le cnam

Introduction à la mécanique des fluides

Saint-Denis, printemps 2014

Cours 04

Lois de conservation et bilans d'efforts

- Domaine fluide suivi dans son mouvement
- Conservation de la masse
- Dérivée d'une grandeur intégrale
- Conservation du débit
- Conservation de l'impulsion
- Force exercée par le fluide sur une structure

François Dubois

Introduction à la Mécanique des Fluides (STN2, CNAM Saint Denis)

4 Lois de conservation et bilans d'efforts

- On s'intéresse à une masse de fluide m enfermée dans un volume Ω_0 à $t=0$. Au cours du temps, le volume Ω_0 devient $\Omega(t)$ et la masse m reste la même. Notons $\rho(x,t)$ la masse par unité de volume au point $x \in \Omega(t)$ et à l'instant $t \geq 0$. La masse $m(t)$ se calcule à l'aide de l'intégrale

$$(1) \qquad m(t) = \int_{\Omega(t)} \rho(x,t)\, dx \quad , \quad t \geq 0$$

et la propriété de conservation de la masse exprime que $m(t)$ reste constante au cours du temps. En d'autres termes,

$$(2) \qquad \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(x,t)\, dx = 0 .$$

- Le calcul de la dérivée du membre de gauche de (2) n'est pas facile. En effet, le temps intervient de <u>deux</u> façons : d'une part le

Fig 1. Déformation d'un domaine fluide au cours du temps.

---

domaine d'intégration est variable dans le temps et d'autre part, la fonction ρ dépend à la fois de l'espace et du temps. On va la calculer en se ramenant au domaine fixe Ω_0, en utilisant les trajectoires

$$(2) \qquad x = X(t; x_0) \quad , \quad x_0 \in \Omega_0 , \ x \in \Omega(t) .$$

On a bien entendu la condition de cohérence

$$(3) \qquad x_0 = X(0; x_0), \ x_0 \in \Omega_0$$

et la vitesse $v(t; x_0)$ est la dérivée de $t \mapsto X(t; x_0)$ à x_0 fixé :

$$(4) \qquad v(t; x_0) = \frac{\partial X}{\partial t}(t; x_0), \ x_0 \in \Omega_0 .$$

- La relation (2) définit un changement de variables entre Ω_0 et $\Omega(t)$:

$$(5) \left\{ \Omega_0 \ni x_0 \overset{F_t}{\longmapsto} x = X(t; x_0) \in \Omega(t) . \right.$$

Afin d'utiliser ce changement de variables pour calculer (1), on introduit la matrice jacobienne

(6) $\left(dF_t\right)_{ij} = \dfrac{\partial X_i}{\partial (x_0)_j}(t; x_0)$, $1 \leq i, j \leq 2$ ou 3

et le déterminant jacobien $J(t; x_0)$ (le jacobien) :

(7) $J(t; x_0) = \left| \det \, dF_t \, (t; x_0) \right|$, $t \geq 0$, $x_0 \in \Omega_0$.

On a alors, en suivant les règles usuelles de changement de variables dans une intégrale double ou triple :

(8) $m(t) = \displaystyle\int_{\Omega_0} \rho(X(t; x_0), t) \, J(t; x_0) \, dx_0$.

- Nous introduisons le champ de vitesse non plus comme fonction de $x_0 \in \Omega_0$ (condition initiale du fluide ; relation (4)) mais comme fonction du point courant $x = X(t; x_0) \in \Omega(t)$:

(9) $\vec{u}(x, t) \equiv v(t; x_0)$; $x = X(t; x_0)$.

on a le résultat très général suivant

Th 1 Conservation de la masse.

