le cnam

Introduction à la mécanique des fluides

Saint-Denis, printemps 2014

Cours 05

Révisions, compéments

- Effet Venturi
- Perte de charge
- Adimensionnement
- Notion de couche limite

François Dubois

Introduction à la Mécanique des Fluides
(STN2, CNAM Saint Denis)

(5) Révisions, compléments

- Effet Venturi dans les tours d'aéroréfroidissement.

L'écoulement dans une "cooling tower" peut être supposé stationnaire. Alors le débit dans la section S_1 est égal au débit dans la section S_2 (voir la Fig. 1) et on a

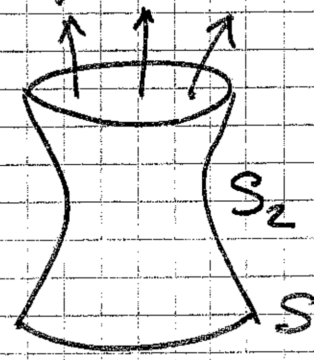


Fig. 1.

$$(1) \quad \rho_1 u_1 S_1 = \rho_2 u_2 S_2 .$$

* Dans le cadre de ce cours, on s'est limité à des fluides essentiellement incompressibles :

$$(2) \quad \rho_1 = \rho_2 ,$$

ce qui n'est bien entendu pas le cas pour les tours de refroidissement. On a alors simplement

$$(3) \quad S_1 > S_2 \implies |u_1| < |u_2| .$$

Cette conclusion demeure pour des écoulements compressibles et subsoniques, comme pour les "cooling towers".

* La seconde étape pour estimer "au premier ordre" les paramètres de l'écoulement consiste à supposer le flot à la fois stationnaire et irrotationnel. Alors la charge

(4) $H \equiv \frac{1}{2}\rho|\vec{u}|^2 + p + \rho g z$

est constante dans tout l'espace.

- En réalité, la charge H décroît au cours du temps :

(5) $H_{amont} = H_{aval} + \Delta H, \quad \Delta H > 0.$

Cette inégalité est l'une des nombreuses facettes du second principe de la thermodynamique : un fluide est dissipatif et ceci se traduit par l'existence de la viscosité de cisaillement $\mu > 0$ dans les équations de Navier Stokes.

- Pour un écoulement dans un tube de section constante, nous avons établi (ch 3) que la perte de charge ΔH est proportionnelle à la viscosité. Le théorème de Bernoulli est une bonne approximation dans un monde "non dissipatif" où la viscosité serait nulle. Attention ! Dans les écoulements réels, le rotationnel $\vec{rot}\,\vec{u}$ est en général non nul et la charge (4) n'est pas constante et vérifie encore (5)

- Adimensionnement.

Dans le cas d'un fluide incompressible (liquide typiquement) supposé Newtonien, le tenseur des contraintes σ peut s'exprimer par

(6) $$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right).$$

La conservation de la masse et de la quantité de mouvement prennent alors la forme

(7) $$\operatorname{div}\vec{u} = 0$$

(8) $$\rho\left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\right] + \vec{\nabla} p - \mu\Delta\vec{u} = \vec{f},$$

où $\vec{f}$ est une force extérieure, avec $\vec{f} = \rho\vec{g}$ pour la gravité.

* La dynamique propre de (8) contient 4 termes:

$\frac{\partial u}{\partial t}$ évolution instationnaire

$(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}$ convection

$\vec{\nabla} p$ pression

$-\mu\Delta\vec{u}$ dissipation visqueuse.

En général, ces quatre termes sont présents. Mais dans de nombreuses situations, un ou deux de ces termes sont négligeables devant les deux autres et l'équation de Navier Stokes (8) peut être remplacée par un modèle mathématique plus simple. La mise sous forme adimensionnée permet de mettre en évidence les nombres sans dimension qui donnent une bonne idée des termes négligeables dans l'équation (8).

- Nous nous entraînons en analysant l'équation de conservation de la masse pour un fluide quelconque :

$$(9) \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0$$

(ici dans le cas de deux dimensions d'espace). On se donne des grandeurs de référence dimensionnées ; des échelles en espace, temps, vitesse, densité. On écrit ensuite les variables du problème (9) à l'aide des grandeurs sans dimension et des échelles. On a de façon plus précise

$$(10) \begin{cases} x = L x', \quad y = L y' \text{ (c'est un choix !)}, \\ t = T t', \quad u = V u', \quad v = V v', \quad \rho = \rho_0 \rho'. \end{cases}$$

Alors la relation (9) s'écrit

$$\frac{\rho_0}{T}\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \frac{\rho_0 V}{L}\left[\frac{\partial}{\partial x'}(\rho' u') + \frac{\partial}{\partial y'}(\rho' v')\right] = 0.$$

Avec $\rho_0 > 0$, cette relation s'écrit

$$(11) \qquad \frac{\partial \rho'}{\partial t'} + V\frac{T}{L}\left(\frac{\partial}{\partial x'}(\rho' u') + \frac{\partial}{\partial y'}(\rho' v')\right) = 0.$$

Les relations (9) et (11) sont très analogues. Mais (11) a comme coefficient de $\operatorname{div}'\vec{u}'$ le nombre VT/L. Nombre sans dimension qui peut être choisi égal à 1. C'est en général la solution la plus simple! on choisit ici

$$(12) \qquad V = \frac{L}{T},$$

choix que nous ferons dans la suite.

