$(3.33) \quad \frac{1}{\Delta t} (W_K^{n+1} - W_K^n) + \frac{1}{\Delta x} [\Phi(W_K^{n+1}, W_{K+1}^{n+1}) - \Phi(W_{K-1}^{n+1}, W_K^{n+1})] = 0$$

elle est positive. Nous détaillons ce résultat dans la proposition qui suit.

• **Proposition 7. Condition d'entropie pour le schéma en temps implicite.** Soit $\Omega^2 \ni (W_g, W_d) \mapsto \Phi(W_g, W_d) \in \mathbb{R}^N$ une fonction de flux et $(W_K^n)_{K \in \mathcal{E}_T, n \geq 0}$ la solution (supposée exister !) du schéma de volumes finis à deux points implicite en temps (3.33). Si le flux numérique $\Phi(\bullet, \bullet)$ satisfait la condition (3.23), alors on a la condition d'entropie suivante :

$$(3.34) \quad \frac{1}{\Delta t} (\eta(W_K^{n+1}) - \eta(W_K^n)) + \frac{1}{|K|} [\psi(W_K^{n+1}, W_{K+1}^{n+1}) - \psi(W_{K-1}^{n+1}, W_K^{n+1})] \leq 0$$

où $\psi(\bullet, \bullet)$ est le flux numérique d'entropie proposé à la relation (3.24).

Preuve de la proposition 7.

• On écrit la convexité de la fonction η : le point $\eta(W_K^n)$ est "au-dessus" de la direction tangente issue de W_K^{n+1} :

$$(3.35) \quad \eta(W_K^n) \geq \eta(W_K^{n+1}) + \varphi_K^{n+1} \bullet (W_K^n - W_K^{n+1}).$$

On en déduit

$$\eta(W_K^n) \geq \eta(W_K^{n+1}) + \frac{\Delta t}{|K|} \varphi_K^{n+1} \bullet [\Phi(W_K^{n+1}, W_{K+1}^{n+1}) - \Phi(W_{K-1}^{n+1}, W_K^{n+1})]$$

compte tenu de (3.33)

$$(3.36) \quad \eta(W_K^n) \geq \eta(W_K^{n+1}) + \frac{\Delta t}{|K|} [\psi(W_K^{n+1}, W_{K+1}^{n+1}) - \psi(W_{K-1}^{n+1}, W_K^{n+1}) - \mathcal{D}_{K,K+1}^{n+1}]$$

au vu du calcul qui aboutit à (3.32) et la relation (3.36) s'écrit de manière équivalente :

$$(3.37) \quad \frac{1}{\Delta t} [\eta(W_K^{n+1}) - \eta(W_K^n)] + \frac{1}{|K|} [\psi(W_K^{n+1}, W_{K+1}^{n+1}) - \psi(W_{K-1}^{n+1}, W_K^{n+1})] \leq \frac{1}{|K|} \mathcal{D}_{K,K+1}^{n+1}.$$

L'inégalité (3.23) entraîne donc clairement l'inégalité (3.34) et la proposition est démontrée. \square

Résolution numérique du problème de Riemann

Dans ce chapitre, nous étudions la résolution exacte et approchée du problème de Riemann pour la dynamique des gaz. Il s'agit d'un problème posé à une dimension d'espace qui correspond à une condition initiale formée de deux états constants séparés par une discontinuité. Physiquement, cette description mathématique modélise le dispositif expérimental connu sous le nom de "tube à choc". Numériquement, la résolution efficace du problème de Riemann est à la base des schémas décentrés modernes et constitue en quelque sorte "l'équation du second degré" de l'hyperbolicien. Nous adoptons le plan suivant : cas du gaz parfait polytropique dans une première partie, extension aux modèles réactifs dans une seconde partie avant de présenter dans une troisième partie quelques approximations classiques : schéma de Roe et d'Osher, décomposition de flux de Van Leer.

1) Rappels succincts de dynamique des gaz

- On étudie un gaz parfait soumis à un mouvement de vitesse variable dans l'espace et dans le temps. Les inconnues du problème sont donc les grandeurs thermodynamiques du gaz (densité ρ , énergie interne e , température T , pression p). On suppose dans ce qui suit que le gaz étudié est un gaz parfait polytropique, c'est à dire a des chaleurs spécifiques C_v (à volume constant) et C_p (à pression constante) qui ne dépendent pas des variables thermodynamiques de température et de pression ; on note γ leur rapport :

$$(1.1) \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v} (= \text{constante}),$$

et on suppose de plus que le gaz obéit à la loi d'état des gaz parfaits qui peut s'écrire sous la forme suivante :

$$(1.2) \quad p = (\gamma - 1) \rho e.$$

De plus, l'énergie interne et la température sont reliées entre elles par la loi de Joule-Thomson

$$(1.3) \quad e = C_v T.$$

- Le mouvement est décrit dans l'approche proposée par Euler au XVIII^e siècle avec un champ de vitesse inconnu u qui est une fonction de l'espace x et du temps t :

$$(1.4) \quad u = u(x, t).$$

Dans la suite de ce chapitre, nous supposons pour simplifier que l'espace x n'a qu'une dimension ($x \in \mathbb{R}$). Nous avons donc quatre fonctions inconnues (densité, vitesse, pression, énergie interne) reliées entre elles par la loi d'état (1.2). Il convient de trouver trois équations pour fermer le problème.

- La physique nous indique que la masse, l'impulsion et l'énergie totale sont des grandeurs conservées dans la nature, au moins dans le cadre de la physique classique de

Galilée, cadre qui nous sert de référence ici, avec par exemple l'ouvrage de Landau-Lifchitz [LL54]. Quand on écrit la conservation de la masse, de l'impulsion et de l'énergie dans un volume infinitésimal dx advecté d'une célérité $u(x, t)$ exactement égale à la vitesse moyenne des molécules du gaz, on trouve [LL54] les lois de conservation sous la forme d'opérateurs de divergence :

$$(1.5) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) = 0$$

$$(1.6) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p) = 0$$

$$(1.7) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho e \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{1}{2} \rho u^2 + p \right) u + p u \right) = 0.$$

- On introduit alors l'énergie totale E par unité de volume (dite aussi énergie totale spécifique)

$$(1.8) \quad E = \frac{1}{2} u^2 + e$$

et le vecteur W des "variables conservatives" ou plus exactement conservées :

$$(1.9) \quad W = (\rho, \rho u, \rho E)^t.$$

Les lois de conservation (1.5) à (1.7) prennent alors la forme synthétique suivante

$$(1.10) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(W) = 0$$

où le vecteur de flux $W \mapsto F(W)$ admet l'expression :

$$(1.11) \quad F(W) = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho u E + p u)^t.$$

- Les système (1.10) forme un système hyperbolique non linéaire (on dit parfois "quasilinéaire") de lois de conservation. On ne sait quasiment rien dire de l'existence d'une solution $(x, t) \mapsto W(x, t)$ lorsque le temps t n'est plus très petit, même si la condition initiale $W(x, 0)$ est une fonction régulière de la variable d'espace x . Des ondes non linéaires présentes dans le système (1.10) créent des discontinuités, ce qui rend l'étude mathématique générale du système (1.10) très délicate.

- Le second principe de la thermodynamique peut être introduit explicitement pour un gaz parfait polytropique en mouvement. L'entropie spécifique s est une fonction des variables d'état thermodynamique p et ρ :

$$(1.12) \quad s = \frac{\rho_0^\gamma}{p_0} \frac{p}{\rho^\gamma}$$

et on peut voir (avec un calcul élémentaire de quelques lignes laissé au lecteur) que l'entropie mathématique suivante :

$$(1.13) \quad \eta(W) = -\rho s$$

admet un flux d'entropie $\xi(W)$ au sens de la théorie de Lax [Lax71] de la forme

$$(1.14) \quad \xi(W) = -\rho u s.$$

Le second principe de croissance de l'entropie spécifique au cours du temps prend alors la forme "conservative" suivante :

$$(1.15) \quad \frac{\partial}{\partial t} \eta(W) + \frac{\partial}{\partial x} \xi(W) \leq 0.$$

L'inégalité (1.15) est une égalité pour les solutions régulières $W(\bullet, \bullet)$ de la loi de conservation (1.10). Elle est à prendre au sens des distributions pour une solution faible $W(\bullet, \bullet)$ de (1.10).

- L'entropie (1.13) est une fonction strictement convexe des variables conservées si la température est positive (voir par exemple notre preuve dans [Du90b]). On peut introduire la dérivée (de Fréchet)

$$(1.16) \quad d\eta(W) = \phi \bullet dW$$

qui définit les variables entropiques ϕ . Le calcul des variables entropiques est élémentaire à partir de l'expression traditionnelle du second principe. Dans un volume V qui contient une masse M , une énergie interne \mathcal{E} et une entropie S qui est une fonction extensive (homogène de degré un) des variables précédentes, *i.e.*

$$(1.17) \quad S = \Sigma(M, V, \mathcal{E}),$$

la relation différentielle entre ces grandeurs s'exprime à l'aide de la relation classique :

$$(1.18) \quad d\mathcal{E} = T dS - p dV + \mu dM.$$

Les grandeurs globales sont reliées simplement aux grandeurs correspondantes par unité de masse grâce à l'ensemble des relations suivantes :

$$(1.19) \quad M = \rho V, \quad \mathcal{E} = e M, \quad S = s M.$$

L'entropie mathématique $\eta(\bullet)$ s'exprime simplement en avec la fonction $\Sigma(\bullet)$:

$$(1.20) \quad \eta(W) = -\Sigma(\rho, 1, \rho e).$$

Compte tenu des relations (1.8) et (1.18), on dérive facilement la relation (1.20) et il vient

$$(1.21) \quad d\eta(W) = \frac{1}{T} \left(\mu - \frac{u^2}{2} \right) d\rho + \frac{u}{T} d(\rho u) - \frac{1}{T} d(\rho E).$$

2) Problème de Riemann pour le gaz parfait

2.1) Ondes non linéaires autosemblables

- On construit dans un premier temps diverses solutions particulières du problème de Riemann qui, rappelons le, consiste à chercher une solution entropique $W(x, t)$ ($x \in \mathbb{R}$, $t > 0$) du problème suivant :

$$(2.1) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(W) = 0$$

$$(2.2) \quad W(x, 0) = \begin{cases} W_g, & x < 0 \\ W_d, & x > 0. \end{cases}$$