Si la relation (2) est vraie partout dans le fluide, on a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \vec{u}) = 0 \qquad (10)$$

- La preuve s'obtient en dérivant (8) relativement au temps et en écrivant que $\frac{dm}{dt}$ est nul pour tout temps $t \geq 0$ et tout Ω_0. Or on a

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \rho(X(t;x_0), t)\, J(t, x_0)\, dx_0 =$$

$$= \int_{\Omega_0} \frac{\partial}{\partial t}\big[\rho(X(t;x_0), t)\, J(t; x_0)\big]\, dx_0$$

$$= \int_{\Omega_0} \Big\{ \frac{\partial}{\partial t} \rho\big(X(t;x_0), t\big)\, J(t;x_0) + \rho\, \frac{\partial J}{\partial t} \Big\}\, dx_0$$

Nous avons la propriété technique suivante

Prop 1 <u>Dérivée en temps du Jacobien.</u>

$$\frac{\partial J}{\partial t}(t; x_0) = J(t, x_0)(\mathrm{div}\, \vec{u}) \qquad (11)$$

- La <u>preuve</u> de cette propriété dans le cas général est un exercice (pas si facile!) sur les déterminants. Nous notons $\hat{x}$ au lieu de x_0 le point courant de Ω_0. On a alors pour <u>deux</u> dimensions d'espace

$$(12)\quad J(t;\hat{x}) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial \hat{x}_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial \hat{x}_2} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial \hat{x}_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \hat{x}_2} \end{vmatrix}$$

en supposant $J > 0$, c'est à dire l'orientation conservée dans la transformation $\Omega_0 \to \Omega(t)$.

on a d'une part

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_1}{\partial \hat{x}_1}\right)\frac{\partial x_2}{\partial \hat{x}_2} + \frac{\partial x_1}{\partial \hat{x}_1}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_2}{\partial \hat{x}_2}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_2}{\partial \hat{x}_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial \hat{x}_2} - \frac{\partial x_2}{\partial \hat{x}_1}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_1}{\partial \hat{x}_2}\right)$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial \hat{x}_1}\left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\right)\right]\frac{\partial x_2}{\partial \hat{x}_2} + \frac{\partial x_1}{\partial \hat{x}_1}\left[\frac{\partial}{\partial \hat{x}_2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial t}\right)\right] - \left[\frac{\partial}{\partial \hat{x}_1}\frac{\partial x_2}{\partial t}\right]\frac{\partial x_1}{\partial \hat{x}_2} - \frac{\partial x_2}{\partial \hat{x}_1}\left[\frac{\partial}{\partial \hat{x}_2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\right)\right]$$

$$(13)\quad \frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial v_1}{\partial \hat{x}_1}\frac{\partial x_2}{\partial \hat{x}_2} + \frac{\partial x_1}{\partial \hat{x}_1}\frac{\partial v_2}{\partial \hat{x}_2} - \frac{\partial v_2}{\partial \hat{x}_1}\frac{\partial x_1}{\partial \hat{x}_2} - \frac{\partial x_2}{\partial \hat{x}_1}\frac{\partial v_1}{\partial \hat{x}_2}.$$

- on désire introduire $\operatorname{div}\vec{u}$, en prenant garde au fait que v dépend de $\hat{x}$ alors que $\vec{u}$ dépend de x :

$$\operatorname{div}\vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2},$$

à ne pas confondre avec $\dfrac{\partial v_1}{\partial \hat{x}_1} + \dfrac{\partial v_2}{\partial \hat{x}_2}$!!

or

$$\frac{\partial v_1}{\partial \hat{x}_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \hat{x}_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \hat{x}_1}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial \hat{x}_1} = \operatorname{div}\vec{u}\,\frac{\partial x_1}{\partial \hat{x}_1} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \hat{x}_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_1}{\partial \hat{x}_1}\right)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial \hat{x}_2} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \hat{x}_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \hat{x}_2}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial \hat{x}_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \hat{x}_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \hat{x}_1}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial \hat{x}_2} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \hat{x}_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \hat{x}_2}$$

$$= \operatorname{div}\vec{u}\,\frac{\partial x_1}{\partial \hat{x}_2} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \hat{x}_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_1}{\partial \hat{x}_2}\right)$$

