

ENIN (7)

Schéma décentré et schéma de Lax-Wendroff pour l'équation d'advection:

- Nous nous donnons  $a > 0$  et cherchons à approcher la solution du problème à valeur initiale et à la limite pour l'équation d'advection:

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$(2) \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < L$$

$$(3) \quad u(0, t) = g(t), \quad t > 0.$$

Rappelons que pour  $a < 0$ , il convient de remplacer (3) par  $u(L, t) = w_L(t)$  pour  $t > 0$ . Nous nous donnons un pas d'espace  $\Delta x$  tel que  $\Delta x = \frac{L}{J}$ ,  $J$  entier  $\geq 1$  et  $\Delta t > 0$ . On pose

$$(4) \quad \sigma = a \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

nombre de Courant. Friedrichs-Lewy. On approche  $u(j \Delta x, n \Delta t)$  par  $u_j^n$ ,  $0 \leq j \leq J$ ,  $n \geq 0$ .

- La méthode des caractéristiques nous permet de calculer exactement  $u(j \Delta x, (n+1) \Delta t)$  en fonction de  $u$  au temps  $n \Delta t$ :

$$(5) \quad u(j \Delta x, (n+1) \Delta t) = u(j \Delta x - a \Delta t, n \Delta t)$$

Si  $a\Delta t$  n'est pas un multiple de  $\Delta x$ , ce que nous supposons par la suite, le point  $j\Delta x - a\Delta t$  n'est pas un point de la grille et il faut interpoler  $u(j\Delta x - a\Delta t, m\Delta t)$  à partir des valeurs  $u^n$  au temps  $m\Delta t$ . Supposons pour fixer les idées

$$(6) \quad 0 \leq \sigma = \frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq 1.$$

• Le schéma décentré consiste à interpoler  $u(j\Delta x - a\Delta t, m\Delta t)$  à partir de  $u_j^n$  et  $u_{j-1}^n$ . On écrit d'abord le point  $j\Delta x - a\Delta t$  comme combinaison convexe de  $j\Delta x$  et  $(j-1)\Delta x$ :

$$(7) \quad j\Delta x - a\Delta t = (1-\sigma)j\Delta x + \sigma(j-1)\Delta x.$$

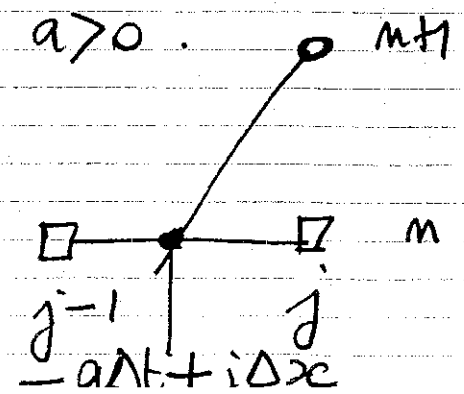
Puis on utilise le fait que l'interpolé affine d'un triangle est égal au barycentre des valeurs interpolées pour proposer le schéma dit "décentré avant":

$$(8) \quad u_j^{n+1} = (1-\sigma)u_j^n + \sigma u_{j-1}^n, \quad j \leq J, \quad m \geq 0.$$

• On peut aussi écrire (8) sous la forme

$$(9) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0, \quad a > 0.$$

ce qui revient à écrire un schéma explicite pour l'équation d'évolution (1) et à



discrétiser  $\frac{\partial u}{\partial x}$  par le schéma décentré  
"à gauche":

$$(b) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) (j \Delta x, n \Delta t) \approx \frac{1}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n);$$

ou décentré en allant chercher l'uniformité (ici le gradient) en allant "du côté des caractéristiques", comme illustré à la figure de la page précédente. Si  $a < 0$ , on change le sens des caractéristiques, on remplace le schéma décentré à gauche par le schéma décentré à droite

$$(n) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) (j \Delta x, n \Delta t) \approx \frac{1}{\Delta x} (u_{j+1}^n - u_j^n)$$

et le schéma décentré avant s'écrit dans ce cas

$$(12) u_j^{n+1} = (1 + \sigma) u_j^n - \sigma u_{j+1}^n, \quad \sigma \leq 0.$$

- Dans les conditions nominales, ie (b), le schéma (9) est stable. Le coefficient d'amplification  $g(\sigma, \xi)$  pour une onde  $u_j^n \equiv \hat{u}(k) \exp(i j \xi)$ ,  $\xi = k \Delta x$  s'écrit  $u_j^{n+1} \equiv g(\sigma, \xi) u_j^n$ , avec

$$(13) g(\sigma, \xi) = 1 - \sigma(1 - e^{-i\xi}).$$

on peut prouver graphiquement que  $|g(\sigma, \xi)| \leq 1$  pour tout  $\xi \in \mathbb{R}$  dès que  $0 \leq \sigma \leq 1$ . On peut aussi le prouver analytiquement:

