le cnam

Département de Mathématiques et Statistiques

Codes, matrices, graphes et automates (MVA004)

Devoir 2
à rendre pour la séance numéro 7, le 27 mars 2019

Exercice 1 - Un code linéaire

On code une suite de bits en la divisant en blocs de deux bits auxquels on adjoint trois bits de contrôle de la manière suivante : si le bloc est ab, le mot de code sera $abcab$ avec $c = a + b$.

a) Vérifier que ce code est linéaire et écrire sa matrice génératrice.

b) Etablir la liste des mots de code.

c) Déterminer la distance minimale du code.

d) Ce code est-il parfait?

e) On reçoit les messages $m = 11010$ et $m' = 01110$. A-t-on à faire à des mots de code?

f) Pour chacun des mots de code, noté c, déterminer $m + c$ et en déduire le mot de code c_1 tel que le poids de $m + c$ soit le plus faible possible.

g) De même, pour chacun des mots de code c, déterminer $m'+c$. Est-il possible d'en déduire un mot de code c_2 tel que le poids de $m' + c$ soit minimal ?

h) Le mot de code transmis est c_0 ; or on reçoit m. Sachant que la probabilité pour qu'un bit donné ait été mal transmis est $p = \frac{1}{10}$, quelle est la probabilité pour que $c_0 \neq c_1$?

Exercice 2 - Codes de longueur 15

On considère un code $C(15, 8)$ de longueur $n = 15$ et de dimension $k = 8$. On transmet les mots codés au moyen d'un canal symétrique (sans mémoire) et la probabilité pour qu'un bit soit mal transmis vaut $p = 0,02$.

a) On transmet un mot de code. Quelle est la probabilité pour que :

- (i) le mot soit bien transmis ?
- (ii) seul le premier bit soit mal transmis ?
- (iii) le mot soit transmis avec exactement une erreur ?
- (iv) le mot soit transmis avec exactement deux erreurs ?
- (v) le mot soit transmis avec au moins trois erreurs ?

b) Vérifier qu'un code $C(15, 8)$ peut corriger une erreur. Est-ce alors un code parfait ?

c) On suppose que ce code corrige une erreur. Quelle est la probabilité pour qu'un message soit mal corrigé ?

d) Déterminer la valeur de k pour qu'un code $C(15, k)$ puisse être parfait en corrigeant une erreur.

e) Vérifier qu'un code $C(15, 8)$ peut corriger deux erreurs. Est-ce alors un code parfait?

f) On suppose que ce code corrige deux erreurs. Quelle est la probabilité pour qu'un message soit bien corrigé ?

On rappelle l'inégalité de Hamming. Si un code $C(n, k)$ corrige t erreurs, alors
$\sum_{p=0}^{t} \binom{n}{p} \leq 2^r$, où $n = k + r$.

François Dubois, 13 mars 2019.