on reporte ces expressions dans (13) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J}{\partial t} = {} & \left[\operatorname{div}\vec{u}\,\frac{\partial x_1}{\partial \hat{x}_1} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \hat{x}_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_1}{\partial \hat{x}_1}\right)\right]\frac{\partial x_2}{\partial \hat{x}_2} \\
& + \left[\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \hat{x}_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \hat{x}_2}\right]\frac{\partial x_1}{\partial \hat{x}_1} \\
& - \left[\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \hat{x}_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \hat{x}_1}\right]\frac{\partial x_1}{\partial \hat{x}_2} \\
& - \left[\operatorname{div}\vec{u}\,\frac{\partial x_1}{\partial \hat{x}_2} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \hat{x}_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_1}{\partial \hat{x}_2}\right)\right]\frac{\partial x_2}{\partial \hat{x}_1}
\end{aligned}$$

Les huit termes qui ne contiennent pas explicitement $\operatorname{div}\vec{u}$ s'éliminent. D'où

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \mathrm{div}\,\vec{u}\left(\frac{\partial x_1}{\partial \hat{x}_1}\frac{\partial x_2}{\partial \hat{x}_2} - \frac{\partial x_1}{\partial \hat{x}_2}\frac{\partial x_2}{\partial \hat{x}_1}\right)$$

$$= (\mathrm{div}\,\vec{u})\; J(t; x_0),$$

ce qui montre la relation dans le cas de deux dimensions d'espace. La preuve de (11) pour $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^3$ est un exercice proposé à la fin de cette Note.

$\square$

• Preuve du théorème 1.

On reprend le calcul commencé page 4, en tenant compte de (11) :

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} \rho(x,t)\,dx =$$

$$= \int_{\Omega_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial t}\rho\big(X(t;x_0), t\big)\, J(t;x_0) + \rho\, J(t;x_0)\,\mathrm{div}\,\vec{u} \right\} dx_0$$

$$= \int_{\Omega_0} \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial x_j}{\partial t} + \rho(\mathrm{div}\,\vec{u}) \right\} J\,dx_0$$

$$= \int_{\Omega_0} \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\rho\cdot u + \rho\,\mathrm{div}\,\vec{u} \right\} J(t;x_0)\,dx_0$$

$$= \int_{\Omega_0} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{u}) \right] J(t;x_0)\,dx_0$$

$$= \int_{\Omega(t)} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{u}) \right] dx$$

grâce au changement de variable réciproque de (5). La relation (2) est vraie pour tout temps et tout domaine $\Omega(t)$ (ou tout domaine initial Ω_0). Donc $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \vec{u}) = 0$ et la relation (10) est démontrée. □

- Le théorème 1 est un cas particulier du résultat suivant

Th (2) Dérivée d'une grandeur intégrale qu'on suit dans son mouvement.

Soit $\Omega(t)$ un domaine fluide à l'instant t ; $x \mapsto \vec{u}(t)$ le champ de vitesse correspondant et $\varphi(x,t)$ une grandeur définie dans le volume. On pose

(14) $$\Phi(t) = \int_{\Omega(t)} \varphi(x,t)\, dx .$$

Alors

(15) $$\frac{d\Phi}{dt} = \int_{\Omega(t)} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathrm{div}(\varphi \vec{u}) \right\} dx .$$

- La preuve est essentiellement faite page 7 ; il suffit de remplacer la lettre ρ par la lettre φ dans le calcul des intégrales et de leurs dérivées. □

- on peut interpréter la variation en temps (15) en intégrant par parties ; on a

$$(16) \quad \frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} \varphi(x,t)\,dt = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\,dx + \int_{\partial\Omega(t)} \varphi\, \vec{u}\cdot\vec{n}\,d\gamma .$$

La variation en temps d'une intégrale dans un domaine qu'on suit dans son mouvement se compose de <u>deux</u> termes : d'une part la <u>variation intrinsèque</u> de la grandeur relativement au temps au sein du domaine $\Omega(t)$ [terme $\int_\Omega \frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dx$] et d'autre part le <u>flux</u> de φ à travers la frontière de $\Omega(t)$ [terme $\int_{\partial\Omega} \varphi\,\vec{u}\cdot\vec{n}\,d\gamma$, où $\vec{n}$ est la frontière extérieure à $\Omega(t)$].

