CHAPITRE 7

Introduction à la méthode des éléments finis

François Dubois, 1995-96, édition juin 2009, 18 pages.

VII. INTRODUCTION À LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

1) Introduction

Au chapitre précédent, nous avons vu que l'équation de Poisson :

(1) $\quad - \Delta u = f \qquad \Omega$

associée à divers jeux de conditions aux limites peut être formulée sous forme variationnelle sous la forme :

(2) $\quad u \in V$

(3) $\quad a(u,v) = L(v) \qquad \forall\, v \in V$

où le choix de l'espace de fonctions V, la forme bilinéaire (coercice) $a(\bullet, \bullet)$, ie telle que :

(4) $\quad \exists\, \alpha > 0,\;\; a(v,v) \geq \alpha \, \|v\|_V^2 \qquad \forall\, v \in V$

et la forme linéaire $L(\bullet)$ doivent être choisis avec soin pour prendre en compte l'équation de Poisson (1) $\left[a(\bullet, \bullet) \text{ est du type } \int_\Omega \nabla \bullet \nabla \, dx \right]$, les conditions de Dirichlet [l'espace V est formé de fonctions qui s'annulent là où u est explicitement donné sur le bord], le changement f et les conditions de Neumann [via la forme linéaire $L(\bullet)$].

La méthode des éléments finis consiste à se placer dans des sous-espaces de **dimension finie,** poser un problème approché à la place du problème continu (2) (3) pour se ramener in fine à la résolution numérique d'un système linéaire.

2) Problème de Dirichlet à une dimension d'espace

- Dans ce paragraphe, on se place dans le cas très simple d'une dimension d'espace. Plus précisément, nous prenons :

(5) $\quad \Omega =]0,1[\;$;

alors l'équation de Poisson prend dans ce cas la forme suivante :

(6) $\quad -\dfrac{d^2u}{dx^2} = f \qquad x \in]0,1[$

et nous choisissons des conditions de Dirichlet homogènes

(7) $\quad u(0) = u(1) = 0.$

L'espace V adapté aux conditions (7) est le suivant :

(8) $$V = \{ v : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad v(o) = v(1) = 0 \}$$

avec une forme bilinéaire $a(\bullet, \bullet)$ définie sur l'espace V :

(9) $$a(u,v) = \int_o^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} \, dx \qquad u, v \in V$$

ainsi qu'une forme linéaire $L(\cdot)$ définie sur V :

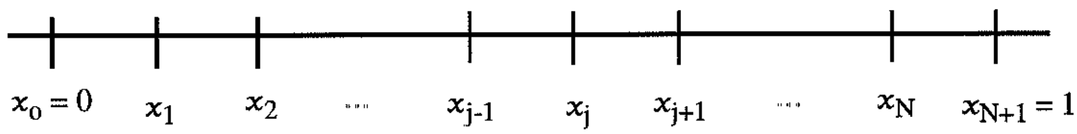
(10) $$L(v) = \int_o^1 fv \, dx \qquad v \in V.$$

- Nous construisons maintenant un sous-espace V_h de l'espace V donné en (8) de la façon suivante : nous fixons un entier $N \geq 1$, posons :

(11) $$h = \frac{1}{N+1}$$

et introduisons un ensemble de points sur une grille de pas h :

(12) $$x_j = jh \qquad j = 0, \ldots, N+1.$$



Grille régulière pour l'équation de Poisson à une dimension d'espace

Nous définissons l'espace V_h comme le sous-espace de V formé de fonctions **continues sur [0,1] et affines dans chaque intervalle** $]x_j, x_{j+1}[$:

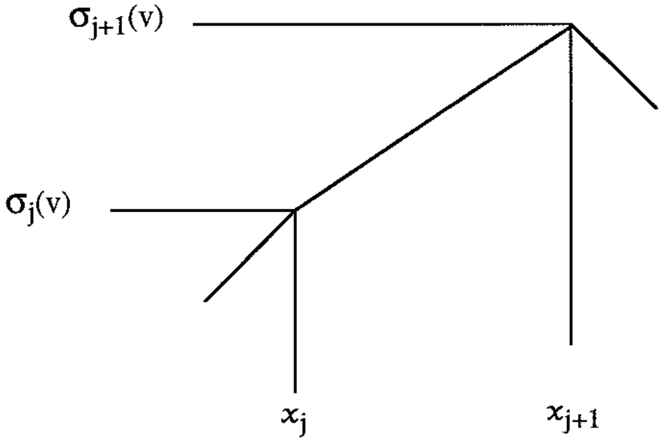
(13) $$\begin{cases} V_h = \{ v : [0,1] \to \mathbb{R}, \; v \text{ continue sur } [0,1], \\ \qquad \forall j = 0, \ldots, N \;\; v_{]x_j, x_{j+1}[} \text{ affine}, \qquad v(0) = v(1) = 0 \}. \end{cases}$$