Nous remarquons d'abord que la loi de conservation (2.1) est **invariante par changement d'échelle** d'espace-temps. En effet, sous l'action de la transformation $(x, t) \mapsto T_\lambda(x, t) = (\lambda x, \lambda t)$ paramétrée par $\lambda > 0$, toute solution (faible) $W(\bullet, \bullet)$ de (2.1) donne naissance

à une nouvelle solution faible $T_\lambda W(x, t) \equiv W(T_\lambda(x, t))$. Comme la condition initiale est invariante par dilatation spatiale, c'est à dire

$$(2.3) \quad W(\lambda x, 0) = W(x, 0), \quad \lambda > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 0,$$

l'hypothèse d'unicité de la solution du problème (2.1)(2.2) entraîne facilement que la solution $W(\bullet, \bullet)$ doit être autosemblable, ce qu'on exprime par la relation

$$(2.4) \quad W(\lambda x, \lambda t) = W(x, t), \quad \lambda > 0.$$

La relation (2.4) exprime donc que la solution $W(x, t)$ doit être recherchée de façon autosemblable, c'est à dire comme fonction de $\frac{x}{t}$ seulement (voir à ce sujet Landau-Lifchitz [LL54] par exemple) :

$$(2.5) \quad W(x, t) = U(\xi), \quad \xi = \frac{x}{t}.$$

• On cherche dans un premier temps une solution régulière $U(\xi)$. On injecte la représentation (2.5) dans l'équation (2.1) et on en tire :

$$(2.6) \quad dF(U(\xi)) \bullet \frac{dU}{d\xi} = \xi \frac{dU}{d\xi}.$$

On en déduit que ou bien $\frac{dU}{d\xi}$ est nul, ce qui correspond au cas trivial d'un état constant, ou bien ce vecteur est non nul, et il est nécessairement égal à un vecteur propre $R(W)$ de la matrice jacobienne $dF(W)$, ce dernier vérifiant la relation classique :

$$(2.7) \quad dF(W) \bullet R(W) = \lambda(W) R(W)$$

dans le cas particulier où $W = U(\xi)$. Par identification entre les relations (2.5) et (2.7), on en déduit que $\frac{dU}{d\xi}$ et $R(U)$ sont proportionnels et on en tire également

$$(2.8) \quad \lambda(U(\xi)) = \xi.$$

Nous venons de trouver les conditions qui permettent de construire une **onde de détente**.

• On peut également supposer la fonction $\xi \mapsto U(\xi)$ discontinue en $\xi = \sigma$. Si on note avec un crochet $[]$ la discontinuité d'un champ arbitraire, on dispose alors des relations de Rankine et Hugoniot :

$$(2.9) \quad [F(U)] = \sigma [U]$$

qui reviennent à exprimer que la fonction discontinue $U(\xi)$ est solution (en un sens faible, voir Lax [Lax73] par exemple) de l'équation (2.1). On construit de cette façon une **onde de choc**.

2.2) Ondes de détente

• Nous avons vu au premier paragraphe que la construction d'une onde de détente est associée à une valeur propre du jacobien $dF(W)$. Dans le cas des équations d'Euler d'un gaz parfait polytropique, ces valeurs propres se calculent facilement en utilisant une forme non conservative des équations :

$$(2.10) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$(2.11) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$(2.12) \quad \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} = 0$$

obtenue en faisant apparaître l'entropie spécifique s . Nous posons donc

$$(2.13) \quad Z(W) = (\rho, u, s)^t$$

$$(2.14) \quad B(Z) = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ \frac{c^2}{\rho} & u & \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s}(\rho, s) \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}$$

et les équations d'Euler écrites sous la forme (2.10)-(2.12) s'écrivent matriciellement sous la forme

$$(2.15) \quad \frac{\partial Z}{\partial t} + B(Z) \bullet \frac{\partial Z}{\partial x} = 0.$$

La vitesse du son c utilisée à la relation (2.14) est définie par

$$(2.16) \quad c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho, s)$$

et pour un gaz parfait à chaleurs spécifiques constantes de rapport γ on a :

$$(2.17) \quad c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}.$$

• Il suffit de diagonaliser la matrice $B(Z)$ pour diagonaliser la matrice $dF(W)$, ce qui simplifie notablement les calculs dans la suite. En effet, on peut introduire la variable Z dans l'équation (2.1) :

$$(2.18) \quad dW(Z) \bullet \frac{\partial Z}{\partial t} + dF(W) \bullet dW(Z) \bullet \frac{\partial Z}{\partial x} = 0$$

ce qui, par rapprochement avec la relation (2.15), montre que l'on a

$$(2.19) \quad B(Z) = (dW(Z))^{-1} \bullet dF(W) \bullet dW(Z).$$

Cette relation de conjugaison montre que $\tilde{R}(Z) \equiv (dW(Z))^{-1} \bullet R(W)$ est vecteur propre de la matrice $B(Z)$ pour la valeur propre $\lambda(W)$ si $R(W)$ est un vecteur propre de $dF(W)$ qui vérifie la relation (2.7). La diagonalisation de la matrice $B(Z)$ est alors immédiate. On trouve

$$(2.20) \quad \lambda_1 = u - c < \lambda_2 = u < \lambda_3 = u + c$$

avec des vecteurs propres associés donnés par les relations

$$(2.21) \quad \tilde{R}_1(Z) = \begin{pmatrix} \rho \\ -c \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{R}_2(Z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial s} \\ 0 \\ -c^2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{R}_3(Z) = \begin{pmatrix} \rho \\ c \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nous remarquons que la dérivée de λ_1 (respectivement λ_3) dans la direction \tilde{R}_1 (respectivement \tilde{R}_3) n'est jamais nulle

$$(2.22) \quad d\lambda_1(W) \bullet \tilde{R}_1(W) \neq 0, \quad d\lambda_3(W) \bullet \tilde{R}_3(W) \neq 0, \quad \forall W$$

alors que la situation est opposée pour la seconde valeur propre pour laquelle on a

$$(2.23) \quad d\lambda_2(W) \bullet \tilde{R}_2(W) = 0.$$

Pour cette raison, on dit que les valeurs propres λ_1 et λ_3 définissent des champs **vraiment non linéaires** alors que la valeur propre $\lambda_2 = u$ définit un champ **linéairement**

dégénéré. Les ondes de détente sont toujours associées à des champs vraiment non linéaires et nous détaillons dans le paragraphe suivant l'étude des 1-ondes de détente et des 3-ondes de détente.

- Une 1-onde de détente $\xi \mapsto U(\xi)$ vérifie

$$(2.24) \quad \frac{dZ}{d\xi}(U(\xi)) \text{ proportionnel à } \tilde{R}_1(Z)$$

donc si on intègre le champ de vecteurs $\tilde{R}_1(Z)$ c'est à dire si on résout l'équation différentielle (2.24), on trouve une fonction $Z(\xi)$ qui définit une 1-onde de détente, par exemple pour ξ compris entre deux valeurs limites ξ_0 et ξ_1 . Nous pouvons représenter la solution de l'équation (2.24) dans l'espace des états W ; on a une courbe $\xi \mapsto U(\xi)$ vérifiant la relation (2.24) et la condition initiale

$$(2.25) \quad U(\xi_0) = W_0$$

qui est définie par exemple jusqu'en $\xi = \xi_1$ où l'on atteint l'état final W_1 (voir la figure 1)

$$(2.26) \quad U(\xi_1) = W_1.$$

Dans l'espace-temps (x, t) , nous sommes en présence de trois "régimes" pour les célérités $\xi = \frac{x}{t}$:

$$(2.27) \quad U(\xi) = W_0 \text{ pour } \xi \leq \xi_0 \quad (\text{état constant})$$

$$(2.28) \quad U(\xi) \text{ variable pour } \xi_0 \leq \xi \leq \xi_1 \quad (\text{onde de détente})$$

$$(2.29) \quad U(\xi) = W_1 \text{ pour } \xi \geq \xi_1 \quad (\text{état constant})$$

comme représenté à la figure 2. Notons que la relation (2.8) impose une valeur bien particulière ξ_0 pour la célérité :

$$(2.30) \quad \xi_0 = u(W_0) - c(W_0)$$

ainsi qu'une valeur analogue pour ξ_1 . On peut aussi montrer simplement (voir par exemple Smoller [Sm83]) que l'inégalité

$$(2.31) \quad \xi_0 \leq \xi_1$$

a nécessairement lieu si W_1 est relié à W_0 à travers une 1-onde ou une 3-onde de détente.

Dans le cas d'une 3-onde de détente, les relations (2.27) à (2.29) et (2.31) sont encore valables, mais la relation (2.30) doit être remplacée par

$$(2.32) \quad \xi_0 = u(W_0) + c(W_0)$$

et on a aussi une relation analogue pour ξ_1 .

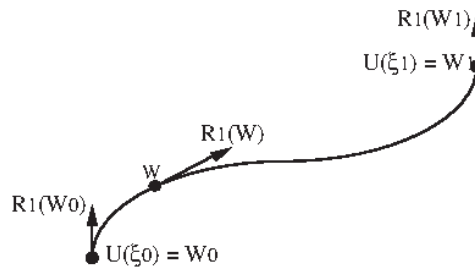


Figure 1 Onde de détente $\xi \mapsto U(\xi)$

associée à la valeur propre $\lambda_1 = u - c$ dans l'espace des états W : la trajectoire est tangente en tout point au vecteur propre $R_1(W)$.

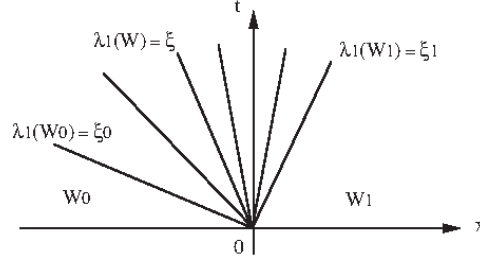


Figure 2 Onde de détente $\xi \mapsto U(\xi)$ associée à la valeur propre $\lambda_1 = u - c$ représentée dans le plan d'espace-temps.

