

CHAPITRE 1

Motivation. Equations différentielles ordinaires et équations aux dérivées partielles

1) Quelques modèles conduisant à des équations différentielles ordinaires

- Placement financier
- Système masse-ressort
- Circuit électrique RLC
- Mouvement d'un satellite
- Cinétique chimique
- Météorologie : attracteur de Lorenz
- Une définition

2) Quelques modèles conduisant à des équations aux dérivées partielles

- Diffusion de la chaleur à une dimension d'espace
- Résistance des matériaux : élasticité tridimensionnelle
- Résistance des matériaux : flexion des poutres
- Membrane vibrante (tambour)
- Mécanique des fluides : Euler et Navier-Stokes
- Ondes acoustiques
- Electromagnétisme : équations de Maxwell
- Advection-diffusion à une dimension d'espace
- Physique moléculaire : équation de Schrödinger

I. MOTIVATION : Équations différentielles ordinaires et Équations aux dérivées partielles

1) Quelques modèles conduisant à des équations différentielles ordinaires

- **Placement financier**

Disposant d'une masse d'argent x_0 au temps $t = 0$, on la place à la banque à un taux r . Ceci signifie que la somme $x(t)$ disponible à l'instant t ultérieur est solution de l'équation différentielle suivante :

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = rx & (t > 0) \\ x(0) = x_0 & \text{(condition initiale).} \end{cases}$$

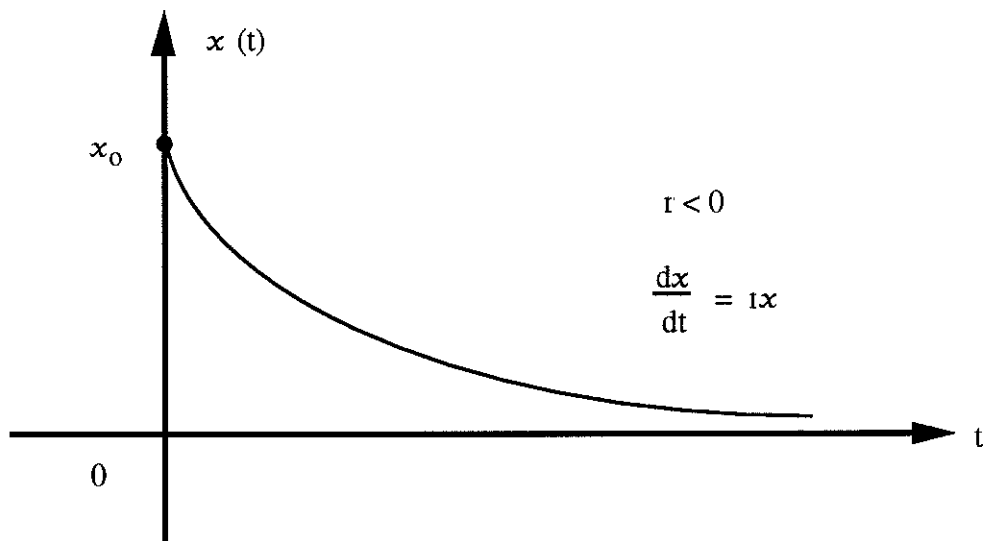
La solution du modèle (1) est bien connue, puisqu'elle fait intervenir la **fonction exponentielle** :

$$(2) \quad x(t) = (\exp(rt)) x_0$$

et il n'est aucunement besoin de méthode numérique pour calculer la valeur $x(t)$ donnée à la relation (2) ; une simple calculatrice suffit.

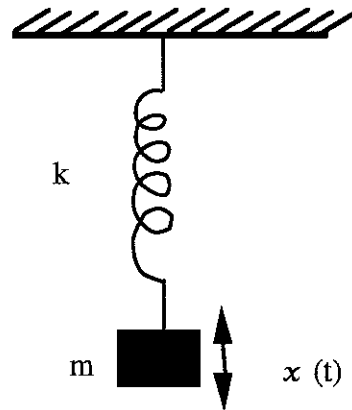
Toutefois, le modèle exponentiel est fondamental à plusieurs titres :

l'équation (1) est très simple, est linéaire [ce qui signifie que la fonction $x \rightarrow rx$ au second membre de la première équation de (1) est une fonction linéaire de la variable x], et pour $r < 0$ (ce qui constitue un cas purement mathématique de placement financier qu'aucun client d'une banque n'accepterait) est un bon modèle de système convergent, pour t tendant vers $+\infty$, vers un **point fixe**, puisque $x(t)$ tend vers 0 si $t \rightarrow +\infty$ lorsque $r < 0$.



- **Système masse-ressort**

Il s'agit d'un modèle de mécanique tout à fait fondamental. Un ressort de raideur k est d'abord allongé pour assurer l'équilibre d'une masse m . A l'instant initial $t = 0$, on l'écarte de sa position d'équilibre d'une abscisse x_0 avec une vitesse nulle (ou initiale v_0 en toute généralité).



$$(3) \quad x(0) = x_0 \quad ; \quad \frac{dx}{dt}(0) = 0 \quad [v_0] .$$

L'évolution en temps écrit que la force de réaction du ressort $[-kx]$ est exactement égale au produit de la masse par l'accélération $\left[m \frac{d^2x}{dt^2} \right]$:

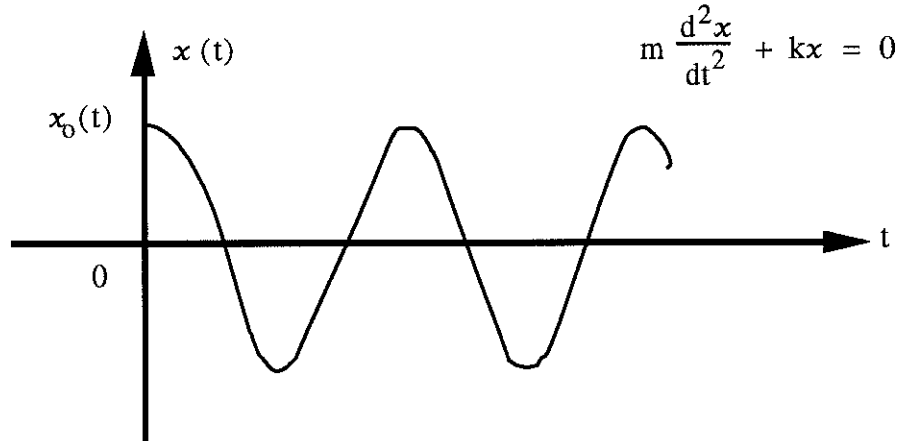
$$(4) \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad (t > 0) .$$

La solution de l'équation différentielle du second ordre (4) est bien connue et est de forme sinusoïdale :

$$(5) \quad x(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t)$$

avec une pulsation ω_0 donnée par la relation classique :

$$(6) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



Cette fois, la variable x oscille indéfiniment entre deux valeurs sans s'amortir. Ce type de comportement porte le nom de **cycle limite**.