- Nous poursuivons ce travail d'explicitation d'équations sans dimensions (les seules considérées dans les logiciels et les ordinateurs qui les exploitent !) avec l'équation de Navier Stokes (8). On pose ici

$$(13) \quad \rho = \rho_0 \text{ (incompressibilité)}, \quad p = p_0\, p'$$

en complément de (10). On a alors (en supposant $\vec{f} = 0$ pour simplifier l'exposé) :

$$\rho_0 \frac{V}{T} \frac{\partial u'}{\partial t'} + \rho_0 \frac{V^2}{L} (u' \cdot \nabla') u' + \frac{p_0}{L} \nabla' p' - \mu \frac{V}{L^2} \Delta' u' = 0.$$

En d'autres termes,

$$(14) \quad \frac{\partial u'}{\partial t'} + \frac{VT}{L} (u' \cdot \nabla') u' + p_0 \frac{T}{L} \frac{1}{\rho_0 V} \nabla' p' - \mu \frac{T}{\rho_0 L^2} \Delta' u' = 0$$

Le choix (12) permet de garder un second terme convectif $(u' \cdot \nabla') u'$ avec un coefficient égal à 1. On a alors

$$p_0 \frac{T}{VL} \frac{1}{\rho_0} = \frac{p_0}{\rho_0 V^2}$$ et le plus simple est de choisir ce nombre égal à l'unité. Le choix classique est donc une *échelle* de pression p_0 qui vérifie

(15) $$p_0 = \rho_0 V^2.$$

Les trois premiers termes de (14) sont alors analogues à ceux de (8).

- Pour le quatrième terme, on a, compte tenu de (12) :

$$\frac{\mu T}{\rho_0 L^2} = \frac{\mu}{\rho_0 L \frac{L}{T}} = \frac{\mu}{\rho_0 V L},$$

on vient de fabriquer un nombre qui mesure l'échelle de la viscosité comparée à l'échelle du terme convectif. Le nombre de Reynolds Re est défini par

(16) $$Re = \frac{\rho_0 V L}{\mu}.$$

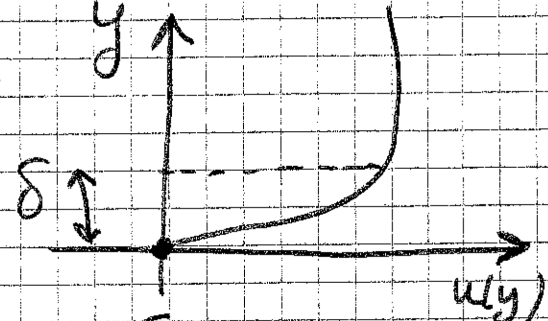
Alors, compte tenu de (12), (15) et (16), la relation (14) prend la forme

(17) $$\frac{\partial u'}{\partial t'} + (u' \cdot \nabla') u' + \nabla' p' - \frac{1}{Re} \Delta' u' = 0.$$

L'écriture usuelle consiste à enlever les "prime". Pour de nombreux écoulements, le nombre de Reynolds Re est très grand

(10^6 à 10^9 typiquement) et le terme visqueux peut être négligé en première approximation. C'est cette approximation qui permet l'analyse grâce aux théorèmes de Bernoulli.

- Notion de <u>couche limite.</u>



<u>Fig. 2</u>

A la paroi, la non pénétration du fluide s'écrit

(18) $\vec{u}\cdot\vec{n} = 0$.

La vitesse normale est nulle ; $v=0$ si la paroi est horizontale, hypothèse que nous ferons dans la suite. Pour un fluide visqueux, la condition (18) doit être complétée par la nullité de la composante tangentielle ; on a alors

(19) $\vec{u} = \vec{0}$.

Mais on a aussi dans un écoulement typique

(20). $|\vec{u}|_{moyen} = U \neq 0$.

* Au début du 20e siècle, Prandtl a mis en évidence cette tension entre (19) et (20) ; la composante tangentielle u passe rapidement (sur une courte distance δ) de $u=0$ à $u=U$ (cf Fig. 2)

Cette région du fluide proche de la paroi, pour $0 < y < \delta$, s'appelle la couche limite. Et le paramètre spatial δ est l'épaisseur de la couche limite. On peut démontrer que si on a une échelle L typique de variation en x, alors la couche limite δ satisfait à

$$(21) \qquad \delta = \frac{L}{\sqrt{Re}} .$$

- Pour $Re = 10^6$, $\delta = 10^{-3} L$. Le calcul précis d'un écoulement fluide mélange deux échelles spatiales. C'est une difficulté fondamentale pour le calcul numérique approché.

Dubois

Paris, 23 mai 2014.