- Le calcul pratique de la courbe $\xi \mapsto U(\xi)$ satisfaisant les relations (2.24) et (2.25) utilise la notion d'invariant de Riemann. Un 1-invariant de Riemann (respectivement un 3-invariant de Riemann) est une fonction $\beta^1(W)$ (respectivement $\beta^3(W)$) qui est toujours constante le long des 1-courbes de détente (respectivement des 3-courbes de détente) et qui vérifie par définition

$$(2.33) \quad d\beta^1(W) \bullet R_1(W) = 0 \quad \forall W$$

(respectivement $d\beta^3(W) \bullet R_3(W) = 0$ pour tout état W). Exprimée en termes des variables non conservatives Z , on vérifie facilement qu'on a la relation analogue

$$(2.34) \quad d\beta^1(Z) \bullet \tilde{R}_1(W) = 0 \quad \forall Z.$$

Compte tenu de la forme particulière (2.21) du vecteur $\tilde{R}_1(W)$, les deux fonctions suivantes

$$(2.35) \quad \beta_1^1(Z) = s$$

$$(2.36) \quad \beta_2^1(Z) = u + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{c(\rho, s)}{\rho} d\rho = u + \frac{2c}{\gamma-1}$$

sont des 1-invariants de Riemann puisqu'ils vérifient tous deux identiquement la relation (2.34). L'expression de deux 3-invariants de Riemann s'obtient de façon analogue :

$$(2.37) \quad \beta_1^3(Z) = s$$

$$(2.38) \quad \beta_2^3(Z) = u - \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{c(\rho, s)}{\rho} d\rho = u - \frac{2c}{\gamma-1}.$$

Les états W sur une 1-onde de détente issue de l'état W_0 sont explicités en pratique en exprimant la relation (2.33), qui revient à dire que les deux fonctions (2.35) et (2.36) sont constantes sur la courbe de détente :

$$(2.39) \quad s = s_0$$

$$(2.40) \quad u + \frac{2c}{\gamma-1} = u_0 + \frac{2c_0}{\gamma-1}$$

$$(2.41) \quad \xi = u - c, \quad \xi \geq u_0 - c_0.$$

- Nous détaillons la forme algébrique des relations reliant un état W à un état initial W_0 par une 1-onde de détente dans un gaz parfait polytropique. On vérifie d'abord simplement (voir les détails dans Courant-Friedrichs [CF48]) que dans une 1-onde de détente, la pression est décroissante et la vitesse croissante :

$$(2.42) \quad p \leq p_0, \quad u \geq u_0, \quad W \text{ issu de } W_0 \text{ par une 1-détente}$$

et en exprimant l'entropie pour un gaz parfait polytropique

$$(2.43) \quad s = \frac{p}{\rho^\gamma}$$

il vient, compte tenu des relations (2.17), (2.39) et (2.40)

$$(2.44) \quad u - u_0 + \frac{\sqrt{1-\mu^4}}{\mu^2} \frac{p_0^{\frac{1}{2\gamma}}}{\sqrt{\rho_0}} \left(p^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - p_0^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right) = 0 \quad (1\text{-détente})$$

avec le paramètre sans dimension μ défini par la relation

$$(2.45) \quad \mu^2 = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}.$$

Le graphe dans le plan (u, p) de la courbe de 1-détente (équation (2.44) sous la condition (2.42)) est donné à la figure 3.

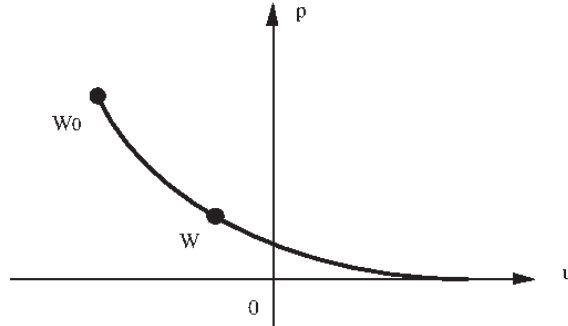


Figure 3 Onde de 1-détente reliant l'état W_0 à l'état W représentée dans le plan (vitesse, pression).

- Dans le cas d'une 3-onde de détente, nous nous intéressons (pour des raisons qui apparaîtront clairement plus loin) à un état W amont relié à un état W_0 **en aval**, ce qui nous donne

$$(2.46) \quad s = s_0$$

$$(2.47) \quad u - \frac{2c}{\gamma-1} = u_0 - \frac{2c_0}{\gamma-1}$$

$$(2.48) \quad \xi = u + c, \quad \xi \leq u_0 + c_0.$$

Il est également facile d'en déduire que la vitesse est croissante dans une 3-onde ainsi que la pression, c'est à dire :

$$(2.49) \quad p \leq p_0, \quad u \leq u_0, \quad W \text{ issu de } W_0 \text{ par une 3-détente.}$$

Un calcul analogue à celui mené pour une 1-onde de détente nous montre que

$$(2.50) \quad u - u_0 - \frac{\sqrt{1-\mu^4}}{\mu^2} \frac{p_0^{\frac{1}{2\gamma}}}{\sqrt{\rho_0}} \left(p^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - p_0^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right) = 0 \quad (3\text{-détente}).$$

Le rapprochement entre les relations (2.44) et (2.50) nous amène à poser

$$(2.51) \quad \psi(p; \rho_0, p_0; \gamma) \equiv \frac{\sqrt{1-\mu^4}}{\mu^2} \frac{p_0^{\frac{1}{2\gamma}}}{\sqrt{\rho_0}} \left(p^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - p_0^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right).$$

Le graphe dans le plan (u, p) de la courbe de 3-détente (équation (2.50) sous la condition (2.49)) est donné à la figure 4.

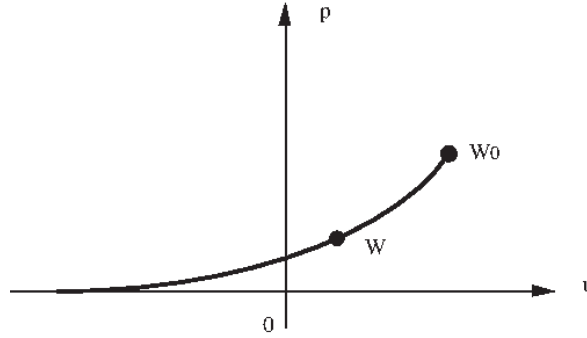


Figure 4 Courbe dans le plan (vitesse, pression) des états W aboutissant à l'état W_0 par l'intermédiaire d'une 3-onde de détente

2.3) Ondes de choc

• Nous cherchons maintenant à définir de façon plus précise les relations qui relient deux états W_0 et W vérifiant les relations de Rankine et Hugoniot (2.9) ainsi qu'une condition d'entropie. Nous remarquons d'abord que l'invariance galiléenne des équations de la dynamique des gaz permet de se placer dans le repère ayant la vitesse σ de la discontinuité, ce qui permet de réécrire les relations (2.9) sous la forme

$$(2.52) \quad [\rho(u - \sigma)] = 0$$

$$(2.53) \quad [\rho(u - \sigma)^2 + p] = 0$$

$$(2.54) \quad \left[\rho(u - \sigma) \left(\frac{(u - \sigma)^2}{2} + e \right) + p(u - \sigma) \right] = 0$$

comme on peut aussi le vérifier à l'aide d'un calcul élémentaire laissé au lecteur. Il est classique d'introduire le flux de masse m qui traverse le choc :

$$(2.55) \quad m = \rho(u - \sigma)$$

et les conditions d'entropie (voir [LL54] ou [CF48]) nous indiquent qu'on a

$$(2.56) \quad m > 0 \quad \text{à travers un 1-choc}$$

$$(2.57) \quad m < 0 \quad \text{à travers un 3-choc.}$$

La numérotation des ondes de choc s'explique par un argument de continuité : si les sauts des relations (2.52) à (2.54) sont faibles, on peut montrer (voir les détails dans Smoller [Sm83] ou Godlewski-Raviart [GR96] par exemple) que la vitesse σ de la discontinuité commune aux états W_0 et W tend vers la valeur commune de $u - c$ pour un 1-choc et de $u + c$ pour

un 3-choc. Le cas où le flux de masse m est nul sera étudié plus loin ; on parle alors de **discontinuité de contact**.

• Nous détaillons maintenant le calcul algébrique nécessaire pour exprimer que l'état aval W obtenu à travers une 1-onde de choc de célérité σ issue d'un état W_0 . On remarque d'abord que la condition d'entropie fournit toute une série d'inégalités :

$$(2.58) \quad \rho > \rho_0, \quad p > p_0, \quad u - c < \sigma < u_0 - c_0, \quad s > s_0$$

pour W issu de W_0 par un 1-choc qui sont utiles dans la suite. Nous notons h et τ l'enthalpie spécifique et le volume spécifique respectivement :

$$(2.59) \quad h = e + \frac{p}{\rho}$$

$$(2.60) \quad \tau = \frac{1}{\rho}.$$

Des relations (2.52) à (2.54) on tire, compte tenu de (2.55), (2.59) et (2.60) :

$$(2.61) \quad [u] = m [\tau]$$

$$(2.62) \quad m^2 [\tau] + [p] = 0$$

$$(2.63) \quad [h] + \frac{m^2}{2} [\tau^2] = 0.$$

Nous particularisons dans la suite au cas du gaz parfait polytropique. En éliminant m des relations (2.62) et (2.63) et en exprimant l'enthalpie en fonction de la pression et du volume spécifique, c'est à dire

$$(2.64) \quad h = \frac{\gamma}{\gamma-1} p \tau$$

nous pouvons après un calcul algébrique simple, exprimer le volume spécifique τ en aval du choc en fonction des données amont, de la pression aval et du paramètre μ introduit en (2.45). On obtient :

$$(2.65) \quad \tau = \frac{p_0 + \mu^2 p}{p + \mu^2 p_0} \tau_0.$$

En reportant cette valeur dans la relation (2.62), nous pouvons exprimer le carré du flux massique à travers le choc :

$$(2.66) \quad m^2 = \frac{p + \mu^2 p_0}{(1-\mu^2) \tau_0}, \quad W \text{ issu de } W_0 \text{ par un 1-choc.}$$

Pour une 1-onde de choc, la relation (2.56) jointe à (2.61) nous permet d'exprimer le saut de vitesse en fonction de la pression et de l'état amont :

$$(2.67) \quad u - u_0 + \sqrt{\frac{1-\mu^2}{\rho_0(p + \mu^2 p_0)}} (p - p_0) = 0$$

pour W issu de W_0 par un 1-choc et nous pouvons, dans le plan (vitesse, pression), tracer (figure 5) la courbe caractérisée par l'équation (2.67) et les inégalités (2.58).