Si le système (3) (4) est présenté plus haut sous la forme d'une équation du second ordre avec deux conditions initiales, on peut très facilement se ramener à un système différentiel du premier ordre, mais relatif à un vecteur d'inconnues $X(t)$ à deux composantes :

$$(7) \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

avec $y = \frac{dx}{dt}$. En dérivant y par rapport au temps, et en reportant l'expression obtenue à l'aide de la relation (4), on obtient :

$$(8) \quad \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix} X \equiv \begin{pmatrix} y \\ -\frac{k}{m}x \end{pmatrix}$$

L'équation (8) d'inconnue le vecteur X est du premier ordre en temps, et la conditions initiale (3) peut s'écrire facilement sous la forme :

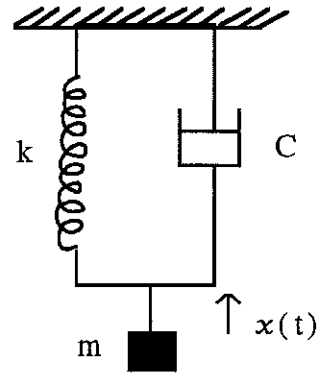
$$(9) \quad X(0) = X_0 \equiv \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

On note également que la présence de la matrice au second membre de la relation (8) est caractéristique du caractère **linéaire** du modèle d'évolution.

- **Système masse-ressort avec amortissement fluide**

Si on complique un peu le système mécanique en adjoignant une force de frottement fluide $- C \frac{dx}{dt}$ à la force de rappel du ressort, l'équation d'évolution (4) devient dans ce cas :

$$(10) \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + C \frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

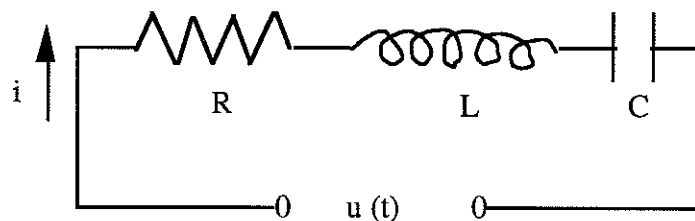


C'est encore un modèle linéaire, qui s'écrit, grâce à la variable X introduite à la relation (7).

$$(11) \quad \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{C}{m} \end{pmatrix} X.$$

Si $C > 0$, ce qui signifie physiquement que l'on a bien à faire à un amortisseur (et non un amplificateur si $C < 0$), alors $X(t)$ tend vers 0 si t tend vers $+\infty$ et l'on retrouve encore dans ce cas un comportement de type **point fixe** [ie $X(t)$ tend vers un état constant pour $t \rightarrow +\infty$].

- **Circuit électrique RLC**



Ce modèle électrique fondamental s'obtient en écrivant que la différence de potentiel u_1 aux bornes de la résistance R vérifie la loi d'Ohm.

$$(12) \quad u_1 = Ri,$$

la différence de potentiel u_2 aux bornes de la self L dérive du courant i .

$$(13) \quad u_2 = L \frac{di}{dt},$$

la différence de potentiel u_3 aux bornes du condensateur C induit une charge q selon la relation :

$$(14) \quad q = C u_3$$

et la dérivée en temps de la charge électrique q est exactement égale au courant i :

$$(15) \quad i = \frac{dq}{dt}$$

De plus, la différence de potentiel $u(t)$ est la source des trois ddp précédentes :

$$(16) \quad u_1 + u_2 + u_3 = u(t).$$

on dérive par rapport au temps les relations (12), (13), (14) en injectant les valeurs obtenues dans la relation issue de (16) par dérivation, en tenant compte de la relation (15). Il vient :

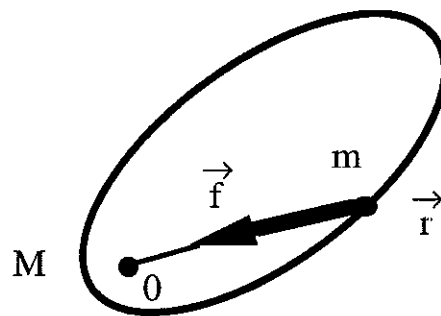
$$(17) \quad L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{du}{dt}$$

Le modèle obtenu est mathématiquement analogue au modèle (10) décrit au point précédent. On peut l'écrire matriciellement :

$$(18) \quad \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{du}{dt} \end{pmatrix}$$

ce qui prend le nom de modèle affine ou "**linéaire avec second membre**".

- **Mouvement d'un satellite**



La masse m placée en \vec{r} est soumise à la force \vec{f} d'attraction de la terre de masse M placée en 0 , donnée par la loi de l'attraction universelle de Newton :

$$(19) \quad \vec{f} = - \frac{kMm}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

qui équilibre le produit de la masse par l'accélération (loi $f = m\gamma$, due au même Newton)

$$(20) \quad \vec{f} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

Le rapprochement de (19) et (20) permet d'écrire l'équation d'évolution du vecteur (à trois composantes) $\vec{r}(t)$.

$$(21) \quad \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{kM}{|\vec{r}|^3} \vec{r} = 0.$$

On notera qu'historiquement, Newton a également dû inventer la notion de dérivée (!). On peut ici faire deux remarques sur ce modèle :

* Le vecteur \vec{r} est soumis à une équation différentielle **non linéaire** puisque le facteur $\frac{kM}{|\vec{r}|^3}$ devant le terme en \vec{r} dans la relation (21) n'est pas une constante, mais dépend explicitement de \vec{r} (par l'inverse du cube de son module).

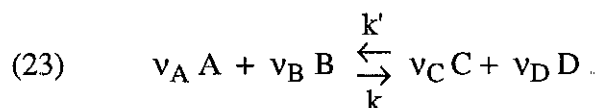
* Si la condition initiale :

$$(22) \quad \vec{r}(0) = \vec{r}_0, \quad \frac{d\vec{r}}{dt}(0) = \vec{v}_0$$

fait apparaître une vitesse \vec{v}_0 de module assez petit, le mouvement est elliptique (lois de Kepler) et est, comme pour le ressort, un comportement de **cycle limite** : $r(t)$ suit indéfiniment une trajectoire fermée de période T .