- Nous avons admis plus haut dans ce cours qu'un fluide incompressible ($\rho \equiv$ constante) [un <u>liquide</u> typiquement] satisfait à

$$(17) \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0 .$$

Nous pouvons maintenant prouver cette propriété à partir de la loi de conservation de la masse (10) et de l'hypothèse

$$(18) \quad \rho = \rho_0 \quad (= \text{constante non nulle}) .$$

On a dans ce cas $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ et $\operatorname{div}(\rho\vec{u}) = \rho_0 \operatorname{div}\vec{u}$.

La relation (17) résulte de

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0 + \rho_0 \operatorname{div} \vec{u} \quad \text{et de } \rho_0 \neq 0$$

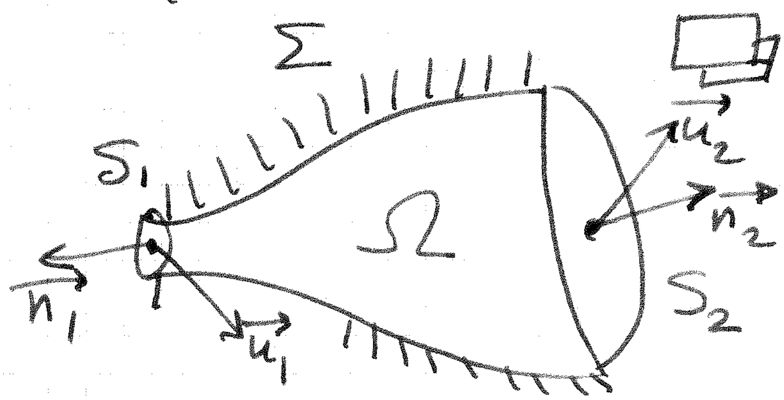

Fig. 2 Conservation du débit.

- Si on regarde une configuration de type tuyauterie comme à la figure 2, on a classiquement une surface S_1 d'entrée (où $\vec{u}\cdot\vec{n}_1 < 0$), une surface Σ qui est une frontière solide où le fluide est contraint d'être tangent à la paroi, c'est à dire orthogonal à la normale :

$$(19) \qquad \vec{u}\cdot\vec{n} = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \text{ surface solide},$$

et une surface S_2 de sortie (où $\vec{u}\cdot\vec{n}_2 > 0$). On suppose le fluide stationnaire et incompressible. Quand on intègre (17) dans le volume Ω de fluide [avec $\partial\Omega = S_1 \cup \Sigma \cup S_2$], on a :

$$0 = \int_\Omega (\operatorname{div} \vec{u})\, dx = \int_{\partial\Omega} \vec{u}\cdot\vec{n}\, d\gamma$$

$$= \int_{S_1} \vec{u}\cdot\vec{n}\, d\gamma + \int_\Sigma \vec{u}\cdot\vec{n}\, d\gamma + \int_{S_2} \vec{u}\cdot\vec{n}\, d\gamma$$

$$= \int_{S_1} \vec{u}\cdot\vec{n}\, d\gamma + \int_{S_2} \vec{u}\cdot\vec{n}\, d\gamma$$

car $\vec{u}\cdot\vec{n}$ est identiquement nul sur Σ (cf (19)).
On introduit la vitesse moyenne sur la surface sortante S_2 par

$$(20) \qquad u_2 = \frac{1}{S_2}\int_{S_2} \vec{u}\cdot\vec{n}\, d\gamma$$

et la même grandeur arithmétique sur la surface entrante S_1 (où $\vec{u}\cdot\vec{n}<0$, cf Fig 1) :

$$(21) \qquad u_1 = \left|\frac{1}{S_1}\int_{S_1} \vec{u}\cdot\vec{n}\, d\gamma\right|$$

Le calcul précédent montre que

$$(22) \qquad u_1 S_1 = u_2 S_2$$

c'est la <u>conservation du débit</u> pour un liquide stationnaire.