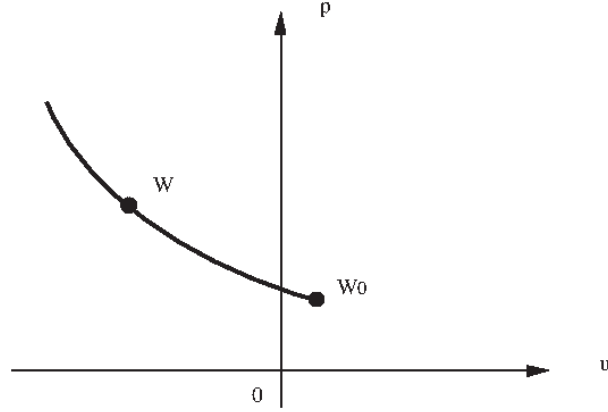


Figure 5 Courbe dans le plan (vitesse, pression) des états W issus de l'état W_0 par une 1-onde de choc.

- Dans le cas d'une 3-onde de choc, les relations (2.62) à (2.66) restent valables, mais au lieu de nous intéresser à un état W issu de W_0 par un 3-choc, nous nous intéressons aux états W qui permettent d'aboutir à W_0 à travers une 3-onde de choc. Il convient donc d'échanger le rôle des lettres avec et sans l'indice zéro dans les relations précédentes. Avec ces dernières hypothèses concernant les notations, un calcul simple montre que la relation (2.66) reste encore valable, et nous avons

$$(2.68) \quad m^2 = \frac{p + \mu^2 p_0}{(1 - \mu^2) \tau_0}, \quad W_0 \text{ issu de } W \text{ par un 3-choc.}$$

La relation qui exprime le saut de vitesse en fonction de l'état aval W_0 et de la pression amont prend alors la forme :

$$(2.69) \quad u - u_0 - \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{\rho_0 (p + \mu^2 p_0)}} (p - p_0) = 0$$

pour W_0 issu de W par un 3-choc. Compte tenu des nouvelles notations, les conditions d'entropie s'écrivent

$$(2.70) \quad \rho_0 < \rho, \quad p_0 < p, \quad u_0 + c_0 < \sigma < u + c, \quad s_0 < s$$

si W_0 est issu de W par un 3-choc. Nous pouvons représenter une 3-onde de choc dans le plan (vitesse, pression) à la figure 6. Par rapprochement entre les relations (2.67) et (2.69), il est naturel de poser

$$(2.71) \quad \varphi(p; \rho_0, p_0; \gamma) \equiv \sqrt{\frac{1 - \mu^2}{\rho_0 (p + \mu^2 p_0)}} (p - p_0)$$

où μ et γ sont reliés par la relation (2.45).

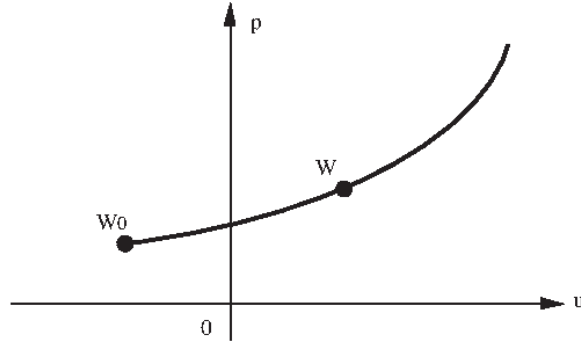


Figure 6 Courbe dans le plan (vitesse, pression) des états W aboutissant à l'état W_0 par une 3-onde de choc.

2.4) Discontinuités de contact

• Au cours de l'étude des ondes de détente, nous avons introduit la notion de champ linéairement dégénéré à la relation (2.23) et le second champ des équations d'Euler est effectivement linéairement dégénéré. Ceci signifie que la seconde valeur propre, c'est à dire la vitesse est un invariant de Riemann :

$$(2.72) \quad \beta_1^2(Z) = u.$$

Compte tenu de l'expression (2.21) des vecteurs propres, il est facile de voir que la pression est un autre 2-invariant, indépendant du premier :

$$(2.73) \quad \beta_2^2(Z) = p.$$

Nous pouvons chercher une onde autosemblable régulière $\xi \mapsto U(\xi)$ solution de l'équation différentielle exprimant la proportionnalité entre $\frac{dU}{d\xi}$ et $R_2(U)$, mais alors la condition nécessaire (2.8) impose à la variable ξ de ne pas varier ! En effet, en dérivant la relation (2.8) par rapport à ξ , nous trouvons $d\lambda_2(U) \bullet \frac{dU}{d\xi} = 1$ alors que cette dernière quantité est identiquement nulle :

$$(2.74) \quad d\lambda_2(U) \bullet \frac{dU}{d\xi} = 0,$$

compte tenu de la linéaire dégénérescence du champ $\lambda_2 \equiv u$. Nous remarquons toutefois que si la fonction $\xi \mapsto U(\xi)$ est une courbe intégrale du champ R_2 , c'est à dire

$$(2.75) \quad \frac{dU}{d\xi} = R_2(U)$$

alors on a entre les états W_0 et W le calcul suivant :

$$\begin{aligned} F(W) - F(W_0) &= \int_{\xi_0}^{\xi} dF(U(\eta)) \bullet \frac{dU}{d\eta} d\eta = \int_{\xi_0}^{\xi} dF(U(\eta)) \bullet R_2(U(\eta)) d\eta \\ &= \int_{\xi_0}^{\xi} \lambda_2(U(\eta)) R_2(U(\eta)) d\eta \\ &= \lambda_2 \int_{\xi_0}^{\xi} R_2(U(\eta)) d\eta = \lambda_2 (W - W_0). \end{aligned}$$

La quatrième étape est une conséquence de la linéaire dégénérescence qui exprime que la vitesse u est constante le long de la 2-courbe définie en (2.75). Nous venons donc de montrer qu'on a une relation de Rankine-Hugoniot

$$(2.76) \quad [F(W)] = \lambda_2 [W]$$

et dans l'espace des états les courbes de détente définies par la relation différentiel-le (2.75) et les courbes de choc trouvées en (2.76) coïncident ! Le second champ, linéairement dégénéré, définit une courbe dans l'espace des états joignant l'état W_0 à l'état W selon les relations

$$(2.77) \quad u = u_0$$

$$(2.78) \quad p = p_0$$

et dans l'espace-temps, ces deux états sont séparés par une discontinuité de célérité σ égale à λ_2 compte tenu de la relation (2.76) :

$$(2.79) \quad \sigma = u = u_0.$$

Une telle onde est appelée **discontinuité de contact** ou **ligne de glissement**. Nous avons

$$(2.80) \quad U(\xi) = \begin{cases} W_0, & \xi < u_0 = \sigma \\ W, & \xi > u_0 = \sigma. \end{cases}$$

Une représentation dans l'espace-temps de cette relation est donnée figure 7 alors que dans le plan (vitesse, pression), les projections des états W_0 et W coïncident, comme établi aux relations (2.77) et (2.78).

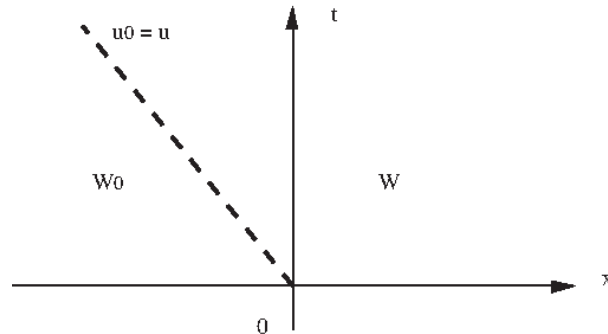


Figure 7 Discontinuité de contact entre les états W_0 et W .

2.5) Résolution du problème de Riemann pour le gaz polytropique

- Pour résoudre le problème (2.1) (2.2) entre les états W_g et W_d , la théorie générale de Lax (voir [Lax73]) s'applique pour la dynamique des gaz. L'idée est de rechercher deux états intermédiaires W_1 et W_2 de sorte que

$$(2.81) \quad W_1 \text{ est issu de l'état } W_g \text{ par une 1-onde}$$

$$(2.82) \quad W_2 \text{ est issu de l'état } W_1 \text{ par une 2-onde}$$

$$(2.83) \quad W_d \text{ est issu de l'état } W_2 \text{ par une 3-onde.}$$

Nous nous restreignons dans une première approche à rechercher la pression et la vitesse commune aux états W_1 et W_2 compte tenu du fait que la 2-onde est une discontinuité de contact :

$$(2.84) \quad u_1 = u_2 = u^*$$

$$(2.85) \quad p_1 = p_2 = p^*.$$

La relation (2.81) exprime que l'état W_1 est issu de l'état W_g par une 1-onde de détente (relation (2.42)) ou une 1-onde de choc (inégalités (2.58)). Nous avons donc :

$$(2.86) \quad \begin{cases} u_1 - u_g + \psi(p_1; \rho_g, p_g; \gamma) = 0, & p_1 < p_g \\ u_1 - u_g + \varphi(p_1; \rho_g, p_g; \gamma) = 0, & p_1 > p_g. \end{cases}$$

De même, nous remarquons également que la relation (2.83) exprime que l'état W_2 aboutit grâce à une 3-onde à l'état W_d , connu. Nous pouvons utiliser une 3-onde de détente entre W_2 et W_d (relation (2.49)) ou une 3-onde de choc (relation (2.70)). Il vient :

$$(2.87) \quad \begin{cases} u_2 - u_d - \psi(p_2; \rho_d, p_d; \gamma) = 0, & p_2 < p_d \\ u_2 - u_d - \varphi(p_2; \rho_d, p_d; \gamma) = 0, & p_2 > p_d. \end{cases}$$

Il suffit d'écrire l'équation (2.84) qui relie les vitesses u_1 et u_2 (*i.e.* $u_1 = u_2 = u^*$) sous la condition (2.85) relative aux pressions p_1 et p_2 ($p_1 = p_2 = p^*$) pour poser complètement le problème (figure 8).

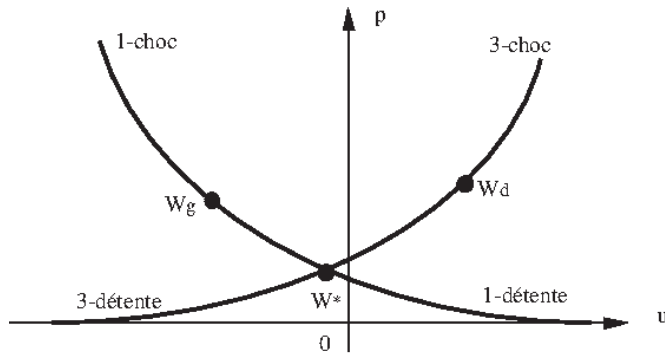


Figure 8 Résolution du problème de Riemann dans le plan (vitesse, pression).