$$\begin{aligned}
 |g(\sigma, \xi)|^2 &= (1 - \sigma(1 - \cos \xi))^2 + (\sigma \sin \xi)^2 & 4 \\
 &= 1 - 2\sigma \cdot 2 \sin^2 \frac{\xi}{2} + 4\sigma^2 \sin^4 \frac{\xi}{2} + 4\sigma^2 \sin^2 \frac{\xi}{2} \cos^2 \frac{\xi}{2} \\
 &= 1 - 4\sigma \sin^2 \frac{\xi}{2} + 4\sigma^2 \sin^2 \frac{\xi}{2} \\
 &= 1 - 4\sigma(1 - \sigma) \sin^2 \frac{\xi}{2}
 \end{aligned}$$

$\leq 1$  pour tout  $\xi$  si et seulement si  $\sigma(1-\sigma) \geq 0$   
 c'est à dire si et seulement si (6) a lieu. A  
 titre d'exercice, on peut vérifier que le schéma  
 (12) est stable si et seulement si  $-1 \leq \sigma \leq 0$ .

- On montre expérimentalement que le schéma  
 décentré (9) est précis du premier ordre. L'erreur

$\varepsilon_j^n \equiv |u(j\Delta x, n\Delta t) - u_j^n|$  tend vers zéro  
 de façon asymptotiquement proportionnelle à  
 $\Delta x$ :

$$(14) \quad \varepsilon_j^n = O(\Delta x).$$

Ceci peut être insuffisant en pratique et le  
 schéma de Lax-Wendroff, tout en restant  
 explicite, permet d'être plus précis. On calcule  
 d'abord  $u(x, \Delta t + t)$  via un développement de  
 Taylor au second ordre:

$$(15) \quad u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\Delta t^3).$$

Puis on utilise la relation (1) pour remplacer  $\frac{\partial u}{\partial t}$

et  $\frac{\partial u}{\partial t^2}$  par des dérivées en espace. Si on a  $\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x}$  de manière claire, on a également

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( -a \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -a \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) = -a \frac{\partial}{\partial x} \left( -a \frac{\partial u}{\partial x} \right) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

on construit le schéma en utilisant des dérivées approchées par des différences finies centrées :

$$(16) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) (j \Delta x, n \Delta t) \approx \frac{1}{2 \Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

$$(17) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) (j \Delta x, n \Delta t) \approx \frac{1}{\Delta x^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n).$$

• le schéma de Lax Wendroff est donc défini, compte tenu de (15)(16)(17), par

$$(18) u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{a \Delta t}{2 \Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{1}{2} \left( \frac{a \Delta t}{\Delta x} \right)^2 (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

en trouvant le reste. Il est explicite (on calcule  $u_j^{n+1}$  au pas de temps suivant à partir de trois valeurs à l'instant précédent), compact (seules les valeurs  $u_{j \pm 0,1}^n$  sont utiles pour évaluer  $u_j^{n+1}$ ), précis à l'ordre 2 :

$$(19) \varepsilon_j^n = O(\Delta x^2)$$

comme on peut s'en rendre compte expérimentalement (voir le TP n°3). Il est également stable

pour

$$(20) \sigma^2 \leq 1$$

comme le montre le calcul suivant.

• Si on injecte une onde  $u_j^n = \hat{u}(k) e^{ij k \Delta x}$  6  
 au membre de droite de (18), on a  $u_j^{n+1} = g(\sigma, \xi) u_j^n$ ,  
 avec

$$(21) \quad g(\sigma, \xi) = 1 - \frac{\sigma}{2} (e^{i\xi} - e^{-i\xi}) + \frac{\sigma^2}{2} (e^{i\xi} - 2 + e^{-i\xi})$$

Donc  $g(\sigma, \xi) = 1 - i\sigma \sin \xi + \sigma^2 (\cos \xi - 1)$  et

$$\begin{aligned} |g(\sigma, \xi)|^2 &= (1 - \sigma^2 (1 - \cos \xi))^2 + \sigma^2 \sin^2 \xi \\ &= 1 - 2\sigma^2 \cdot 2 \sin^2 \frac{\xi}{2} + 4\sigma^4 \sin^4 \frac{\xi}{2} + 4\sigma^2 \sin^2 \frac{\xi}{2} \cos^2 \frac{\xi}{2} \\ &= 1 - 4\sigma^2 (1 - \sigma^2) \sin^2 \frac{\xi}{2} \end{aligned}$$

qui reste  $\leq 1$  tant que  $\sigma^2 (1 - \sigma^2) \geq 0$ , c'est-à-dire  
 que (20) a lieu.

Jubois avril 07.  
 mai 2008.