• Cinétique chimique

La réaction chimique de réactants A, B et de produits C, D est paramétrée par les coefficients stoechiométriques $\nu_A, \nu_B, \nu_C, \nu_D$ qui sont des nombres entiers, et les constantes de réaction directe k et rétrograde k' :



Étant donné des concentrations molaires initiales $[A]_0, [B]_0, [C]_0$ et $[D]_0$, quelles sont les concentrations molaires à un instant ultérieur t ? Le vecteur des inconnues à cette fois quatre composantes :

$$(24) \quad X = ([A], [B], [C], [D])^T$$

[()^T signifie qu'on transpose la ligne () ; X est donc un vecteur colonne] et la réaction (23) entraîne que les quatre concentrations constituant X sont liées par les trois relations suivantes :

$$(25) \quad -\frac{1}{\nu_A} \frac{d[A]}{dt} = -\frac{1}{\nu_B} \frac{d[B]}{dt} = \frac{1}{\nu_C} \frac{d[C]}{dt} = \frac{1}{\nu_D} \frac{d[D]}{dt} (= q)$$

qui définissent le **taux d'avancement** q de la réaction, lequel est donné par la relation :

$$(26) \quad q = k [A]^{\nu_A} [B]^{\nu_B} - k' [C]^{\nu_C} [D]^{\nu_D}$$

Cette fonction q est clairement une fonction **non linéaire** du vecteur X introduit en (24) et l'équation d'évolution de X issue des relations (25) et (26) est donnée par l'équation différentielle ordinaire :

$$(27) \quad \frac{dX}{dt} = q(X) \begin{pmatrix} -\nu_A \\ -\nu_B \\ \nu_C \\ \nu_D \end{pmatrix}$$

L'évolution décrite par la relation (27) peut modéliser des explosions ($\frac{dX}{dt}$ de module très grand devant une grandeur de référence) ou des réactions équilibrées.

- **Météorologie : attracteur de Lorenz**

Dans les années 1960, Lorenz a proposé le modèle **non linéaire** suivant :

$$(28) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -Px + Py \\ \frac{dy}{dt} = -y + rx - xz \\ \frac{dz}{dt} = -bz + xy \end{cases}$$

qui décrit l'évolution du vecteur $X = (x, y, z)^T$ à trois dimensions. Pour des valeurs bien choisies des paramètres P, r, b, l'évolution de X(t), qui reste borné dans une région de l'espace, ne tend pas vers un point fixe ni ne se rapproche d'un cycle limite, mais suit une trajectoire complexe, **difficilement prédictible** (X(t) est délicat à estimer numériquement si on se donne

une condition initiale $X(0)$ et un temps t relativement grand), qui se rapproche de plus en plus d'un objet "proche" d'une surface, et qui est appelée pour toutes ces raisons **attracteur étrange**. La simplicité des équations (28) et les mathématiques vivantes (ie objet de recherches scientifiques en cours actuellement) qu'elles suscitent, montrent que les équations différentielles ordinaires peuvent également constituer un modèle qualitatif pour le comportement de l'atmosphère, difficilement prédictible à long terme malgré la nature déterministe des équations qui le régissent.

- **Définition**

Une équation différentielle ordinaire est une équation d'évolution du type :

$$(29) \quad \frac{dX}{dt} = f(X)$$

où l'inconnue X est caractéristique d'un modèle discret, c'est-à-dire contient un nombre **fini** de composantes :

$$(30) \quad X(t) \in \mathbb{R}^n, \quad n \text{ entier},$$

la fonction f est une fonction (assez régulière) de la variable X , à valeurs dans \mathbb{R}^n :

$$(31) \quad \mathbb{R}^n \ni X \rightarrow f(X) \in \mathbb{R}^n.$$

L'équation différentielle ordinaire (29) est associée à une condition initiale :

$$(32) \quad X(0) = X_0$$

qui est indispensable pour **fermer mathématiquement** le problème, c'est-à-dire assurer qu'en général le problème (29) (32) admet une solution unique $X(t)$, définie sur un intervalle $[0, T[$ ($T = \infty$ est le cas le plus courant), et qui vérifie :

$$(33) \quad \frac{d}{dt} X(t) = f(X(t)) \quad 0 \leq t < T.$$

Lorsque la fonction f peut se mettre sous la forme :

$$(34) \quad f(X) = A X$$

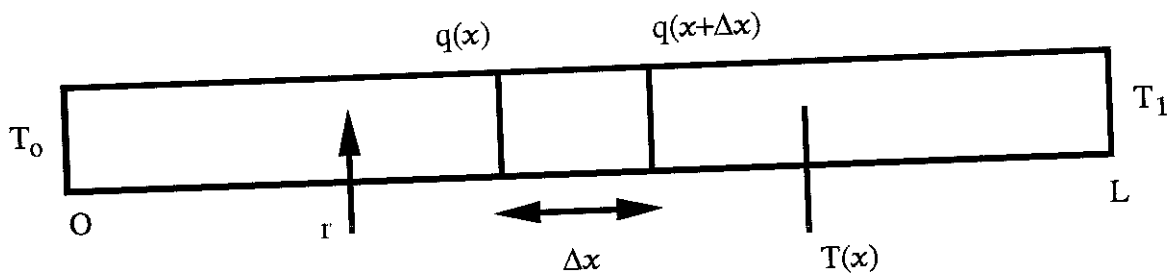
où A est une **matrice** fixée $n \times n$, on dit que l'équation différentielle ordinaire (29) (34) est **linéaire**.

2) Quelques modèles conduisant à des équations aux dérivées partielles.

- **Préambule**

Si une équation différentielle ordinaire se caractérise par une inconnue vivant dans un espace de dimension finie, une équation aux dérivées partielles est caractéristique d'un milieu continu, c'est-à-dire un modèle comportant un nombre infini de degrés de liberté.

- **Diffusion de la chaleur à une dimension d'espace**



Un barreau de longueur L est chauffé par une source r et est maintenu à ses extrémités à une température T_0 (en $x = 0$) et T_1 (en $x = L$). On cherche à calculer le champ de température $T(x)$, c'est-à-dire la fonction :

$$(35) \quad T : [0, L] \ni x \rightarrow T(x) \in \mathbb{R}.$$

L'inconnue est formée maintenant de l'ensemble de toutes les valeurs $T(x)$ pour x parcourant l'intervalle $[0, L]$. On se donne d'abord les **conditions aux limites**.

$$(36) \quad T(0) = T_0, \quad T(L) = T_1$$

et on indique dans ce qui suit l'équation vérifiée par la température dans l'intervalle $]0, L[$. On effectue d'abord un **bilan** d'énergie qui indique que le flux de chaleur q entre les abscisses x et $x + \Delta x$ est exactement compensé par les sources $r \Delta x$:

$$(37) \quad q(x + \Delta x) - q(x) + r \Delta x = 0$$

on divise par Δx , que l'on fait ensuite tendre vers 0. Il vient simplement :

$$(38) \quad \frac{dq}{dx} + r(x) = 0.$$

Le flux de chaleur est relié au champ de température à l'aide de la **loi de Fourier** qui est une loi phénoménologique caractéristique du matériau et peut ne pas être vérifiée pour certains matériaux, ce qui n'est pas le cas pour la loi du bilan d'énergie :

$$(39) \quad q = -k \frac{dT}{dx}$$

paramétrée par le coefficient de conduction thermique k .