Une fonction v de V_h est affine dans chaque intervalle donc dépend uniquement des deux valeurs limites aux bornes de celui-ci, c'est-à-dire de $V(x_j+0)$ et $V(x_{j+1}-0)$. Mais v étant globalement continue sur [0,1], les valeurs $v(x_j-0)$ et $v(x_j+0)$ de part et d'autre du sommet x_j sont égales à leur valeur commune $V(x_j)$. Une fonction de v de V_h dépend donc uniquement des valeurs $v(x_o)$, $v(x_1)$, ..., $v(x_j)$, ..., $v(x_N)$, $v(x_{N+1})$ aux sommets des intervalles.

Ces valeurs nécessaires pour calculer les autres valeurs $V(x)$ pour $x \in]0,1[$ de la fonction V sont appelés **degrés de liberté** de l'espace V_h et notés σ_j (V) :

(14) $\quad \sigma_j(v) = v(x_j) \qquad j = 0, \ldots, N+1$.

De plus, $v \in V_h$ est nulle en x=0 et x=1, c'est-à-dire aux sommets x_0 et x_{N+1}. Une fonction v dans V_h dépend uniquement de N valeurs $\sigma_1(V), \ldots, \sigma_N(v)$.

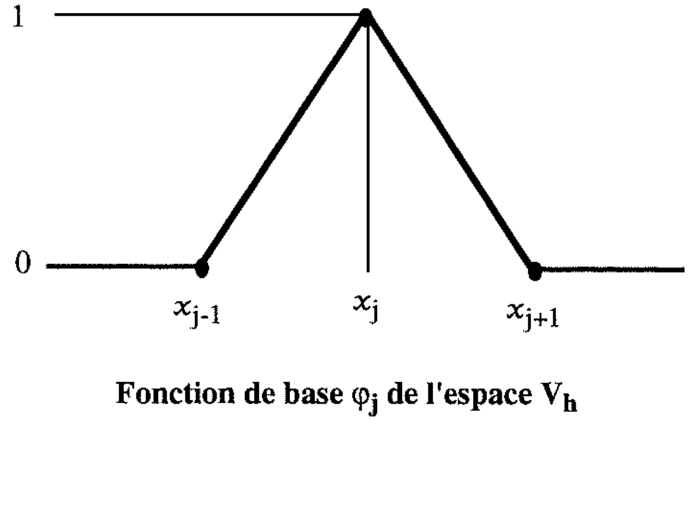


Interpolation affine à l'aide des degrés de liberté de la fonction $v \in V_h$

Nous venons de démontrer que toute fonction v de V_h est entièrement connue dès que les N degrés de liberté $v(x_1), \ldots, v(x_N)$ sont connus, ce qui montre que l'espace **V_h est (au plus) de dimension N**. Pour montrer que V_h est exactement de dimension N, nous explicitons maintenant une base de cet espace. Pour cela, nous utilisons les degrés de liberté introduits à la relation (14) : on fixe j (entre 1 et N) et on cherche une fonction φ_j satisfaisant aux deux relations suivantes :

(15) $\quad \varphi_j \in V_h$

(16) $\quad \sigma_i(\varphi_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$



Fonction de base φ_j de l'espace V_h

La construction explicite de φ_j est élémentaire : il suffit d'interpoler par une fonction affine entre les valeurs $\varphi_j(x_i)$, et l'on obtient de cette manière :

(17) $\quad \varphi_j(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \le x_{j-1} \quad \text{ou} \quad x \ge x_{j+1}$

(18) $\quad \varphi_j(x) = \frac{1}{h}\left(x - x_{j-1}\right) \quad \text{si} \quad x_{j-1} \le x \le x_j$