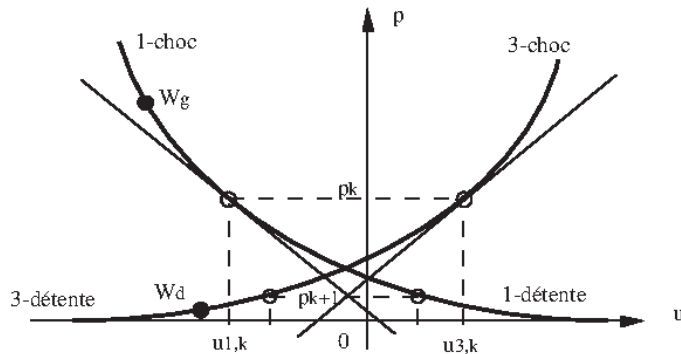


Figure 9 Algorithme de Newton pour la résolution du problème de Riemann dans le plan (vitesse, pression).

- La résolution numérique complète s'effectue par itérations successives (numérotées à l'aide de l'indice k) de type Newton comme illustré à la figure 9 : partant d'une valeur

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DU PROBLÈME DE RIEMANN

de la pression p_k , on calcule facilement à l'aide des relations (2.86) et (2.87) les vitesses $u_{1,k}$ et $u_{3,k}$ associées à la 1-onde et à la 3-onde. Avec l'algorithme de Newton, il suffit de calculer l'intersection des tangentes aux deux points correspondants pour définir une nouvelle valeur p_{k+1} de la pression à l'itération $k+1$. L'initialisation de l'algorithme est obtenue classiquement en recherchant l'intersection des deux ondes de détente, c'est à dire en résolvant le système d'équations aux inconnues (u_O, p_O) suivant :

$$(2.88) \quad \begin{cases} u_O - u_g + \psi(p_O; \rho_g, p_g; \gamma) = 0 \\ u_O - u_d + \psi(p_O; \rho_d, p_d; \gamma) = 0. \end{cases}$$

Ce système d'équations, bien que non linéaire, se résout exactement par un calcul algébrique explicite et la pression p_O est finalement donnée par la relation

$$(2.89) \quad p_O^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} = \frac{\frac{\gamma-1}{2} (u_g - u_d) + c_g + c_d}{c_g \left(\frac{1}{p_g}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} + c_d \left(\frac{1}{p_d}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}},$$

où les vitesses du son c_g et c_d sont calculées aux relations (2.17). Nous remarquons que la relation (2.89) définit effectivement une pression positive p_O si la relation suivante dite de "non apparition du vide" est réalisée :

$$(2.90) \quad u_d - u_g \leq \frac{2}{\gamma-1} (c_g + c_d).$$

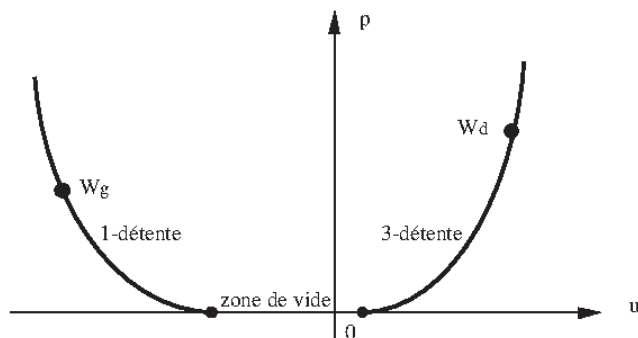


Figure 10 Apparition du vide dans le plan (vitesse, pression)

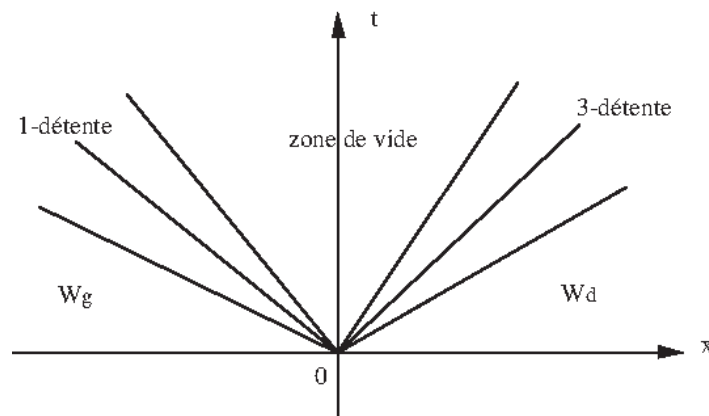


Figure 11 Solution du problème de Riemann comportant du vide

- Dans le cas contraire où la relation (2.90) est en défaut, les deux courbes représentatives des ondes de détente ne se coupent pas dans le plan (vitesse, pression) et il y a apparition du vide (figures 10 et 11). La solution du problème de Riemann, qui n'est plus mathématiquement bien définie au sens de Lax, comporte une zone de vide définie par les célérités ξ telles que

$$(2.91) \quad u_g + \frac{2c_g}{\gamma-1} \leq \xi \leq u_d - \frac{2c_d}{\gamma-1}$$

pour lesquelles la pression est nulle ainsi que la densité alors que la vitesse n'est pas définie. Ce cas d'apparition du vide reste exceptionnel en pratique mais peut être entièrement résolu comme nous venons de le voir.

- Dans le cas où la relation (2.90) est réalisée, l'algorithme de Newton illustré à la figure 9 converge vers un couple (u^*, p^*) formé de la vitesse $u^* \in \mathbb{R}$ et de la pression $p^* > 0$ commune aux deux états intermédiaires W_1 et W_2 . Le calcul de la densité de ces deux états intermédiaires dépend de l'onde utilisée effectivement pour résoudre le problème de Riemann. Ainsi, si la pression p^* est inférieure à la pression p_g , la 1-onde est une onde de détente et l'entropie se conservant, on a :

$$(2.92) \quad \rho_1 = \left(\frac{p^*}{p_g}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \rho_g, \quad p^* < p_g$$

et dans le cas contraire, on utilise une 1-onde de choc et compte tenu de la relation (2.65), on a finalement :

$$(2.93) \quad \rho_1 = \frac{p^* + \mu^2 p_g}{p_g + \mu^2 p^*} \rho_g, \quad p^* > p_g.$$

On peut alors préciser la valeur σ_1 de la célérité du 1-choc :

$$(2.94) \quad \sigma_1 = u_g - \sqrt{\frac{p^* + \mu^2 p_g}{(1-\mu^2)\rho_g}}.$$

Pour la 3-onde, on a une discussion analogue qui conduit finalement aux relations suivantes :

$$(2.95) \quad \rho_3 = \left(\frac{p^*}{p_d}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \rho_d, \quad p^* < p_d$$

$$(2.96) \quad \rho_3 = \frac{p^* + \mu^2 p_d}{p_d + \mu^2 p^*} \rho_d, \quad p^* > p_d$$

$$(2.97) \quad \sigma_3 = u_d + \sqrt{\frac{p^* + \mu^2 p_d}{(1-\mu^2)\rho_d}}.$$

L'allure de la solution générale dans l'espace-temps d'un problème de Riemann pour la dynamique des gaz est illustrée à la figure 12.

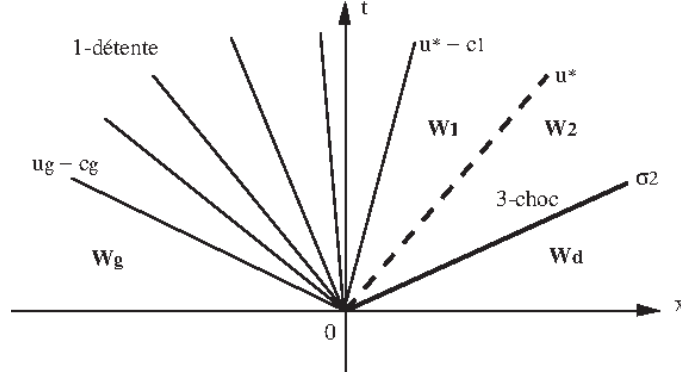


Figure 12 Solution du problème de Riemann dans l'espace-temps.

- Il importe pour la suite de pouvoir préciser l'état (variable) dans une 1-onde de détente en fonction de la célérité $\xi = \frac{x}{t}$. Compte tenu de la relation (2.8), nous avons d'une part :

$$(2.98) \quad u - c = \xi$$

et compte tenu de la relation (2.40), il vient facilement, pour $u_g - c_g < \xi < u_1 - c_1$:

$$(2.99) \quad u = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} u_g + \frac{2}{\gamma+1} c_g + \frac{2}{\gamma+1} \xi$$

$$(2.100) \quad c = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} u_g + \frac{2}{\gamma+1} c_g - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \xi.$$

L'élimination de la pression entre les relations (2.17) et (2.39) permet d'en déduire la densité. De même pour une 3-onde de détente, la relation (2.8) permet d'exprimer la 3-célérité en fonction de la donnée ξ :

$$(2.101) \quad u + c = \xi$$

et l'invariant (2.47) permet de calculer la vitesse u et la vitesse du son c en fonction des données :

$$(2.102) \quad u = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} u_d - \frac{2}{\gamma+1} c_d + \frac{2}{\gamma+1} \xi$$

$$(2.103) \quad c = -\frac{\gamma-1}{\gamma+1} u_d + \frac{2}{\gamma+1} c_d + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \xi$$

sous les conditions $u_2 + c_2 < \xi < u_d + c_d$.

3) Solution approchée pour les fluides réactifs.

- Dans le cas où le fluide étudié n'est plus un gaz parfait mais un gaz soumis à des réactions chimiques, le problème de Riemann se pose encore sous la forme (2.1) (2.2), mais les équations d'Euler de fluide parfait (sans viscosité) prennent une forme plus complexe. On peut avoir

$$(3.1) \quad W = (\rho, \rho u, \rho v, E)^t$$

pour un gaz réel à l'équilibre chimique dans le cas de deux dimensions d'espace ou bien

$$(3.2) \quad W = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, \rho u, \rho v, E)^t$$

pour un mélange de n espèces en interaction chimique. Le premier cas est en un sens le plus délicat à traiter car nous avons à faire à une loi d'état de gaz réel qui peut être non triviale, alors que le second conduit à un système hyperbolique associé à la seconde modélisation qui se ramène en général à un mélange de gaz parfaits polytropiques vus à la première partie de ce chapitre. Nous commençons par ce second modèle pour terminer le paragraphe par le premier.