Si on injecte la représentation (39) dans le bilan (38), il vient facilement :

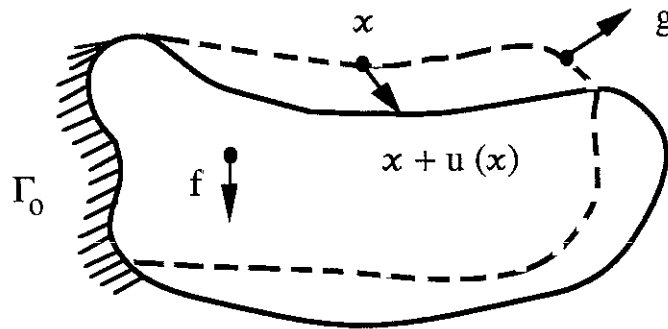
$$(40) \quad -\frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) + r = 0, \quad 0 < x < L.$$

Le système (36) (40) est caractéristique d'un problème de diffusion de la chaleur avec température imposée aux deux bouts (on parle alors de condition limite de Dirichlet). On peut remplacer l'une des conditions (36) par une condition sur le flux de chaleur en A :

$$(41) \quad -k \frac{dT}{dx}(A) = q_A \quad A = 0 \text{ ou } L$$

qui devient une nouvelle condition limite, dite de **Neumann**. On remarque que le problème (40) est du **second ordre** (il fait intervenir des dérivées partielles d'ordre ou plus égal à deux) et à chaque extrémité, on dispose **d'une** condition limite.

- **Résistance des matériaux : élasticité tridimensionnelle**



Sous l'action des forces volumiques f et de forces de surfaces g , un solide élastique Ω ($\Omega \subset \mathbb{R}^3$ pour signifier que l'on s'intéresse à un modèle tridimensionnel) se déforme. On s'intéresse au **déplacement** $u(x)$ du point x appartenant à Ω (x devient $x + u(x)$ sous l'action des forces f et g), qui est le champ de vecteur des inconnues :

$$(42) \quad \mathbb{R}^3 \supset \Omega \ni x \rightarrow u(x) \in \mathbb{R}^3.$$

L'écriture des équations de l'équilibre mécanique dans le domaine Ω demande d'introduire le tenseur des **déformations** ϵ_{ij} et le tenseur des **contraintes** σ_{ij} (ϵ_{ij} et σ_{ij} sont des

matrices 3x3 qui dépendent bien entendu du point x ; $1 \leq i, j \leq 3$). Pour le tenseur des déformations (linéarisées), on pose :

$$(43) \quad \varepsilon_{ij}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad x \in \Omega.$$

Le tenseur des contraintes σ_{ij} lui est relié par la **loi de comportement** de Hooke, qui spécifie que le solide est élastique isotrope (un métal par exemple, tant que les déformations ne sont pas trop importantes) :

$$(44) \quad \sigma_{ij} \equiv \lambda \left(\sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk} \right) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}.$$

Dans l'expression (44), δ_{ij} est le symbole de Kronecker, qui vaut 1 si $i = j$ et 0 si $i \neq j$ et (λ, μ) forme le couple des **coefficients de Lamé**.

On remarque que la loi de Hooke est une relation linéaire liant ε et σ (la fonction $\{\varepsilon_{kl}\} \rightarrow \sigma_{ij}$ est linéaire) qui n'introduit pas de dérivation en espace (la loi de Hooke est **locale**). Comme ε_{ij} , compte tenu de la relation (43), dépend des dérivées premières du champ inconnu u , il en est de même des contraintes : le tenseur des contraintes σ_{ij} dépend linéairement (et symétriquement) du gradient $\partial_k u_l \equiv \frac{\partial u_l}{\partial x_k}$ du champ de déplacement.

L'écriture de l'**équilibre des efforts** au point x (courant) de Ω prend la forme classique

$$(45) \quad \operatorname{div} \sigma + f = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

soit sous forme développée :

$$(46) \quad \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij}(x) + f_i(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad i = 1, 2, 3.$$

Il s'agit clairement [exercice] d'une équation du **second ordre**, c'est-à-dire faisant intervenir les dérivées secondes $\partial_k \partial_l u_m$ du champ de vecteur u .

A l'équation (45), il convient d'ajouter les conditions aux limites qui sont pour cet exemple de deux types **déplacement imposé** (nul par exemple) sur Γ_0 et **force de surface** donnée (égale à g) sur la partie complémentaire Γ_1 (sur le bord $\partial\Omega$ du domaine Ω).

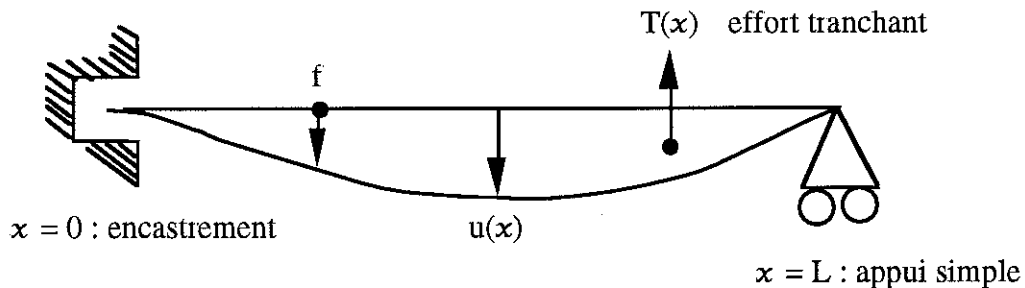
$$(47) \quad u = u_0(x) \quad x \in \Gamma_0,$$

$$(48) \quad \left(\sum_j \sigma_{ij} n_j \right) (\mathbf{x}) = g_i \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1, \quad i = 1, 2, 3 .$$

Dans la relation (48), n_j est la j^e composante de la normale unitaire extérieure au bord Γ_1 .