(19) $\quad \varphi_j(x) = \frac{1}{h}\left(x_{j+1} - x\right) \quad \text{si} \quad x_j \le x \le x_{j+1}$

Les fonctions φ_j ainsi obtenues (j = 1, ..., N) appartiennent à V_h et forment une base de cet espace. En effet, si une combinaison linéaire :

(20) $$v = \sum_{j=1}^{N} v_j \varphi_j(x)$$

est identiquement nulle, il en est de même de $\sigma_1(v)$, et comme $\sigma_i(v) = v_i$ compte tenu de la relation (16), le coefficient v_i est nul pour tout i. Réciproquement, si $v \in V_h$ est une fonction arbitraire, alors la fonction $w = v - \sum_{j=1}^{N} v(x_j)\, \varphi_j$ appartient à V_h, vérifie :

(21) $\quad \sigma_j(w) = \sigma_j(v) - v(x_j) = 0 \qquad \forall_j = 1, ..., N$

donc est identiquement nulle. Toute fonction V de V_h s'écrit donc de façon unique sous la forme :

(22) $$v(x) = \sum_{j=1}^{N} v(x_j)\ \varphi_j(x).$$

- Ayant construit un sous espace V_h de V qui se manipule avec les N nombres $v(x_j)$ (j = 1, ..., N), nous posons maintenant un **nouveau problème variationnel** dans l'espace V_h, en remplaçant simplement V par V_h dans les relations (2) et (3). Nous cherchons donc u_h tel que :

(23) $\quad u_h \in V_h$

(24) $\quad a(u_h, v) = L(v) \qquad \forall v \in V_h$.

Proposition

Le problème variationnel discret (23) (24) admet une unique solution u_h, $a(\bullet, \bullet)$ et $L(\bullet)$ étant donnés par les relations (9) et (10).

Preuve

Nous cherchons u_h sous la forme d'une combinaison des fonctions de base φ_j :

(25) $$u_h = \sum_{j=1}^{N} \underbrace{u_h(x_j)}_{w_j} \varphi_j$$

Si la relation (24) est vraie pour toute fonction v de V_h, elle est en particulier vraie pour $V = \varphi_i$, ce qui conduit aux N équations suivantes :

(26) $$\sum_{j=1}^{N} a(\varphi_i, \varphi_j)\, w_j = L(\varphi_j) \quad ; \; i = 1, \ldots, N .$$

Le système (26) est formé de N équations et possède N inconnues w_j. Il suffit de montrer que la matrice symétrique $a_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$

(27) $$a_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$$

est définie positive pour être certain que si $L(\varphi_i) = 0$ pour tout i, alors $w_j = 0$ pour tout j, ce qui montre qu'alors (26) possède une solution unique. Si $\{\xi_j\}$ désigne un ensemble de N coefficients, on a :

(28) $$\sum_{i,j} a_{i,j}\, \xi_i \xi_j = \int_0^1 \left(\sum_i \xi_i \frac{d\varphi_i}{dx}\right)\left(\sum_j \xi_j \frac{d\varphi_j}{dx}\right) dx$$

et la forme quadratique (28) est positive. De plus, si $\sum a_{ij}\, \xi_i \xi_j$ est nul, alors :

(29) $$\sum_i \xi_i \frac{d\varphi_i}{dx} = 0$$

la fonction $\sum_i \xi_i \varphi_i$ est donc constante et cette constante est nulle car toutes les fonctions φ_i sont nulles en x=0 et x=1. Donc les ξ_i sont tous nuls car les φ_i forment une base de V_h. Ceci termine la preuve de l'unicité de u_h solution du problème variationnel discret (23) (24).

