CSC111

Conservatoire National des Arts et Métiers
Centre d'enseignement de Paris
Spécialité Mathématiques

Modélisation Numérique pour l'Ingénieur

Présentation

Ce cours donné au second semestre se compose depuis 2007-2008 de 15 séances de 4 heures chacune afin de constituer un ensemble homogène de 60 heures d'enseignement, soit 6 ECTS. le programme traité comporte les équations différentielles, divers modèles de l'ingénieur dans le cas simple d'une dimension d'espace : équation de la chaleur, advection, advection-diffusion et une introduction au calcul numérique des valeurs propres et des vecteurs propres. Chaque séance est consacrée à la transmission du cours et aux exercices d'application et/ou aux travaux pratiques. Nous indiquons dans ce qui suit l'emploi du temps qui a été effectivement réalisé.

Séance 1

Cours : Solution exacte et schéma d'Euler explicite pour l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \lambda\, u(t) = 0$ associée à la condition initiale $u(t = 0) = u_0$. Stabilité et monotonie du schéma d'Euler explicite.

Travaux pratiques : Connection au système, l'essentiel de ce qu'il faut savoir en “unix”, “octave” et “gnuplot”. Graphe d'une exponentielle. Mise en œuvre du schéma d'Euler explicite.

Séance 2

Cours : Stabilité du schéma d'Euler explicite. Schémas d'Euler implicite et de Crank-Nicolson pour une équation de relaxation.

Travaux pratiques : Mise en œuvre des trois schémas numériques (Euler explicite, Euler implicite, Crank-Nicolson) pour un retour à l'équilibre. Enoncé du TP1 et travail individuel.

TP1. On s'intéresse au modèle qui consiste à chercher $u(t)$ de sorte que $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + 10\, u(t) = 0$ pour $t > 0$ avec $u(0) = 1$. On se propose de calculer $V \equiv u(t = 0,2)$ avec une bonne précision.
1) Proposer (en justifiant votre réponse) une valeur de Δt et utiliser le schéma d'Euler explicite pour calculer une première valeur approchée de V que l'on notera v_1.

2) Quelle valeur w_1 obtient-on si on remplace le schéma d'Euler explicite par le schéma d'Euler implicite ?
3) Même question avec z_1 calculé avec le schéma de Crank-Nicolson.
4) Calculer les erreurs $|v_1 - V|$, $|w_1 - V|$, $|z_1 - V|$.
5) On remplace le pas de temps Δt par $\Delta t/2$. On calcule une nouvelle valeur approchée avec cette nouvelle discrétisation au moyen des trois schémas précédents. On remarque qu'on doit alors utiliser deux fois plus de pas de temps. On note les trois résultats obtenus v_2, w_2, et z_2 respectivement. Calculer les nouvelles erreurs $| \, v_2 - V \, |$, $| \, w_2 - V \, |$ et $| \, z_2 - V \, |$. Que remarquez-vous ?

Séance 3

Cours : Equation de la chaleur à une dimension d'espace.
Travaux pratiques : Travail sur le TP 1.

Séance 4

Cours : Mise en œuvre numérique d'un schéma explicite pour l'équation de la chaleur.
Travaux pratiques : Enoncé du TP2 et travail individuel.

TP2. On approche la solution $u(x,\, t)$ du modèle de la chaleur à une dimension spatiale : $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ pour $0 < x < 1$ et $t > 0$. La contion initiale choisie est $u(x,\, 0) = 16\, x^2\, (1-x)^2$ et on prend une condition limite de Dirichlet homogène : $u(0,\, t) = u(1,\, t) = 0$ pour $t > 0$. On utilise pour cela le schéma aux différences finies explicite classique $\frac{1}{\Delta t}\, (u_j^{n+1} - u_j^n) - \frac{1}{\Delta x^2}\, (\, u_{j+1}^n - 2\, u_j^n + u_{j-1}^n\,) = 0$. En utilisant des grilles de plus en plus fines ($0 \leq j \leq J$, $20 \leq J \leq 400$ typiquement), le nombre de pas de temps adéquats ($0 \leq n \leq N$ avec N à déterminer) et en laissant **fixe** le paramètre $\zeta \equiv \Delta t / \Delta x^2$, proposer une valeur approchée pour le nombre $u\big(\frac{1}{4},\, \frac{1}{200}\big)$ pour $x = \frac{1}{4}$ et $t = \frac{1}{200}$. La réponse devra être justifiée **très** soigneusement.

Séance 5

Cours : Stabilité du schéma explicite pour l'équation de la chaleur
Travaux pratiques : Fin du TP numéro 1 et travail sur le TP 2.

Séance 6

Cours : Méthode des caractéristiques pour l'équation d'advection
Travaux pratiques : Travail sur le TP 2.

Séance 7

Cours : Schéma décentré et schéma de Lax-Wendroff pour l'équation d'advection

Travaux pratiques : Enoncé du TP3 et travail individuel.