Ce modèle de matériau élastique est un modèle **cher** puisque les inconnues $u(\mathbf{x})$ sont vectorielles ($u(\mathbf{x})$ est un vecteur à trois composantes) et le domaine Ω tridimensionnel (\mathbf{x} décrit un domaine à trois dimensions). Aussi lui préfère-t-on lorsque la géométrie n'est pas réellement tridimensionnelle (poutres, plaques, coques, etc...), des modèles plus simples. Nous en décrivons deux dans la suite.

- **Résistance des matériaux : flexion des poutres**



Le matériau n'est considéré dans ce modèle que sous un aspect monodimensionnel : le détail d'une section $x = \text{cste}$ n'est pas modélisé. L'inconnue $u(x)$, qui s'appelle maintenant la flèche, est un **scalaire** qui ne dépend plus que du point x ($0 \leq x \leq L$).

Pour établir les équations régissant l'équilibre de la poutre, il faut introduire l'effort tranchant $T(x)$ et le moment fléchissant $M(x)$ qui sont respectivement la moyenne des contraintes verticales dans la section de poutre $x = 0$ et le moment moyen de cette contrainte verticale. L'équation monodimensionnel donnant l'équilibre mécanique est très analogue à la relation (45) :

$$(49) \quad \frac{dT}{dx} + f(x) = 0 \quad 0 \leq x \leq L$$

et il faut adjoindre une identité de nature géométrique liant l'effort tranchant et le moment fléchissant :

$$(50) \quad \frac{dM}{dx} + T(x) = 0 \quad 0 \leq x \leq L .$$

Par ailleurs, la loi de comportement de solide élastique s'écrit pour le moment fléchissant sous la forme :

$$(51) \quad M(x) = EI(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \quad 0 \leq x \leq L$$

où E est le module d'Young du matériau, I(x) l'inertie de la section $x = \text{cste}$ de la poutre et $\frac{d^2 u}{dx^2}$ la courbure linéarisée de la déformée. En introduisant (50) et (51) dans la loi d'équilibre

(49), on trouve l'équation vérifiée par la flèche u(x) :

$$(52) \quad \frac{d^2}{dx^2} \left(EI(x) \frac{d^2 u}{dx^2} \right) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L.$$

Pour cette équation du **quatrième ordre**, deux conditions aux limites sont naturellement à prendre en compte à chaque extrémité. Pour l'exemple décrit sur la figure, nous avons choisi un **encastrement** en $x = 0$ et un **appui simple** en $x = L$. L'encastrement exprime que le déplacement est nul en ce point et que la tangente à la déformée est horizontale, c'est-à-dire :

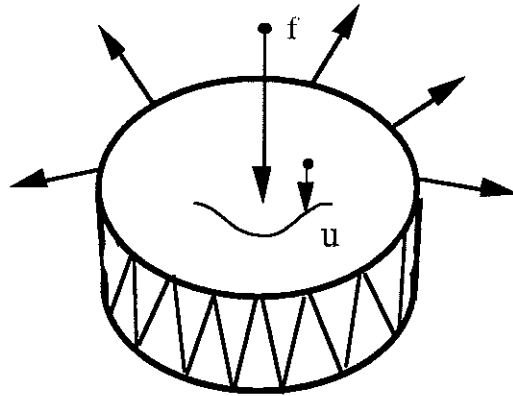
$$(53) \quad u(0) = 0 \quad ; \quad \frac{du}{dx}(0) = 0, \quad \text{encastrement en } x = 0.$$

Pour l'appui simple, le déplacement reste nul en $x = L$, mais c'est le moment fléchissant qui est également nul. Compte tenu de la relation (51), on peut écrire :

$$(54) \quad u(L) = 0 \quad ; \quad \frac{d^2 u}{dx^2}(L) = 0, \quad \text{appui simple en } x = L.$$

L'ensemble (52) (53) (54) constitué de l'équation aux dérivées partielles et des conditions aux limites est facile à résoudre si l'inertie I(x) et les forces f(x) sont constantes ou font l'objet de variations polynomiales. Dans ce cas, la résolution "analytique" de ce modèle est à conseiller, l'emploi d'une méthode d'approximation aux différences finies ne pouvant au mieux fournir qu'une solution approchée, ce qui est inadapté si on connaît une solution exacte. On notera que du point de vue géométrique, le modèle des poutres est très simple et c'est ce qui permet une éventuelle résolution explicite.

- **Membrane vibrante (tambour)**



p : tension du tambour

u = flèche

Une membrane vibrante est modélisée par le déplacement $u(x)$ longitudinal du point x décrivant le domaine bidimensionnel Ω :

$$(55) \quad \mathbb{R}^3 \supset \Omega \ni x \rightarrow u(x) \in \mathbb{R}.$$

L'équation donnant l'évolution en temps de la flèche u est paramétrée par la densité ρ de la membrane, l'inertie I , le module d'Young E , le coefficient de poisson ν , l'épaisseur ε et la tension p . Nous ne donnons pas de détail ici sur son obtention ; elle s'écrit :

$$(56) \quad \rho I \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2}{3} \frac{E \varepsilon^3}{1-\nu^2} \Delta^2 u - p \Delta u = f \quad \text{dans } \Omega$$

où :

$$(57) \quad \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

est le laplacien et $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$ le bilaplacien.

Les conditions aux limites sur le bord $\partial\Omega$ expriment la nullité du déplacement u et l'encastrement par la nullité de la dérivée normale $\frac{\partial u}{\partial n}$.

$$(58) \quad \frac{\partial u}{\partial n} \equiv \nabla u \cdot n = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial u}{\partial x_j} n_j$$

pour un mauvais tambour, c'est-à-dire :

$$(59) \quad u(x) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega$$

ou bien la nullité du déplacement et de son laplacien sur le bord, pour un bon tambour :

$$(60) \quad u(x) = 0, \quad \Delta u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega .$$

• Nous pouvons rapidement, pour le cas de la statique ($\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ devient 0 dans l'équation (56)) considérer les deux cas limites où ε est très petit d'une part, et où la tension p est nulle d'autre part. Dans le cas où ε est très petit, on néglige le terme en bilaplacien devant le terme en laplacien, et on obtient l'équation des **membranes prétendues**

$$(61) \quad \begin{cases} -p \Delta u = f & \Omega \\ u = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$

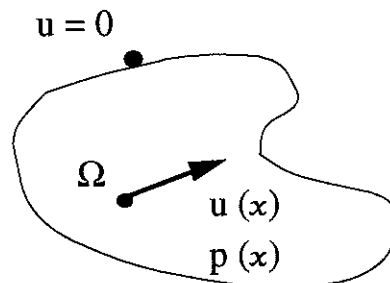
qui constitue le problème de Dirichlet pour l'équation de **Poisson**. On remarque que la condition limite du problème (61) exprime simplement la nullité du déplacement sur le bord, alors qu'on devait prendre deux conditions limites (par exemple (60)) pour le problème initial qui comportait un opérateur du quatrième ordre.