Il suffit de vérifier que u_h, défini par les relations (25) (26) est effectivement solution du problème (23) (24). D'une part, u_h appartient à V_h puisque c'est une combinaison linéaire de fonctions de base. D'autre part, si la relation (26) est vraie pour tout i, il en est de même après multiplication par un scalaire arbitraire ξ_i et sommation sur i. Nous obtenons de cette façon :

(30) $$a\left(\sum_{j=1}^{N} w_j\,\varphi_j\,,\ \sum_{i=1}^{N} \xi_i\,\varphi_i\right) = L\left(\sum_{i=1}^{N} \xi_i\,\varphi_i\right)$$

compte tenu de bilinéarité de $a(\bullet, \bullet)$ et de la linéarité de $L(\bullet)$. Si ξ_i décrit $\mathbb{R}$ tout entier pour toute valeur de i, $\sum \xi_i\,\varphi_i$ est une fonction v_h arbitraire dans V_h, et (30) se réécrit sous la forme:

(31) $$a\,(u_h, v_h) = L(v_h) \qquad \forall v_h \in V_h$$

qui constitue une réplique exacte de la relation (24), au nom de la variable muette près !

La démonstration est donc achevée. ■

• La résolution pratique du problème variationnel (23) (24), qui est une approximation dans V_h du problème continu (2) (3), demande donc la résolution du système linéaire (26). Nous explicitons d'abord les éléments de matrice (27) puis indiquons une méthode approchée pour calculer le second membre $L(\varphi_i)$.

Compte tenu de (27), (9), (17), (18) et (19), l'élément de matrice a_{ij} est nul dès que $|i-j|$ est supérieur (ou égal) à deux :

(32) $$a_{ij} = 0 \qquad \text{si } |i-j| \geq 2.$$

En effet, le support de φ_i, c'est-à-dire l'ensemble des points où φ_i n'est pas nulle est l'intervalle $[x_{i-1}, x_{i+1}]$, donc $\dfrac{d\varphi_i}{dx}$ est nulle hors de cet intervalle :

(33) $$x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \Rightarrow \varphi_i(x) = 0$$

si $|i-j| \geq 2$, prenons $i \leq j$ pour fixer les idées.

Pour calculer a_{ij}, on décompose l'intervalle [0,1] en cinq parties :

(34) $$[0,1] = \bigcup_{k=1}^{5} I_k$$

avec :

(35) $$I_1 = [0, x_{i-1}]$$

(36) $\quad I_2 = [x_{i-1}, x_{i+1}]$

(37) $\quad I_3 = [x_{i+1}, x_{j-1}]$

(38) $\quad I_4 = [x_{j-1}, x_{j+1}]$

(39) $\quad I_5 = [x_{j+1}, 1]$

et il suffit de vérifier que sur chacun de ces intervalles, l'intégrale :

(40) $$a_{ij}\,(I_k) = \int_{I_k} \frac{d\varphi_i}{dx}\,\frac{d\varphi_j}{dx}\,dx$$

est nulle pour établir (32). Or, compte tenu de la relation (33), φ_i **et** φ_j sont nulles sur I_1, I_3 et I_5, φ_i est nulle sur I_4 et φ_j est nulle sur I_2 car $i+1 \leq j-1$. Donc les cinq intégrales introduites en (40) sont nulles et a_{ij} est nul dès que $|i-j| \geq 2$.

Il reste à évaluer $a_{j,\,j+1}$ et a_{jj} pour j quelconque. Compte tenu de (33), le produit $\frac{d\varphi_j}{dx}\,\frac{d\varphi_{i+1}}{dx}$ est nul sur [0,1] sauf sur l'intervalle $[x_j, x_{j+1}]$ où il vaut $-\frac{1}{h} \times \frac{1}{h}$. Comme cet intervalle est de longueur h, ceci montre que :

(41) $$a_{j,\,j+1} = -\frac{1}{h}.$$

De même le produit $\left(\frac{d\varphi_j}{dx}\right)^2$ est non nul sur $[x_{j-1}, x_{j+1}]$ où il vaut $\frac{1}{h^2}$. Cet intervalle étant de mesure 2h, on en déduit :

(42) $$a_{jj} = \frac{2}{h}.$$

Nous venons de prouver la :

Proposition

L'espace V_h étant défini en (13) sur le maillage régulier (11) (12), le problème variationnel (23) (24) conduit à la résolution numérique du système linéaire (26) dont la matrice a_{ij} est tridiagonale, donnée aux relations (32) (41) (42), c'est-à-dire :

$$
(43) \qquad \left[a_{ij}\right] = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}
$$

• On remarque que sur l'intervalle [0,1] avec un maillage régulier, on retrouve une matrice déjà rencontrée au chapitre 4 dans l'étude de l'approximation par différences finies de l'équation de la chaleur. En effet, sur un tel maillage, on a :

$$
(44) \qquad -\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)(x_j) \simeq \frac{1}{h^2}\left(-u_{j-1} + 2\,u_j - u_{j+1}\right)
$$

ce qui correspond, à un facteur h près, à la $j^{\text{ème}}$ ligne de la matrice $\left[a_{ij}\right]$ écrite en (43).