3.1) Mélange idéal de gaz parfaits polytropiques

• Nous supposons que le fluide se compose de n espèces sans interactions chimiques (celles-ci sont reportées dans un second membre non différentiel). La loi de pression vérifie donc la loi de Dalton

$$(3.3) \quad p = \sum_{j=1}^n p_j$$

et chaque pression partielle satisfait à une loi polytropique :

$$(3.4) \quad p_j = (\gamma_j - 1) \rho_j e_j$$

où l'on a décomposé l'énergie totale volumique E en énergie cinétique, plus n énergies internes volumiques correspondant à chaque espèce chimique :

$$(3.5) \quad E = \frac{1}{2} \rho u^2 + \sum_{j=1}^n \rho_j e_j = \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho e.$$

On suppose de plus un équilibre thermodynamique local atteint, c'est à dire l'existence d'une unique température pour toutes les espèces et nous introduisons la chaleur spécifique à volume constant pour la j ième espèce c_{vj} . On a alors :

$$(3.6) \quad e_j = c_{vj} T.$$

On peut voir simplement (c.f. Abgrall [Ab88] ou Mehlman [Me91]) que la pression est reliée simplement à l'énergie interne selon la relation

$$(3.7) \quad p = (\gamma - 1) \rho e$$

avec un coefficient γ calculé par :

$$(3.8) \quad \gamma = \frac{\sum_{j=1}^n \rho_j c_{vj} \gamma_j}{\sum_{j=1}^n \rho_j c_{vj}},$$

ce qui permet d'associer à chaque état W un "gamma équivalent" très voisin, en ce qui concerne les expressions algébriques, de celui rencontré pour un gaz parfait polytropique.

• Le système hyperbolique monodimensionnel associé aux $(n + 3)$ inconnues s'écrit :

$$(3.9) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(W) = 0.$$

Il admet deux ondes vraiment non linéaires (numérotées par analogie avec le paragraphe précédent 1 et 3), et une onde linéairement dégénérée (numéro 2) de multiplicité $(n + 1)$.

Nous avons

$$(3.10) \quad \lambda_1 = u - c \quad ; \quad \lambda_2 = u \quad ; \quad \lambda_3 = u + c$$

avec une vitesse locale du son c qui est encore obtenue en utilisant la relation classique (2.17)

$$(3.11) \quad c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$$

mais où γ est cette fois calculé à l'aide de l'expression (3.8). Les invariants de Riemann pour ces trois champs sont de la forme

$$(3.12) \quad \text{1-invariants de Riemann : } \frac{\rho_1}{\rho}, \dots, \frac{\rho_n}{\rho}, \frac{p}{\rho^\gamma}, u + \frac{2c}{\gamma-1}, v$$

$$(3.13) \quad \text{2-invariants de Riemann : } u, p$$

$$(3.14) \quad \text{3-invariants de Riemann : } \frac{\rho_1}{\rho}, \dots, \frac{\rho_n}{\rho}, \frac{p}{\rho^\gamma}, u - \frac{2c}{\gamma-1}, v.$$

- Les concentrations $\frac{\rho_i}{\rho}$ ainsi que la vitesse tangentielle sont constantes à travers les ondes vraiment non linéaires et compte tenu de la relation (3.8), il en est de même pour le rapport γ . Les ondes de détente restent donc calculées par une relation analogue à (2.44) ou (2.50) à ceci près que le coefficient γ est maintenant associé à l'état de référence W_0 :

$$(3.15) \quad u - u_0 + \psi(p; \rho_0, p_0; \gamma_0) = 0, \quad W \text{ issu de } W_0 \text{ par une 1-détente}$$

$$(3.16) \quad u - u_0 - \psi(p; \rho_0, p_0; \gamma_0) = 0, \quad W_0 \text{ issu de } W \text{ par une 3-détente}$$

où la fonction $\psi(\bullet; \bullet, \bullet; \bullet)$ a été définie en (2.51). En ce qui concerne les ondes de choc, les relations de Rankine et Hugoniot relatives au système (3.9) montrent facilement qu'on a :

$$(3.17) \quad \left[\frac{\rho_i}{\rho} \right] = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$(3.18) \quad [v] = 0$$

ce qui entraîne que le rapport γ défini en (3.8) reste constant à travers un 1-choc ou un 3-choc. On peut alors dérouler l'algèbre présentée dans la première partie (voir par exemple Fernandez-Larrourou [FL89] ou Mehlman [Me91]) et dans le plan (vitesse, pression), les relations (2.67) et (2.69) se généralisent sous la forme

$$(3.19) \quad u - u_0 + \varphi(p; \rho_0, p_0; \gamma_0) = 0, \quad W \text{ issu de } W_0 \text{ par un 1-choc}$$

$$(3.20) \quad u - u_0 - \varphi(p; \rho_0, p_0; \gamma_0) = 0, \quad W_0 \text{ issu de } W \text{ par un 3-choc}$$

où la fonction $\varphi(\bullet; \bullet, \bullet; \bullet)$ est définie par les relations (2.71) et (2.45).

- La résolution du problème de Riemann n'offre alors pas de difficulté. Il s'agit, étant donnés deux états W_g et W_d , de résoudre le système d'équations relatives aux 2-invariants de Riemann (u^*, p^*) des deux états intermédiaires W_1 et W_2 . C'est une généralisation simple du système (2.86)(2.87) et nous avons :

$$(3.21) \quad \begin{cases} u^* - u_g + \psi(p^*; \rho_g, p_g; \gamma_g) = 0, & p^* < p_g \\ u^* - u_g + \varphi(p^*; \rho_g, p_g; \gamma_g) = 0, & p^* > p_g \\ u^* - u_d - \psi(p^*; \rho_d, p_d; \gamma_d) = 0, & p^* < p_d \\ u^* - u_d - \varphi(p^*; \rho_d, p_d; \gamma_d) = 0, & p^* > p_d \end{cases}$$

L'algorithme présenté à la figure 9 s'applique sans modification. Une fois déterminés la vitesse u^* et la pression p^* des états intermédiaires, on détaille la 1-onde et la 3-onde par des généralisations simples des relations (2.92) à (2.103). La résolution exacte du problème

de Riemann que nous venons de décrire pour la partie hyperbolique (c'est à dire le fluide figé) de la dynamique des gaz réactifs s'implémente alors sans difficulté.

3.2) Gaz réel à l'équilibre chimique

- La résolution du problème de Riemann pour les équations d'Euler d'un gaz à l'équilibre chimique a été abordée par Colella-Glaz [CG85]. La différence essentielle par rapport au paragraphe précédent est qu'on remplace la loi de Dalton (3.3) par une donnée de la loi de pression à l'aide de tables de Mollier

$$(3.22) \quad p = f(\rho, \rho e).$$

On introduit classiquement les dérivées χ et κ de la loi de pression (3.22) :

$$(3.23) \quad \chi = \frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho, \rho e)$$

$$(3.24) \quad \kappa = \frac{\partial p}{\partial(\rho e)}(\rho, \rho e).$$

Pour un gaz parfait polytropique, on a simplement :

$$(3.25) \quad \chi = 0, \quad \kappa = \gamma - 1, \quad \text{gaz parfait polytropique}$$

et dans le cas général, on établit aisément la relation suivante :

$$(3.26) \quad c^2 = \chi + \kappa h$$

- De façon pratique, les tables thermodynamiques les plus classiques (Hilsenrath et Klein [HK65]) ne fournissent pas une relation fonctionnelle explicite de type (3.22) et il faut, pour calculer la pression, résoudre un problème relatif à la température. Un effort récent (Srinivasan-Tannehill-Weilmuenster [STW87]) a permis de tabuler sous forme de fonctions élémentaires la loi de pression (3.22) pour l'air de l'atmosphère terrestre. Mais si les fonctions suivantes ont bien été tabulées

$$(3.27) \quad s = s(\rho, \rho e), \quad \frac{h}{e} = \frac{h}{e}(\rho, \rho e), \quad c = c(\rho, \rho e),$$

il n'en est pas de même pour les coefficients χ et κ qui interviennent explicitement dans la jacobienne du flux par exemple (voir les détails dans Montagné-Yee-Vinokur [MYV87] par exemple). Le simple calcul des ondes non linéaires est très délicat ; Colella et Glaz ont proposé une méthode itérative pour manipuler les ondes de choc, et nous avons [Du89a] développé un algorithme de calcul des ondes de détente à partir du diagramme de Mollier de Srinivasan.

- En pratique, des formules très simples issues du gaz parfait polytropique semblent suffisantes et nous proposons d'appliquer sans modification l'adaptation qui est rigoureuse pour les mélanges de gaz parfaits. Les détentes sont donc calculées par les relations (3.15)(3.16) et les chocs par (3.19)(3.20). Mais il reste le problème de définir la valeur du "gamma équivalent" puisque la relation (3.8) n'a maintenant plus de sens. Nous proposons, en suivant une remarque de Mehlman [Me91] de choisir un coefficient γ local grâce à la relation

$$(3.28) \quad \gamma = \frac{\rho c^2}{p}.$$

En effet, dans ce cas, la valeur limite du rapport des pentes est lié à la vitesse du son :

$$(3.29) \quad \frac{p - p_0}{u - u_0} \quad \text{tend vers} \quad \begin{cases} -\rho_0 c_0 & \text{pour une 1-onde} \\ \rho_0 c_0 & \text{pour une 3-onde} \end{cases}$$

et l'introduction d'une valeur calculée grâce à la relation (3.28) dans les formules (3.15), (3.16), (3.19) et (3.20) permet d'approcher correctement les tangentes aux différentes ondes (on le voit facilement pour les ondes de choc grâce aux relations (2.71) et (2.45)) donc de représenter correctement l'acoustique du gaz. Ceci termine notre étude relative au schéma de Godunov sur les gaz réels.

4) Quelques approximations classiques

- Nous avons vu que la résolution exacte du problème de Riemann conduit à un algorithme itératif même pour le cas simple d'un gaz parfait polytropique, avec utilisation de fonctions exponentielles et de racines carrées, ce qui en fait un algorithme réputé cher. De très nombreuses tentatives ont été proposées pour résoudre de façon approchée le problème de Riemann. Nous nous concentrons d'abord sur le cas du gaz parfait polytropique puis dirons quelques mots du cas d'un gaz réel. L'idée la plus simple consiste à mettre en œuvre l'approximation acoustique (Godunov [GZIKP79]), ce qui revient dans l'algorithme de résolution à remplacer les 1 et 3-ondes par leurs tangentes au points W_g et W_d respectivement. Cette idée naturelle est efficace dans plus de quatre vingt dix pour cent des interfaces d'un maillage, mais pour les ondes fortement non linéaires, cette idée ne suffit pas et il faut pousser plus loin l'algorithme de Newton-Raphson. Cet argument nous semble *in fine* très efficace, mais n'est pas toujours le plus populaire, contrairement aux idées de Roe, Osher et Van Leer que nous exposons maintenant.

