EMMN 9 et 10

Schéma implicite centré pour l'advection - diffusion.

- Nous cherchons à approcher le modèle mono dimensionnel de l'advection - diffusion

(1) $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$

avec $\mu > 0$, à l'aide d'un schéma aux différences finies. Rappelons qu'on se donne des conditions aux limites en $x = 0$ et $x = L$:

(2) $u(0,t) = g(t), \quad u(L,t) = w(t), \quad t > 0$

et une condition initiale à $t = 0$

(3) $u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq L$

- Pour décrire le schéma aux différences, on se donne un entier $J \geq 1$, on pose

(4) $\Delta x = \frac{L}{J}$, pas d'espace,

et on cherche $u_j^n \simeq u(j\Delta x, n\Delta t)$, $0 \leq j \leq J$, $n \geq 1$ entiers. A $t = 0$, la condition initiale

(3) permet sans difficulté de poser

(5) $u_j^0 = u_0(j\Delta x), \quad 0 \leq j \leq J$.

On suppose dans la suite qu'à $n \geq 0$ donné, tous les $(u_j^n)_{0\leq j\leq J}$ sont connus. On cherche donc les $(u_j^{n+1})_{0\leq j\leq J}$ à l'instant suivant.

- La première remarque est que pour $j=0$ et $j=J$, les conditions aux limites (2) permettent d'évaluer u_0^{n+1} et u_J^{n+1} sans calcul algébrique :

(6) $u_0^{n+1} = g^{n+1} \equiv g((n+1)\Delta t), \quad n \geq 0$

(7) $u_J^{n+1} = w^{n+1} \equiv w((n+1)\Delta t), \quad n \geq 0$.

- On décide d'utiliser un schéma centré pour la dérivée spatiale d'ordre 1 :

(8) $$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_j \simeq \frac{1}{2\Delta x}\left(u_{j+1} - u_{j-1}\right)$$

ainsi que pour la dérivée spatiale d'ordre deux

(9) $$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j \simeq \frac{1}{\Delta x^2}\left(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}\right),$$

relations utilisables pour $1 \leq j \leq J-1$.

On décide également d'utiliser un schéma en temps d'Euler implicite [voir le cours n°2]. On transforme donc le modèle continu (1) en un modèle discret

$$(10)\quad \frac{1}{\Delta t}\left(u_j^{n+1} - u_j^{n}\right) + \frac{a}{2\Delta x}\left(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}\right) - \frac{\mu}{\Delta x^2}\left(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}\right) = 0\,, \quad 1 \leq j \leq J-1.$$

- L'inconnue $z_j \equiv u_j^{n+1}$ satisfait donc à

$$(11)\quad \begin{cases} z_j + \frac{\sigma}{2}\left(z_{j+1} - z_{j-1}\right) - \varsigma\left(z_{j+1} - 2z_j + z_{j-1}\right) = u_j^n \\ \qquad \sigma = \frac{a\Delta t}{\Delta x}\,,\ \varsigma = \frac{\mu \Delta t}{\Delta x^2}\,, \quad 1 \leq j \leq J-1 \end{cases}$$

soit pour $j = 1$:

$$(12)\quad (1+2\varsigma)\, z_1 + \left(\frac{\sigma}{2} - \varsigma\right) z_2 = u_1^n + \left(\frac{\sigma}{2} + \varsigma\right) g^{n+1}$$

pour $2 \leq j \leq J-2$:

$$(13)\quad -\left(\frac{\sigma}{2} + \varsigma\right) z_{j-1} + (1+2\varsigma)\, z_j + \left(\frac{\sigma}{2} - \varsigma\right) z_{j+1} = u_j^n$$

et enfin pour $j = J-1$:

$$(14)\quad -\left(\frac{\sigma}{2} + \varsigma\right) z_{J-2} + (1+2\varsigma)\, z_{J-1} = u_{J-1}^n + \left(-\frac{\sigma}{2} + \varsigma\right) w^{n+1}.$$

Le vecteur $(z) \equiv (z_j)_{1 \leq j \leq J-1}$ est solution d'un système linéaire

(15) $\quad A z = f$

de matrice A d'ordre $(J-1)\times(J-1)$ donnée par :

$$(16)\quad A = \begin{pmatrix} 1+2\rho & \frac{\sigma}{2}-\rho & & & 0 \\ -\frac{\sigma}{2}-\rho & 1+2\rho & \ddots & & \\ & -\frac{\sigma}{2}-\rho & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \frac{\sigma}{2}-\rho \\ 0 & & & -\frac{\sigma}{2}-\rho & 1+2\rho \end{pmatrix}$$

qui est <u>tridiagonale</u> Le second membre f se calcule à l'aide de (12), (13) et (14) :

$$(17)\quad f = \left(u_1^n + \left(\frac{\sigma}{2}+\rho\right) g^{n+1},\ u_2^n, \dots, u_{J-2}^n,\ u_{J-1}^n + \left(-\frac{\sigma}{2}+\rho\right) w^{n+1}\right)$$

- Le système (15) se résout à l'aide d'une factorisation de Gauss $A = LU$ qui fait intervenir deux matrices tridiagonales dont l'une est inférieure (L) et l'autre supérieure (U). Cet algorithme a été décrit en détail au chapitre précédent. Nous y renvoyons le lecteur.

- Nous analysons maintenant la stabilité de l'algorithme (11). Pour cela, nous suivons une analyse modale de type "Von Neumann". Nous supposons que $(u_j^n)_{j\in\mathbb{Z}}$ est une onde de vecteur k :

(18) $$u_j^n = \hat{u}(k)\, e^{ik(j\Delta x)}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Nous admettons qu'alors u_j^{n+1} est une onde de même forme (18) obtenue par simple multiplication par un facteur $g(\sigma,\varsigma,\xi)$, où

(19) $$\xi = k\Delta x :$$

(20) $$u_j^{n+1} = g(\sigma,\varsigma,\xi)\, u_j^n.$$

Avec (18)(20) on déduit $u_j^{n+1} = e^{i\xi} u_j^{n+1}$, donc le membre de gauche de (11) prend alors dans ce cas la forme

$$z_j + \frac{\sigma}{2}\left(e^{i\xi} - e^{-i\xi}\right) z_j - \varsigma\left(e^{i\xi} - 2 + e^{-i\xi}\right) z_j =$$

$$= \left(1 + i\sigma \sin\xi - \varsigma(2\cos\xi - 2)\right) z_j$$

$$= \left[\left(1 + 4\varsigma \sin^2\frac{\xi}{2}\right) + i\sigma \sin\xi\right] z_j$$

On déduit de ce calcul :

(21) $$g(\sigma,\varsigma,\xi) = \frac{1}{1 + 4\varsigma \sin^2\frac{\xi}{2} + i\sigma\sin\xi}.$$

on déduit de ce calcul

(22) $|g(\sigma, \delta, \xi)| \leq 1 \quad \forall \delta > 0, \forall \sigma \in \mathbb{R}, \forall \xi \in \mathbb{R}$

et venons de montrer la

Proposition ①

Le schéma implicite centré est inconditionnellement stable au sens de Von Neumann.

Nous pouvons donc en pratique utiliser de grands pas de temps Δt, sans se limiter aux relations de stabilité $\left|\frac{a\Delta t}{\Delta x}\right|^2 \leq 2 \frac{\mu \Delta t}{\Delta x^2} \leq 1$ nécessaires pour la version explicite du schéma.

Paris, 7 mai 2007.

Dubois.