• L'évaluation du second membre demande le calcul des N intégrales :

$$
(45) \qquad b_j = \int_0^1 f(x)\ \varphi_j(x)\ dx\ ;\ j = 1, \dots, N
$$

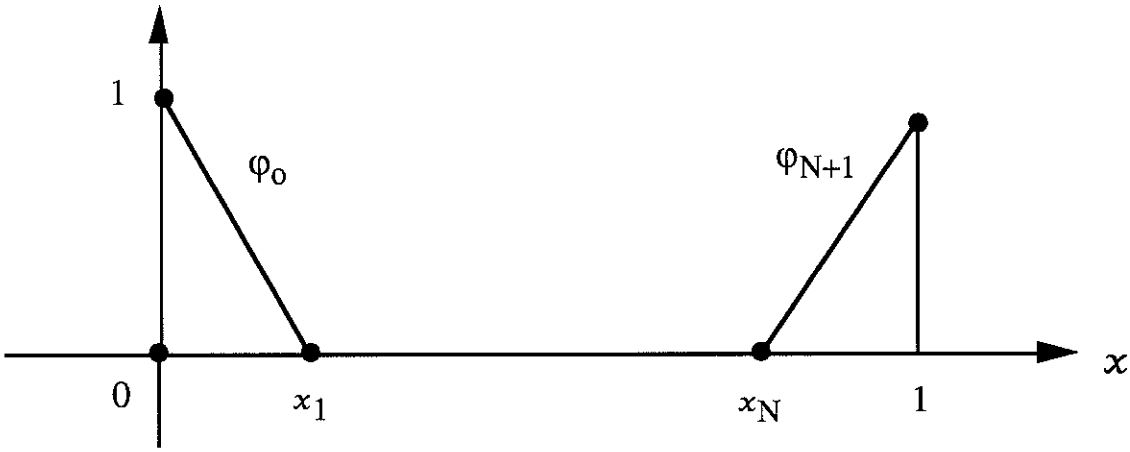
qui est sans difficulté si f est simple mais doit être lui-même mené de façon approchée si f(•) n'a pas de forme algébrique élémentaire, ce qui est en général le cas. Pour cela, on introduit un espace d'interpolation W_h qui est "un tout petit peu plus grand" que V_h, puisqu'on ne suppose plus que les fonctions de cet espace sont nulles en $x = 0$ et en $x = 1$ (la fonction f(•) n'a aucune raison d'être nulle en $x = 0$ et $x = 1$) :

$$
(46) \qquad W_h = \Big\{ (v : [0,1] \to \mathbb{R},\ v \text{ continue sur } [0,1]\ , \\ v_{\,|\,]x_j,\, x_{j+1}[} \text{ affine}\ ,\ \forall j = 0, \dots, N \Big\}.
$$

Il est facile de voir que W_h est un espace de dimension finie N+2, contenant V_h mais non inclus dans V. Une base de W_h est donnée par $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{N+1}\}$, avec φ_j $(1 \leq j \leq N)$ déjà trouvées plus haut et φ_0 et φ_{N+1} satisfaisant à :

$$
(47) \qquad \sigma_j(\varphi_0) = 0 \quad \text{si } j \neq 0, \qquad \sigma_j(\varphi_0) = 1 \quad \text{si } j = 0
$$

$$
(48) \qquad \sigma_j(\varphi_{N+1}) = 0 \quad \text{si } j \neq N+1, \qquad \sigma_j(\varphi_{N+1}) = 1 \quad \text{si } j = N+1.
$$