4.1) Flux de Roe

- Dans son article de 1981, P. Roe [Roe81] a proposé d'introduire une famille de matrices pour linéariser la décomposition de la discontinuité entre deux états W_g et W_d . Une matrice de Roe $A(W_g, W_d)$ satisfait par définition aux trois propriétés suivantes :

$$(4.1) \quad F(W_d) - F(W_g) = A(W_g, W_d) \bullet (W_d - W_g)$$

$$(4.2) \quad A(W, W) = dF(W)$$

$$(4.3) \quad A(W_g, W_d) \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{R}.$$

Le problème général de la recherche d'une matrice de Roe est mal posé (sauf dans le cas scalaire !) et Harten, Lax et Van Leer [HLV83] ont montré que si le système hyperbolique étudié admet une entropie mathématique (ce qui est toujours le cas pour les lois de conservation issues de modèles physiques classiques), on peut construire une matrice de Roe satisfaisant aux propriétés (4.1) à (4.3). Mais cette matrice n'a qu'un intérêt théorique car elle est incalculable en pratique !

- Le point clef dans l'étude de Roe est d'avoir montré qu'on peut calculer la matrice $A(W_g, W_d)$ sous la forme

$$(4.4) \quad A(W_g, W_d) = dF(\Psi(W_g, W_d))$$

où $\Psi(\bullet, \bullet)$ est une moyenne non linéaire entre les états W_g et W_d qui est définie par les relations devenues classiques

$$(4.5) \quad u^* = \frac{\sqrt{\rho_g} u_g + \sqrt{\rho_d} u_d}{\sqrt{\rho_g} + \sqrt{\rho_d}}$$

$$(4.6) \quad v^* = \frac{\sqrt{\rho_g} v_g + \sqrt{\rho_d} v_d}{\sqrt{\rho_g} + \sqrt{\rho_d}}$$

$$(4.7) \quad H^* = \frac{\sqrt{\rho_g} H_g + \sqrt{\rho_d} H_d}{\sqrt{\rho_g} + \sqrt{\rho_d}}$$

où H représente l'enthalpie totale

$$(4.8) \quad H = \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma - 1}.$$

Des relations (4.5) à (4.8) on déduit la vitesse du son c^* de l'état moyen $\Psi(\bullet, \bullet)$ et l'on dispose alors d'assez de données pour évaluer la jacobienne (4.4). La simplicité des relations (4.5) à (4.8), jointe à la relation classique sur la viscosité numérique d'un schéma décentré, permet de calculer le flux $\Phi(W_g, W_d)$ entre les deux états par la relation

$$(4.9) \quad \Phi(W_g, W_d) = \frac{1}{2} [F(W_g) + F(W_d) - |A(W_g, W_d)| \bullet (W_d - W_g)].$$

La valeur absolue de matrice au second membre de la relation (4.9) se manipule de façon explicite (voir par exemple Yee [Ye87]). Un défaut du schéma de Roe est sa non consistance possible avec la condition d'entropie : des chocs stationnaires non physiques peuvent être capturés par le schéma, ce qu'il faut éviter. Pour remédier à ce défaut, Harten [Ha83] a proposé d'utiliser dans l'expression de la valeur absolue lors du calcul de la matrice de Roe

$$(4.10) \quad |A(W_g, W_d)| = \sum_j |\lambda_j| R_j L_j$$

(R_j est le j -ième vecteur propre à droite de la matrice de Roe $A(W_g, W_d)$ et L_j le j -ième vecteur propre à gauche) une approximation parabolique $Q(\lambda)$ de la fonction "valeur absolue" (figure 13) de façon à ajouter un peu de viscosité au schéma. On pose

$$(4.11) \quad Q(\lambda) = \begin{cases} |\lambda|, & |\lambda| \geq \delta \\ \frac{1}{2} \frac{\lambda^2 + \delta^2}{\delta}, & |\lambda| \leq \delta. \end{cases}$$

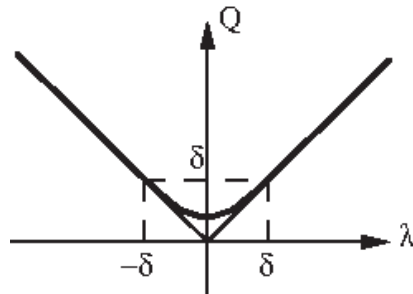


Figure 13 Approximation de la fonction "valeur absolue" de Harten

- Le défaut de cette correction, efficace par ailleurs, est qu'elle introduit un paramètre δ qu'il faut régler avec soin (voir par exemple Yee [Ye87]). Avec G. Mehlman [DM96],

nous avons proposé une nouvelle correction **non paramétrée** pour la méthode de Roe, fondée sur une détection des points soniques où le schéma initial de Roe ne dissipe pas assez d'entropie. Nous décomposons le saut $W_d - W_g$ sur la base des vecteurs propres R_j de la matrice de Roe $A(W_g, W_d)$:

$$(4.12) \quad W_d - W_g = \sum_k \alpha_k R_k$$

et cette décomposition nous permet de définir des états intermédiaires W_j en ne prenant que les premiers termes du second membre de (4.12) :

$$(4.13) \quad W_j - W_g = \sum_{k \leq j} \alpha_k R_k$$

Nous évaluons la j -ième valeur propre λ_j entre les états W_{j-1} et W_j , c'est à dire pour la j -ième onde. Celle-ci est sonique si l'on a :

$$(4.14) \quad \lambda_j(W_{j-1}) < 0 < \lambda_j(W_j).$$

Dans ce cas, on remplace la fonction de flux non pas par une approximation linéaire comme le propose Roe, mais par une approximation **non linéaire** fondée sur une interpolation de Hermite de degré trois qui respecte la j -ième valeur propre. On peut alors résoudre **exactement** un problème de Riemann auxiliaire pour le flux approché, ce qui conduit à une correction d'entropie non paramétrée, non itérative et qui n'est de fait employée que très ponctuellement. Nous renvoyons à notre article [DM96] ou à la synthèse plus récente [Du2K] pour le détail des relations algébriques à mettre en œuvre pour cette correction.

4.2) Flux d'Osher

- Parallèlement aux travaux de Roe, S. Osher [Os81] a cherché à généraliser au cas vectoriel un travail mené avec B. Engquist [EO80] sur les schémas de décomposition de flux pour les lois de conservation scalaires :

$$(4.15) \quad \Phi(W_g, W_d) = F^+(W_g) + F^-(W_d)$$

où l'on a décomposé la fonction de flux $F(\bullet)$ sous la forme

$$(4.16) \quad F(W) \equiv F^+(W) + F^-(W)$$

avec l'hypothèse

$$(4.17) \quad dF^+(W) \geq 0, \quad dF^-(W) \leq 0.$$

De cette façon, S. Osher a abouti à une vision assez compliquée et abstraite d'un schéma qui peut (pour la variante "P" ayant une interprétation physique) s'interpréter grâce à l'acquis sur le problème de Riemann, ce que nous développons dans la suite. L'idée de base est d'utiliser les ondes de détente là où un choc est physiquement présent, c'est à dire si

$$(4.18) \quad \xi_0 \equiv \lambda(W_0) > \lambda(W_1) \equiv \xi_1.$$

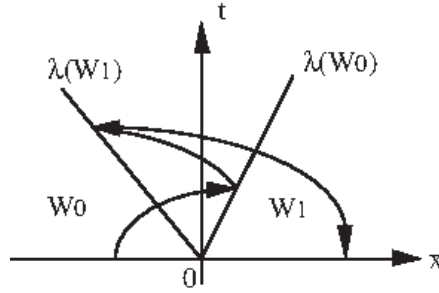


Figure 14 Onde de détente multivaluée

Dans ce cas, on ne peut pas construire comme aux relations (2.27) à (2.29) une solution physique $W(\xi)$ dans l'espace-temps par juxtaposition d'un état constant W_0 , d'une région d'onde de détente où $W(\xi)$ varie, puis d'un nouvel état constant W_1 . Mais on décide de la faire tout de même ! On utilise sans modification les relations (2.27) à (2.29) malgré l'hypothèse (4.18). Nous disposons donc de **trois** états $W(\xi)$ lorsque $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_0$, donc d'une onde de détente multivaluée illustrée à la figure 14. Le flux de cette "solution" est calculé par le flux de Engquist-Osher :

$$(4.19) \quad F(\xi) = F(W_0) - F(W(\xi)) + F(W_1), \quad \xi_1 \leq \xi \leq \xi_0,$$

où l'état $W(\xi)$ varie effectivement "en sens contraire" d'une détente traditionnelle, ce qui explique le signe "moins" qui lui est affecté à la relation (4.19). Il est donc possible depuis Osher [Os81] de n'utiliser que des ondes de détente pour résoudre de façon approchée le problème de Riemann. Nous avons développé dans [Du87] les relations qui généralisent la relation (4.19) au cas de la dynamique des gaz. Le point clef qui rend le flux d'Osher également populaire est son caractère non itératif. En effet, le calcul de l'intersection des ondes de détente, posé en (2.88) se résout exactement grâce à la relation (2.89) pour un gaz parfait polytropique.

4.3) Décomposition de flux de Van Leer

• Au lieu d'approcher la solution du problème de Riemann comme l'ont cherché Roe et Osher, B. Van Leer [Vl82] a essayé de trouver une décomposition du flux des équations d'Euler du type (4.15)(4.16). Et il y est effectivement parvenu ! Les formules sont très simples ; on introduit le nombre de Mach

$$(4.20) \quad M = \frac{u}{c}$$

et l'on pose

$$(4.21) \quad F^+(W) = F(W) \quad \text{si } M \geq 1$$

$$(4.22) \quad F^-(W) = F(W) \quad \text{si } M \leq 1.$$

Nous détaillons la décomposition pour les trois composantes de F^+ dans le cas transsonique :

$$(4.23) \quad F^+(W) = (F_m^+(W), F_x^+(W), F_e^+(W))$$

$$(4.24) \quad F_m^+(W) = \rho c \left(\frac{M+1}{2} \right)^2$$

$$(4.25) \quad F_x^+(W) = \rho c \left(\frac{M+1}{2} \right)^2 \frac{(\gamma-1)u + 2c}{\gamma}$$

$$(4.26) \quad F_e^+(W) = \rho c \left(\frac{M+1}{2} \right)^2 \frac{((\gamma-1)u + 2c)^2}{2(\gamma^2-1)}$$

et le calcul de F^- s'en déduit immédiatement grâce à la relation (4.16). Le flux de Van Leer permet effectivement de résoudre avec succès des problèmes de dynamique des gaz comportant des chocs forts et il a servi de brique de base à la version initiale du code FLU3C développé à l'ONERA et à l'Aérospatiale. Mais pour l'approximation de couches limites visqueuses ou de discontinuités de contact, une diffusion trop importante est introduite par le schéma, ce qui n'est pas le cas si on utilise les flux de Godunov, Roe ou Osher.