Dans le cas où il n'y a pas de prétension de la membrane, on obtient l'**équation des plaques** :

$$(62) \quad \begin{cases} \frac{2}{3} \frac{E \varepsilon^3}{1 - \nu^2} \Delta^2 u = f & \Omega \\ u = 0 \text{ et } \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \partial\Omega \end{cases}$$

qui est l'analogie à dimensions d'espaces de la flexion des poutres à une dimension d'espace.

- **Mécanique des fluides : équations de Navier-Stokes des fluides incompressibles**



Nous abordons maintenant une équation aux dérivées partielles **non linéaire** issue du modèle classique de l'hydrodynamique : les équations de Navier-Stokes d'un fluide incompressible. Le domaine d'étude Ω appartenant à \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 , on cherche un champ de

vitesse $u(x)$ (vectoriel) et un champ de pression $p(x)$ (scalaire) de façon à garantir l'équilibre du bilan d'impulsion et l'incompressibilité :

$$(63) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u + \nabla p = f \quad \Omega$$

$$(64) \quad \operatorname{div} u = 0 \quad \Omega$$

Dans la relation (63), $u \cdot \nabla u$ est un vecteur dont la $i^{\text{ème}}$ composante est donnée par la relation :

$$(65) \quad (u \cdot \nabla u)_i = \sum_j u_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j} u_i \right)$$

A cette équation, il convient de se donner une condition à la limite et le choix le plus classique consiste à annuler la vitesse au bord :

$$(66) \quad u(x, t) = 0 \quad x \in \partial \Omega, t > 0$$

De plus, une **condition initiale** est indispensable, puisque l'équation (63) indique que les champs dépendent du temps :

$$(67) \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad x \in \Omega$$

On remarque qu'aucune condition initiale n'est demandée sur la pression, qui, compte tenu de la condition limite (66), n'est définie qu'à une constante additive près puisque l'ajout d'une constante à p ne change pas le terme ∇p dans l'équation (63).

Si on néglige le terme non linéaire $u \cdot \nabla u$, ce qui est légitime pour une toute petite vitesse qui évolue doucement en espace, et qu'on suppose le champ de vitesse stationnaire, on obtient le **problème de Stokes** des fluides incompressibles :

$$(68) \quad \begin{cases} -\nu \Delta u + \nabla p = f & \Omega \\ \operatorname{div} u = 0 & \Omega \end{cases}$$

La condition limite (66) est inchangée. On remarque qu'il n'y a pas explicitement d'équation pour la pression, ce qui constitue la difficulté mathématique essentielle dans l'étude de ce problème.

- **Mécanique des fluides : équations d'Euler de la dynamique des gaz**

Pour un gaz de densité ρ , d'énergie interne e , la pression p est donnée par la **loi d'état** thermodynamique. Si le gaz est de chaleurs spécifiques constantes (de rapport $\gamma = C_p/C_v$, $\gamma = 1,4$ pour l'air), le gaz est parfait et l'on a :

$$(69) \quad p = (\gamma - 1) \rho e \quad \text{gaz parfait polytropique,}$$

ce qui constitue une différence essentielle par rapport au modèle précédent du fluide incompressible. Les équations d'Euler consistent simplement à écrire la conservation de la masse, de l'impulsion ρu ($u(x)$ est la vitesse du fluide) et de l'énergie totale ρE , avec E qui représente l'énergie totale par unité de masse :

$$(70) \quad E = e + \frac{1}{2} |u|^2 \quad \text{énergie totale.}$$

Ce sont des équations non linéaires ; nous les écrivons dans le cas de deux dimensions d'espace :

$$(71) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) = 0 \quad \text{masse}$$

$$(72) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho uv) = 0 \quad \text{impulsion en } x$$

$$(73) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v^2 + p) = 0 \quad \text{impulsion en } y$$

$$(74) \quad \frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u E + pu) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v E + pv) = 0 \quad \text{énergie}$$

où la vitesse est maintenant notée (u, v) .

Les conditions limites sur une **paroi solide** s'écrivent simplement en imposant la non-pénétration du fluide dans la paroi :

$$(75) \quad u \cdot n = 0 \quad \text{paroi solide}$$

alors que la condition (66) imposait que toutes les composantes de la vitesse soient nulles au bord. Cette différence est due au fait que la modèle d'Euler néglige le flux de chaleur et la diffusion visqueuse, présentes pour les équations de Navier-Stokes.

Il faut aussi imposer des conditions initiales pour prendre en compte l'aspect instationnaire des équations (71) - (74). Notons que ces équations d'Euler sont **fortement non**

linéaires, n'ont de sens physique sous cette forme que pendant un temps limité même si la donnée initiale est très régulière puisqu'en général des **discontinuités** (ondes de choc, surfaces de glissement) peuvent apparaître dans l'écoulement. Toutefois, tant que l'on manipule une solution régulière du modèle, on peut, au terme d'un calcul classique, écrire la **forme non-conservative** des équations (71)-(74) :

$$(76) \quad \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) & = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p & = 0 \\ \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla s & = 0 \end{cases}$$

où s représente l'entropie par unité de masse, qui pour le gaz polytropique d'équation d'état (69), est calculée grâce à la relation :

$$(77) \quad s = C_v \log \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) \quad \text{entropie spécifique}$$

en fonction de la chaleur spécifique à volume constant C_v et des variables déjà introduites.

- **Équation des ondes acoustiques**

Un état constant est toujours solution des équations (76) de la dynamique des gaz. On peut donc étudier l'évolution d'une petite perturbation autour de cet état constant, la perturbation étant si petite qu'il est alors raisonnable de négliger les termes non-linéaires. On introduit donc un champ perturbant (avec des primes) un état constant de vitesse nulle (avec l'indice zéro) :

$$(78) \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad \mathbf{u} = 0 + \mathbf{u}', \quad p = p_0 + p', \quad s = s_0 + s'$$

dans les équations (76). On développe au premier ordre par rapport à la perturbation et on obtient ainsi les équations fondamentales de l'**acoustique** :

$$(79) \quad \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{u}' = 0$$

$$(80) \quad \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \nabla p' = 0$$

$$(81) \quad \frac{\partial s'}{\partial t} = 0$$

La relation (81) entraîne l'isentropie de la perturbation, donc compte tenu de la relation (77), on obtient :

$$(82) \quad \frac{p'}{p_0} = \gamma \frac{\rho'}{\rho_0}$$

qui permet de définir une célérité c_0 par la relation :

$$(83) \quad c_0 = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$$

En prenant la dérivée en temps de la première équation (79) et la divergence de la seconde (80), on obtient par différence, compte tenu de (82) et (83), la relation suivante :

$$(84) \quad \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = 0 \quad \Omega \times]0, T[$$

qui est l'équation des ondes sonores. On doit lui adjoindre des conditions aux limites sur le bord du domaine d'étude Ω , par exemple :

$$(85) \quad p' = p'_0 \text{ sur } \Gamma_0, \quad \frac{\partial p'}{\partial n} = g \text{ sur } \Gamma_1$$