- on utilise le théorème 2 avec $\varphi = \rho u_i$, i^e composante de l'impulsion. Alors $J_i \equiv \int_{\Omega(t)} \rho u_i \, dx$ est la quantité de mouvement totale dans le volume $\Omega(t)$. Le principe fondamental de la dynamique exprime que la dérivée en temps de cette intégrale est égale à la somme des forces appliquées : $\int_{\partial\Omega(t)} F_i \, d\gamma$, effort "intérieur" dû au fluide extérieur à $\Omega(t)$, plus $\int_{\Omega(t)} \rho g_i \, d\gamma$, force volumique de gravité (pour fixer les idées), on a

(23) $$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} \rho u_i \, dx = \int_{\partial\Omega} F_i \, d\gamma + \int_{\Omega(t)} \rho g_i \, dx .$$

- on rappelle que F_i est la i^e composante de la force surfacique exercée par le fluide extérieur à $\Omega(t)$ sur le fluide intérieur à $\Omega(t)$. Si $\vec{n}$ est la normale extérieure à $\partial\Omega(t)$, alors F_i s'exprime à l'aide du tenseur des contraintes σ_{ij} selon la relation

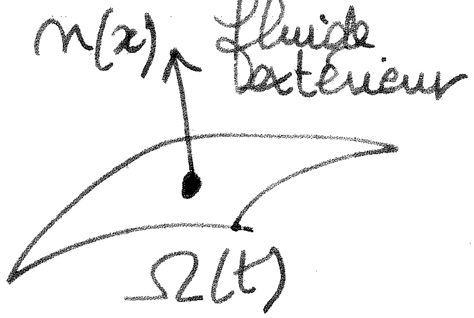

Fig. 3

(24) $$F_i = \sum_j \sigma_{ij} \, n_j \quad , \quad 1 \leq i \leq 2 \text{ ou } 3 .$$

Si on pose

(25) $$(\operatorname{div} \sigma)_i = \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} ,$$

on peut réécrire le terme de surface $\int_{\partial\Omega} F_i \, d\gamma$ à l'aide d'une intégrale de volume :

$$\int_{\partial\Omega(t)} F_i \, d\gamma = \int_{\partial\Omega(t)} \sum_j \sigma_{ij} \, n_j \, d\gamma$$

$$= \int_{\Omega(t)} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} \, dx = \int_{\Omega(t)} (\operatorname{div} \sigma)_i \, dx .$$

Hy 3 Conservation de l'impulsion.

Avec les hypothèses faites en (24) sur les efforts intérieurs au fluide, la conservation de l'impulsion (23) s'écrit sous forme d'une équation aux dérivées partielles

$$(26) \quad \frac{\partial}{\partial t}\rho u_i + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho u_i u_j - \sigma_{ij}\right) = \rho g_i . \qquad 1 \leq i \leq 2 \text{ ou } 3$$

Ce sont les équations dites de Navier-Stokes.

- La preuve de ce résultat résulte de (23) et de (15) avec $\varphi = \rho u_i$:

$$\int_{\Omega(t)} \left\{ \frac{\partial}{\partial t}\rho u_i + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) \right\} dx$$
$$= \int_{\Omega(t)} (\operatorname{div}\sigma)_i \, dx + \int_{\Omega(t)} \rho g_i \, dx .$$

Cette identité est valable pour tout domaine $\Omega(t)$ qu'on suit dans son mouvement. La relation (26) en résulte.