4.4) Généralisation aux gaz réels

- Si on généralise les idées précédentes aux gaz réels qui sont mélanges de gaz parfaits ou à l'équilibre chimique, on se heurte à diverses difficultés. En ce qui concerne les flux de Roe tout d'abord, Montagné, Yee et Vinokur [MYV87] ont cherché à généraliser la relation (4.4) pour les gaz réels à l'équilibre chimique mais il est alors nécessaire d'être très précis avec les coefficients χ et κ des relations (3.23) à (3.26). A notre avis, cette approche n'est pas entièrement satisfaisante compte tenu du manque d'information présente dans les diagrammes de Mollier. Pour les mélanges de gaz parfaits, Abgrall [Ab89] et Fernandez-Larrourou [FL89] ont proposé un algorithme qui peut entraîner des concentrations négatives ou bien supérieures à l'unité dans certains cas extrêmes. Enfin, G. Mehlman a proposé de s'abstraire de l'hypothèse (4.4) pour la construction d'une matrice de Roe pour les gaz réactifs et a adapté le solveur de Colella-Glaz. En pratique (voir les détails dans la thèse de Mehlman [Me91]), il suffit de remplacer les ondes de détente par des chocs (c'est la solution duale du choix de Osher !) et de résoudre le système d'équations

$$(4.27) \quad \begin{cases} u_M - u_g + \varphi(p_M; \rho_g, p_g; \gamma_g) = 0 \\ u_M - u_d - \varphi(p_M; \rho_d, p_d; \gamma_d) = 0. \end{cases}$$

Ce système a une solution unique sous une condition d'apparition du vide un peu plus restrictive que la condition (2.90) mais il est résolu par un algorithme de Newton-Raphson très efficace en partant de la valeur $p = 0$! Le calcul détaillé du schéma de Roe peut alors être extraordinairement simplifié et de plus la positivité des fractions massiques est garantie théoriquement. Dès que l'on a à prendre en compte plus de quatre espèces, le caractère itératif de la résolution du système (4.27) n'est pas pénalisant devant le peu de calculs complémentaires que demande cette version du schéma.

- Pour les flux d'Osher, Stoufflet [St89] et Abgrall-Montagné [AM89] ont proposé un schéma simplifié consistant à résoudre l'intersection des courbes de détente approchées grâce au système

$$(4.28) \quad \begin{cases} u_O - u_g + \psi(p_O; \rho_g, p_g; \gamma_g) = 0 \\ u_O - u_d - \psi(p_O; \rho_d, p_d; \gamma_d) = 0. \end{cases}$$

Mais les propositions qui ont été faites pour l'évaluation des coefficients γ_g et γ_d semblent moins fondées que la relation (3.28) que nous préconisons ici. Là encore, le prix à payer lors du passage au multi-gaz réel est le caractère itératif du schéma approché. Notons que

Abgrall et Montagné ont introduit une initialisation très robuste de l'algorithme de Newton dans ce cas.

- Enfin, la décomposition de flux de Van Leer nous semble peu adaptée aux gaz réels même si elle est très populaire. En effet, elle est fondée sur un calcul algébrique sur des polynômes par rapport au coefficient γ , calcul qui est plus difficile à justifier pour un gaz réel quelconque. Toutefois B. Larrouturou [La91] a développé des corrections pour assurer la positivité de toutes les fractions massiques, lesquelles sont très efficaces en pratique. Nous préférons utiliser la décomposition de Sanders-Prendergast [SP74] moins satisfaisante du point de vue de ses propriétés théoriques mais fondée physiquement sur une discussion relative au nombre de Mach qui garde toujours une signification claire.
- Nous retiendrons sur ce chapitre sur l'approximation du problème de Riemann que le fait de manipuler des solutions particulières des équations de la dynamique des fluides compressibles pour construire des schémas numériques donne aux méthodes ainsi construites de très bonnes propriétés de robustesse. Pour améliorer la précision, on fait appel en général à l'extension au second ordre proposée par Van Leer [V179].

5) Références bibliographiques

- [Ab88] R. Abgrall. Généralisation du solveur de Roe pour le calcul d'écoulements de mélanges de gaz parfaits de concentrations variables, *La Recherche Aérospatiale*, volume 6, pages 32-43, 1988.
- [AM89] R. Abgrall, J.L. Montagné. Généralisation du schéma d'Osher pour le calcul d'écoulements de mélanges de gaz parfaits de concentrations variables et de gaz réels, *La Recherche Aérospatiale*, volume 4, pages 1-13, 1989.
- [CG85] P. Collela, H. Glaz. Efficient Solution Algorithm for the Riemann Problem for Real Gases, *Journal of Computational Physics*, volume 59, pages 264-289, 1985.
- [CF48] R. Courant, K.O. Friedrichs. *Supersonic Flow and Shock Waves*, Interscience, New-York, 1948.
- [Du87] F. Dubois. Boundary Conditions and the Osher Scheme for the Euler Equations of Gas Dynamics, *Rapport interne n° 170 du Centre de Mathématiques Appliquées de l'Ecole Polytechnique*, Palaiseau, septembre 1987.
- [Du89a] F. Dubois. Evaluation du flux d'Osher pour l'air à l'équilibre chimique, *Rapport Aérospatiale*, Programme Tebaldi, Code Euler 3D en hypersonique et supersonique élevé, S/DT/MI n° 41 747, avril 1989.
- [Du90b] F. Dubois. Concavité de l'entropie thermostatique et convexité de l'entropie mathématique au sens de Lax, *La Recherche Aérospatiale*, n° 1990-3, pages 77-80, mai 1990.
- [DM96] F. Dubois, G. Mehlman. A Non-Parameterized Entropy Correction for Roe's Approximate Riemann Solver, *Numerische Mathematik*, volume 73, pages 169-208, 1996.
- [Du2K] F. Dubois. An introduction to finite volumes, Rapport de recherche CNAM-IAT n° 342/2000, octobre 2000, *Unesco EOLSS, Encyclopedia of Life Support System, Encyclopedia of mathematical sciences, Numerical methods and algorithms in mathematical physics, An introduction to finite volume methods*, (O. Pironneau and V. Shaidurov Eds).

- [EO80] B. Engquist, S. Osher. Stable and Entropy Satisfying Approximations for Transonic Flow Calculations, *Mathematics of Computation*, volume 34, n° 149, pages 45-75, 1980.
- [FL89] G. Fernandez, B. Larrouturou. Hyperbolic Schemes for Multi-component Euler Equations, 2nd International Conference on Hyperbolic Problems, Aachen, *Notes on Numerical Fluid Mechanics*, Vieweg, volume 24, pages 128-138, 1989.
- [GR96] E. Godlewski, P.A. Raviart. *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, Applied Mathematical Sciences, vol. 118, Springer, New York, 1996.
- [GZIKP79] S.K. Godunov, A. Zabrodine, M. Ivanov, A. Kraiko, G. Prokopov. *Résolution numérique des problèmes multidimensionnels de la dynamique des gaz*, Editions de Moscou, 1979.
- [Ha83] A. Harten. High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws, *Journal of Computational Physics*, volume 49, pages 357-393, 1983.
- [HLV83] A. Harten, P.D. Lax, V. Van Leer. On Upstream Differencing and Godunov-type Schemes for Hyperbolic Conservation Laws, *SIAM Review*, volume 25, n° 1, pages 35-61, janvier 1983.
- [HK65] J. Hilsenrath, M. Klein. Tables of Thermodynamic Properties of Air in Chemical Equilibrium Including Second Virial Corrections from 1 500 K to 15 000 K, *AEDC-TR-65-58*, mars 1965.
- [LL54] L. Landau, E. Lifchitz. *Fluid Mechanics*, 1954, Editions de Moscou, 1967.
- [La91] B. Larrouturou. How to Preserve the Mass Fractions Positivity when Computing Compressible Multi-component Flows, *Journal of Computational Physics*, volume 95, n° 1, pages 59-84, 1991.
- [Lax73] P.D. Lax. Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves, *Conf. Board in Mathematical Sciences*, volume 11, SIAM, Philadelphia, 1973.
- [Me91] G. Mehlman. *Etude de quelques problèmes liés aux écoulements en déséquilibre chimique et thermique*, Thèse de l'Ecole Polytechnique, novembre 1991.
- [MYV87] J.L. Montagné, H.C. Yee, M. Vonokur. Comparative Study of High-Resolution Shock-Capturing Schemes for a Real Gas, *NASA TM 100004*, juillet 1987.
- [Os81] S. Osher. Solution of Singular Perturbation Problems and Hyperbolic Systems of Conservation Laws, in *Math. Studies n° 47* (Axelsson-Franck-Van der Sluis Eds.), pages 179-205, North Holland, Amsterdam, 1981.
- [Roe81] P. Roe. Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes, *Journal of Computational Physics*, volume 43, pages 357-372, 1981.
- [SP74] R.H. Sanders, K.H. Prendergast. The Possible Relation of the 3-kiloparsec Arm to Explosions in the Galactic Nucleus, *the Astrophysical Journal*, volume 188, pages 489-500, mars 1974.
- [Sm83] J. Smoller. *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer Verlag, New York, 1983.
- [STW87] S. Srinivasan, J.C. Tannehill, K.J. Weilmuenster. Simplified Curve Fits for the Thermodynamic Properties of Equilibrium Air, *NASA R.P. n° 1181*, août 1987.

- [Vl82] B. Van Leer. Flux Vector Splitting for the Euler Equations, 8th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, Aachen, *Lectures Notes in Physics*, Springer Verlag, pages 507-512, 1982.
- [Ye87] H.C. Yee. Upwind and Symmetric Shock-Capturing Schemes, *NASA TM 89464*, 1987.