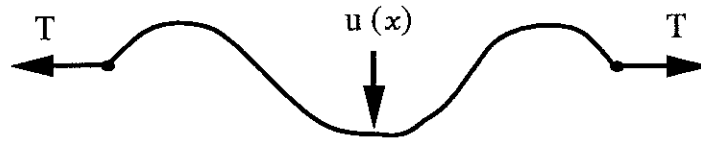
ainsi que des conditions initiales :

$$(86) \quad p'(O, X) = q_0 \quad \frac{\partial p'}{\partial t}(O, X) = q'_0 \quad \text{dans } \Omega$$

pour assurer que le problème (84) (85) (86) admet une unique solution. Dans le cas où les conditions aux limites sont rejetées à l'infini, on sait depuis d'Alembert que toute combinaison du type :

$$(87) \quad p'(x, t) = \varphi(\eta \cdot x - c_0 t) + \psi(\eta \cdot x + c_0 t)$$

où η est un vecteur unitaire donné, est solution de l'équation (84). Le terme en φ est relatif à un profil qui, lorsque le temps croît, se déplace dans la direction η , alors que le terme en ψ se déplace dans la direction opposée au vecteur η . Ici encore, le fait de disposer de solutions de l'équation (87) permet de résoudre de nombreux problèmes pour les ondes sans avoir recours à une méthode numérique de différences finies. Mais lorsque le domaine Ω est de géométrie quelconque, une méthode numérique s'impose (il faut prendre une combinaison infinie de solutions de type (87)) et les éléments finis, aptes à prendre en compte les détails géométriques, constituent un choix possible.



Notons qu'à partir de l'équation (56), en négligeant le terme en ε et en se restreignant par exemple à une dimension d'espace, la perturbation u d'une corde vibrante obéit à une équation identique à (84) :

$$(88) \quad \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad 0 \leq x \leq L, \quad t > 0$$

mais la célérité des ondes est alors donnée par la relation :

$$(89) \quad c_0^2 = \sqrt{\frac{T}{\rho_L}}$$

où ρ_L est la densité linéique de la corde tendue.

- **Électromagnétisme : équations de Maxwell**

Les équations de Maxwell du champ électromagnétique sont les équations locales qui unifient l'électricité, l'optique et le magnétisme. L'inconnue est le couple (E, B) formé du champ électrique E et du champ magnétique B qui sont tous deux fonctions du temps et de l'espace x (x dans un domaine tridimensionnel Ω pour fixer les idées) :

$$(90) \quad \begin{cases} \mathbb{R}^3 \times]0, +\infty[\ni (x, t) \rightarrow E(x, t) \in \mathbb{R}^3 \\ \mathbb{R}^3 \times]0, +\infty[\ni (x, t) \rightarrow B(x, t) \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

on s'attend donc, comme l'inconnue (E, B) à six composantes, à six équations à résoudre. Les deux équations d'évolution en temps, de Maxwell Ampère pour le champ électrique et de Maxwell Faraday pour le champ magnétique.

$$(91) \quad -\frac{\partial E}{\partial t} + \text{rot } B = j \quad \text{Maxwell Ampère}$$

$$(92) \quad \frac{\partial B}{\partial t} + \text{rot } E = 0 \quad \text{Maxwell Faraday}$$

donnent l'évolution du champ (E, B) si on se donne la source j du champ, c'est-à-dire la densité du courant électrique, qui est elle-même un champ de vecteurs supposé connu :

$$(93) \quad \mathbb{R}^3 \times]0, +\infty[\supset \Omega \times]0, +\infty[\ni (x, t) \rightarrow j(x, t) \in \mathbb{R}^3.$$

Mais en pratique, on introduit également la densité de charge ρ , qui est un champ scalaire :

$$(94) \quad \mathbb{R}^3 \times]0, +\infty[\supset \Omega \times]0, +\infty[\ni (x, t) \rightarrow \rho(x, t) \in \mathbb{R}$$

qui vérifie la relation locale dite de **conservation de la charge** :

$$(95) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} j = 0.$$

Le champ électrique et le champ magnétique vérifient alors deux équations de contraintes de Gauss :

$$(96) \quad \operatorname{div} E = \rho(x, t)$$

$$(97) \quad \operatorname{div} B = 0.$$

Si les relations (96) (97) sont satisfaites à l'instant initial $t = 0$, on voit facilement [en prenant la divergence de la relation (91), en dérivant (96) par rapport au temps et en tenant compte de la relation (95) pour le champ électrique ; en prenant la divergence de (92) et en dérivant (97) par rapport au temps pour le champ magnétique] qu'il en est de même à tout instant. Les équations de Gauss (96) et (97) sont donc à considérer comme des **contraintes** à assurer pour la **condition initiale** :

$$(98) \quad E(x, 0) = E_0(x) ; B(x, 0) = B_0(x), \quad x \in \Omega.$$

Par ailleurs, au bord du domaine Ω , on peut se donner une condition limite de conducteur parfait :

$$(99) \quad E \times n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad t > 0.$$

Signalons que nous avons adopté un système d'unité où la vitesse de la lumière est égale à 1, ainsi que la constante μ_0 de perméabilité du vide. Dans une région de l'espace vide de charge ($\rho = 0, j = 0$), on peut dériver (91) par rapport au temps, prendre le rotationnel de (92), tenir compte de l'identité :

$$(100) \quad \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \psi) = \nabla(\operatorname{div} \psi) - \Delta \psi$$

$\psi(x, t)$ champ de vecteurs arbitraire

puis de la relation (96) pour conclure que le champ électrique E satisfait à l'**équation des ondes**.

$$(101) \quad \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \Delta E = 0.$$

Il en est de même pour le champ magnétique :

$$(102) \quad \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} - \Delta B = 0.$$

On retrouve la même équation que pour l'acoustique ou les cordes vibrantes, mais dans un modèle physique tout à fait différent. Toute méthode directe ou approchée de résolution de l'équation des ondes pourra s'appliquer indifféremment en électromagnétisme, en acoustique ou en élastodynamique.