TP3. Comparaison de deux schémas pour l'équation d'advection. On approche par différences finies la solution du modèle d'advection suivant : $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ pour $0 < x < 1$ et $t > 0$, avec la contion initiale $u(x, 0) = 16\, x^2\,(1-x)^2$ et la conditon limite "à l'entrée" : $u(0, t) = 0$ pour $t > 0$. On utilise d'abord le schéma décentré $\frac{1}{\Delta t}\,(u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{a}{\Delta x}\,(\,u_j^n - u_{j-1}^n\,) = 0$ sur une grille de pas Δx tel que $J\,\Delta x = 1$, où u_j^n désigne une valeur approchée de $u(j\Delta x, n\Delta t)$. Pour J fixé, on note ϵ_J l'erreur entre u_J^n et $u(x=1, t=\frac{1}{2}) = 1$. Montrer expérimentalement à l'aide d'un graphe dans le plan $(\log J\,, \log \epsilon_J)$ que l'erreur ϵ_J est asymptotiquement de l'ordre de Δx. Reprendre la question précédente lorsqu'on utilise le schéma de Lax-Wendroff $\frac{1}{\Delta t}\,(u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{a}{2\,\Delta x}(\,u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\,) - \frac{1}{2}\,\frac{a^2\,\Delta t}{\Delta x^2}\,(u_{j+1}^n - 2\,u_j^n + u_{j-1}^n) = 0.$

Séance 8

Cours : Introduction à l'advection-diffusion. Faut-il prendre une condition limite à chaque borne de l'intervalle ? Solution exacte du modèle stationnaire pour l'équation de la chaleur : $a\,\frac{\partial u}{\partial x} - \mu\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, avec les conditions aux limites $u(x=0) = 0$ et $u(x=L) = 1$. Schéma d'Euler implicite pour l'équation de la chaleur. Algorithme de Gauss associé pour la résolution du système linéaire associé.

Travaux pratiques : Fin du TP numéro 2, travail sur le TP3.

Séance 9

Cours : Schéma implicite centré pour l'advection-diffusion. Factorisation LU d'une matrice tridiagonale. Résolution du système linéaire par descente-remontée.

Travaux pratiques : Enoncé du TP4 et travail individuel.

TP4. Advection-diffusion. On approche par différences finies la solution de l'équation d'advection-diffusion suivante : $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} - \mu\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ avec $0 < x < 1$ et $t > 0$. La contion initiale choisie est $u(x, t) = x$ et on prend une condition limite de Dirichlet homogène en $x = 0$: $u(0, t) = 0$ et une condition limite inhomogène en $x = 1$: $u(1, t) = 1$ pour $t > 0$.

1) Rappeler, en justifiant votre réponse, la solution u^∞ du modèle stationnaire $\frac{\partial u^\infty}{\partial x} - \mu\,\frac{\partial^2 u^\infty}{\partial x^2} = 0$ pour $0 < x < 1$ et avec les conditions aux limites $u^\infty(0) = 0$ et $u^\infty(1) = 1$.

2) Mettre en œuvre un schéma numérique centré soit explicite $\frac{1}{\Delta t}\,(u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{1}{2\,\Delta x}(\,u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\,) - \frac{\mu}{\Delta x^2}\,(u_{j+1}^n - 2\,u_j^n + u_{j-1}^n) = 0$ pour $1 \leq j \leq J-1$, $J\Delta x = 1$ avec les conditions aux limites $u_0^n = 0$ et $u_J^n = 1$, soit implicite $\frac{1}{\Delta t}\,(u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{1}{2\,\Delta x}(\,u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}\,) - \frac{\mu}{\Delta x^2}\,(u_{j+1}^{n+1} - 2\,u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) = 0$

pour $1 \leq j \leq J-1$, avec les mêmes données aux limites que le schéma précédent. On arrête la simulation après N pas de temps pour un instant physique $T = N\,\Delta t$ qu'on précisera.
3) En choisissant T le plus grand possible, évaluer l'erreur $\epsilon(\Delta x, T) = \max\{|\,u_j^N - u^\infty(j\,\Delta x)\,|,\, 0 \leq j \leq J\}$.
4) [uniquement pour les auditeurs ayant opté pour le schéma implicite]. En choisissant T assez grand pour que $\epsilon(\Delta x, T)$ défini à la troisième question ait atteint une valeur stationnaire qu'on notera $\overline{\epsilon}(\Delta x)$, montrer qu'on a une estimation de la forme $\overline{\epsilon}(\Delta x) = C\,\Delta x^\alpha$, où α est une valeur qu'on précisera.

Séance 10

Cours : Stabilité du schéma implicite centré pour l'advection-diffusion. Mise en œuvre numérique de l'algorithme LU et descente remontée.

Travaux pratiques : Travail individuel sur le TP4.

Séance 11 et 12

Cours : Schéma de Crank-Nicolson centré en espace pour l'advection-diffusion à une dimension d'espace.

Travaux pratiques : Travail individuel sur le TP4.

Séance 13

Cours : Modes propres pour la corde vibrante. Problème continu. problème discret. Méthode de la puissance pour le calcul de la plus grande valeur propre.

Travaux pratiques : mise en œuvre de la méthode de la puissance pour l'opérateur de Laplace à une dimension d'espace discrétisé par un schéma aux différences à trois points.

Séances 14 et 15

Cours : Méthode de la puissance inverse pour le calcul de la plus petite valeur propre. Généralisation au second mode et aux modes suivants.

Travaux pratiques : Travail individuel sur le TP5.

TP5. On aproche l'opérateur de Laplace à une dimension d'espace avec conditions de Dirichlet homogènes par un schéma à trois points. Calculer numériquement le premier mode de la corde vibrante. Comparer avec la valeur exacte. Comment se comporte l'erreur en fonction du nombre de points J si J croît vers l'infini ? Reprendre le problème avec le calcul numérique de la seconde valeur propre.

édition août 2010.