$\square$

- Dans le cas d'un fluide parfait (on néglige la dissipation due aux effets visqueux), on a

$$(27) \quad \sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij}$$

c'est à dire $\sigma_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $\sigma_{jj} = -p$.
Alors

$$(28) \qquad (\operatorname{div} \sigma)_i = -(\nabla p)_i \quad , \text{fluide parfait}$$

et les relations (26) s'appellent les équations d'Euler de la dynamique des gaz. Dans le cas de deux dimensions spatiales, on peut les écrire

$$(29) \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho u_1) + \dfrac{\partial}{\partial x_1}(\rho u_1^2 + p) + \dfrac{\partial}{\partial x_2}(\rho u_1 u_2) = \rho g_1 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho u_2) + \dfrac{\partial}{\partial x_1}(\rho u_1 u_2) + \dfrac{\partial}{\partial x_2}(\rho u_2^2 + p) = \rho g_2 . \end{cases}$$

- Dans le cas général d'un fluide visqueux Newtonien, on a

$$(30) \qquad \sigma_{ij} = [-p + \zeta(\operatorname{div} \vec{u})]\, \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

où $\mu > 0$ est la viscosité de cisaillement et ζ la viscosité de volume. Les équations de Navier Stokes pour un fluide Newtonien s'écrivent donc

$$(31) \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \displaystyle\sum_j \dfrac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho u_i u_j - \mu \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} - \mu \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \\ \qquad + \dfrac{\partial}{\partial x_i} (p - \zeta \operatorname{div} \vec{u}) = \rho g_i , \quad 1 \leq i \leq 2 \text{ ou } 3. \end{cases}$$

Elles sont d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace. Dans le cas d'un liquide incompressible, la viscosité de volume ζ disparaît de ces relations et on a

$$(32) \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_j u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\mu}{\rho_0} \Delta u_i + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} = g_i \, .$$

c'est la forme la plus usuelle des équations de Navier Stokes, déjà rencontrées à la leçon 3. On ne doit pas dans ce cas oublier la "contrainte d'incompressibilité" (17).

• Pour un tuyau du type décrit à la figure 2, on peut calculer la force F exercée par le fluide sur la paroi Σ du tuyau. Il faut d'abord définir la i^e composante de cette force, sachant que la paroi peut être vue comme un "fluide extérieur" à Ω dans le modèle mécanique. Alors la normale $\vec{n}$ extérieure à Σ est l'opposé de celle qui pointe vers le fluide qui opère sur Σ. La relation (24) s'écrit après intégration

$$(33) \quad F_i = -\int_\Sigma \sum_j \sigma_{ij} \, n_j \, d\gamma$$

Prop 2. Calcul de la force exercée par le fluide sur la tuyauterie

Avec les notations précédentes, en dans un flot stationnaire, négligeant les effets visqueux sur l'entrée S_1 et la sortie S_2 du tuyau (fig 2), on a

$$(34) \quad \mathcal{F}_i = \int_\Omega \rho g_i \, dx - \int_{S_1 \cup S_2} [\rho u_i (\vec{u}\cdot\vec{n}) + p n_i] \, d\gamma .$$

Dans le cas où les parois S_1 et S_2 sont verticales, avec les conventions décrits en (20) et (21) et en se bornant à la composante longitudinale, $\mathcal{F}_{x_1}$ on a

$$(35) \quad \mathcal{F}_x = (\rho_1 u_1^2 + p_1) S_1 - (\rho_2 u_2^2 + p_2) S_2 .$$

- La preuve de cette proposition consiste à fermer la paroi Σ par les surfaces S_1 et S_2, comme pour la conservation de la masse. On a

$$\mathcal{F}_i = -\int_{\partial\Omega} \sum_j \sigma_{ij} \cdot n_j \cdot d\gamma + \int_{S_1 \cup S_2} \sum_j \sigma_{ij} \, n_j \cdot d\gamma .$$

Avec l'hypothèse (27), on a sur S_1 et S_2 :