- **Équation d'advection : diffusion à une dimension d'espace**

La résolution approchée des modèles fluides réalistes (équations de Navier-Stokes ou d'Euler) ou des équations de Maxwell demandent d'utiliser des logiciels très performants qui demandent d'employer des calculateurs très puissants (vectoriels, parallèles). Dans la suite de ce cours, un modèle très simple mais à la physique réaliste servira de support à l'analyse de plusieurs méthodes numériques : il s'agit de l'advection-diffusion d'un scalaire u dans le cas d'une dimension d'espace.

On se donne un intervalle d'étude $]0, L[$ et on cherche une fonction inconnue $u(x, t)$ qui est scalaire. On se donne également une vitesse d'advection $a > 0$ (éventuellement fonction de x) et une viscosité $\nu > 0$ (également fonction de x si nécessaire). L'équation d'advection-diffusion décrit l'évolution en temps du champ u :

$$(103) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t > 0.$$

C'est un modèle linéaire déjà riche : si $\nu \equiv 0$, on a une simple **advection** et si $u_0(x)$ est la donnée initiale :

$$(104) \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad 0 \leq x \leq L$$

il est facile de voir que la solution u de (103) [avec $\nu \equiv 0$] est fournie par la relation :

$$(105) \quad u(x, t) = u_0(x - at)$$

si la vitesse d'advection a est constante. Si réciproquement on suppose $a \equiv 0$ mais $v \neq 0$, alors (103) est une équation de **diffusion** (évolution en temps de la chaleur). Lorsque $v \neq 0$, les conditions aux limites peuvent être de type Dirichlet ou Neumann :

$$(106) \quad \text{Dirichlet : } u(x,t) = v_0(t) \quad x = 0 \text{ ou } x = L$$

$$(107) \quad \text{Neumann : } \frac{\partial u}{\partial X}(x,t) = w_0(t) \quad x = 0 \text{ ou } x = L$$

alors que pour $v = 0$, on peut se donner une condition de Dirichlet (106) en $x = 0$, mais aucune condition limite n'est nécessaire en $x = L$!

Notons que le calcul du prix d'une option en mathématiques financières peut être décrit par le modèle dit de Black-Scholès, qui est de type advection-diffusion :

$$(108) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + r x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ru = 0 & t > 0, x > 0 \\ u(T,x) = (x - K) + [\equiv x - K \text{ si } x \geq K, 0 \text{ sinon}] \\ u(t,0) = \varphi(t) \end{cases}$$

- **Physique moléculaire : équation de Schrödinger**

Nous terminons ce panorama de quelques exemples d'équations aux dérivées partielles (qui n'a pas la prétention d'être complet mais cause de nombreux problèmes modèles pour l'ingénieur) par l'équation de Schrödinger. Pour x appartenant à \mathbb{R}^n ($n=1, 2$ ou 3 selon les applications), on cherche une fonction inconnue ψ à valeurs **complexes** :

$$(109) \quad \mathbb{R}^n \times]0, +\infty[\ni (x,t) \rightarrow \psi(x,t) \in \mathbb{C}$$

qui s'interprète comme l'amplitude de probabilité relative à une particule quantique (un électron par exemple) : la probabilité de trouver, l'instant t , la particule dans la région Ω de \mathbb{R}^n est donnée par l'intégrale suivante :

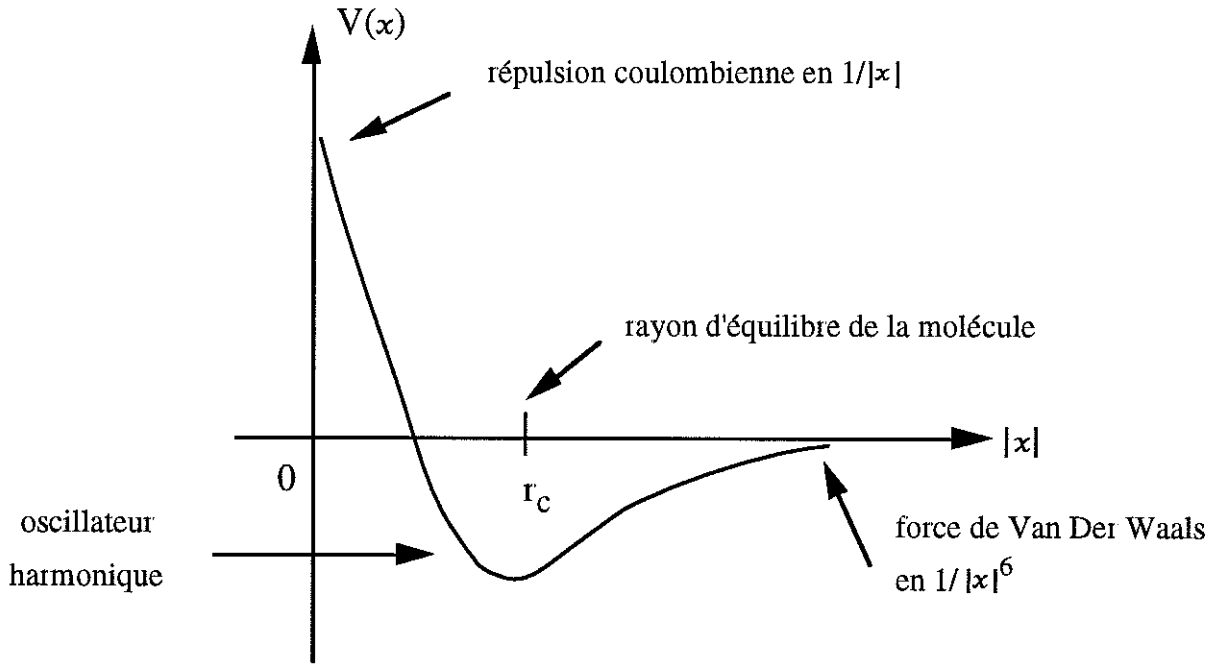
$$(110) \quad \int_{\Omega} |\psi(x,t)|^2 dx = \text{probabilité de présence dans } \Omega$$

et par suite, on cherche ψ de carré intégrable

$$(111) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\psi(x,t)|^2 dx < \infty.$$

Si on suppose la particule de masse m soumise au potentiel $V(x)$, l'équation d'évolution due à Schrödinger s'écrit :

$$(112) \quad i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m} \Delta \psi + V(x) \psi.$$



Potentiel moléculaire typique

Il faut bien entendu se donner une condition initiale, la relation (111) permettant de fixer le comportement à l'infini en espace.

Bien que décrivant une réalité physique microscopique, l'équation (112) ressemble à l'équation de la chaleur [le coefficient i devant le terme $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ étant la seule différence, mathématiquement essentielle, si on suppose $V(x) \equiv 0$] et utilise un opérateur de dérivation en espace parmi les plus courants : le laplacien.