$\sum_j \sigma_{ij} n_j = -\sum_j p \, \delta_{ij} \, n_j = -p n_i$, d'où une partie du membre de droite de la relation (34). On utilise ensuite (26) et une intégration par parties. Il vient

$$\mathcal{F}_i = -\int_\Omega \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} \, dx - \int_{S_1 \cup S_2} p n_i \, d\gamma$$

$$\mathcal{F}_i = \int_\Omega \left[\rho g_i - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j)\right] dx - \int_{S_1 \cup S_2} p n_i \, d\gamma$$

$$= \int_\Omega \rho g_i \, dx - \int_{\partial\Omega} \rho u_i (\vec{u} \cdot \vec{n}) \, d\gamma - \int_{S_1 \cup S_2} p n_i \, d\gamma$$

$$= \int_\Omega \rho g_i \, dx - \int_{S_1 \cup S_2} \{ \rho u_i (\vec{u} \cdot \vec{n}) + p n_i \} \, d\gamma$$

car $\vec{u} \cdot \vec{n} \equiv 0$ sur Σ (cf (19)). La relation (34) est établie. Pour un tuyau à parois verticales, on a $\vec{n} = (1,0,0)$ le long de S_2 et $\vec{n} = (-1,0,0)$ le long de S_1. Alors

$$\int_{S_1} [\rho u_x (\vec{u} \cdot \vec{n}) + p n_x] \, d\gamma = S_1 (\rho_1 u_1^2 + p_1)(-1)$$

$$\int_{S_2} [\rho u_x (\vec{u} \cdot \vec{n}) + p n_x] \, d\gamma = S_2 (\rho_2 u_2^2 + p_2).$$

Comme $g_x = 0$, la relation (35) résulte alors de (34) et du calcul précédent. $\square$

- Nous insistons sur les conditions aux limites de paroi. En effet, la relation $(\vec{u} \cdot \vec{n}) = 0$ (cf (19)) exprime la non pénétration du fluide le long de la paroi. Elle suffit si on néglige les effets visqueux (fluide parfait, qui satisfait aux équations d'Euler et aux théorèmes de Bernoulli). Si on ne néglige pas les effets visqueux, on admet qu'alors on doit imposer que la vitesse au bord est nulle :

(36) $\vec{u} = \vec{0}$ sur Σ.

En particulier la composante normale (relation (19)), mais également la composante tangentielle : $\vec{u} \cdot \vec{\tau} = 0$. Comme on l'a vu lors de la leçon 3 relative à la viscosité, cette condition est essentielle pour construire une solution "près du bord" ; c'est ce que propose la théorie de la <u>couche limite</u>, développée par Prandtl et Blasius au début du 20e siècle.

• <u>Exercices.</u>

1) Soit $J = \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial \hat{x}_j} \right)$ le déterminant de la matrice jacobienne dans le cas de trois dimensions spatiales. Avec la notation classique ε_{ijk} du tenseur complètement anti-symétrique d'ordre 3, remarquer d'abord que pour une matrice A arbitraire, on a

(37) $$\varepsilon_{pqr} A_{lp} A_{jq} A_{kr} = \varepsilon_{ljk} (\det A).$$

En déduire que l'on a

(38) $$J = \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} \frac{\partial x_i}{\partial \hat{x}_p} \frac{\partial x_j}{\partial \hat{x}_q} \frac{\partial x_k}{\partial \hat{x}_r}.$$

Après dérivation en temps de (38), établir que la relation (11) reste valable pour trois dimensions spatiales.

2) Soit Ω un domaine bidimensionnel $0 < x < L$ et $0 < y < h$ sur lequel on se donne un écoulement de Poiseuille $\vec{u} = \left(u(y) \equiv \frac{V}{h^2}\, y\,(h-y),\, 0\right)$ associé à une chute de pression $\Delta p \equiv p_0 - p_L = 2\,\mu\, V \frac{L}{h^2}$ (cf Leçon 3).
Montrer que la force exercée par le fluide sur la paroi ($0<x<L$, $y=0$ <u>et</u> $y=h$) peut s'écrire

(39) $\qquad F_x = h\,\Delta p$

en fonction de la perte de charge.

Paris, 6 mai 2014.

Dubois.