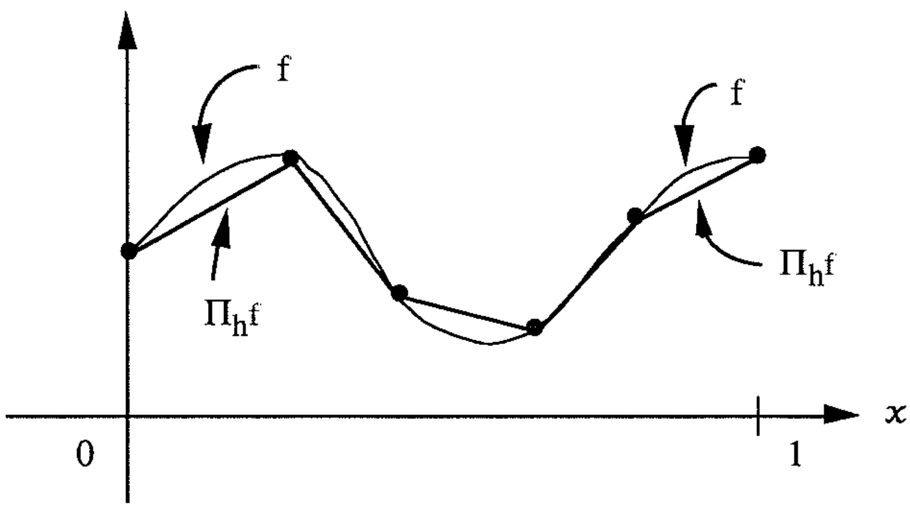


Fonctions de base φ_o et φ_{N+1} pour l'espace W_h

L'espace W_h nous permet d'**interpoler** f par une fonction affine dans chaque intervale $[x_j, x_{j+1}]$, valant f (x_j) pour tous les sommets $x_o, x_1, \ldots, x_{N+1}$. Nous posons donc :

$$(49) \qquad \big(\Pi_h f\big)(x) = \sum_{j=0}^{N+1} f(x_j)\ \varphi_j(x)$$

qui n'est pas égale à f, mais définit une fonction de W_h qui est facile à manipuler pratiquement.



Fonction f et interpolé Π_hf dans W_h

L'intérêt de la représentation (49) est de remplacer l'intégrale (45) par une valeur approchée facile à calculer numériquement en fonction des données. On pose :

$$(50) \qquad c_j = \int_0^1 \left(\Pi_h f\right)(x)\ \varphi_j(x)\ dx \ ; \quad j = 1, \ldots, N.$$

Au lieu de résoudre le système linéaire :

$$(51) \qquad A\,W = B$$

avec A donnée à la relation (43), W vecteur des inconnues w_j introduites à la relation (25), B second membre du terme générique calculé en (45) (qui n'est qu'une réécriture matricielle de (26)), on résout le système linéaire :

$$(52) \qquad A\,W = C$$

où le second membre B est remplacé par C, de terme générique (50). Le calcul de (50) peut être poursuivi plus avant ; nous introduisons le vecteur F (à N+2 composantes ; il faut faire attention à l'introduction de matrices rectangulaires à ce niveau) d'élément générique :

$$(53) \qquad F_k = f(x_k) \ ; \quad k = 0, \ldots, N+1$$

ainsi que la matrice de masse M d'élément générique

$$(54) \qquad M_{jk} = \int_0^1 \varphi_j(x)\ \varphi_k(x)\ dx \ ; \ k = 0, \ldots, N+1 \ ; \ j = 1, \ldots, N$$

ce qui permet d'exprimer C sous la forme :

$$(55) \qquad C = M\,F$$

obtenue en injectant la représentation (49) dans la formule (50). L'avantage de cette écriture est qu'il n'y a plus de calcul numérique laissé en suspens : le vecteur F est connu par les valeurs aux sommets du second membre et la matrice M se calcule de façon explicite. Nous avons :

$$(56) \qquad M_{oo} = M_{N+1,N+1} = \frac{k}{3}$$

$$(57) \qquad M_{j,\,j+1} = \frac{h}{6} \qquad\qquad j = 0, 1, \ldots, N.$$

$$(58) \qquad M_{jj} = 2\,\frac{h}{3} \qquad\qquad j = 1, \ldots, N$$

le calcul, facile à partir des relations (17) à (19), étant laissé au lecteur.

• Etant donné une fonction f : $[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, la résolution approchée du problème (6) (7) par la **méthode des éléments finis** consiste donc à :

* choisir un maillage tel que celui proposé en (12) (mais ce n'est pas obligatoire qu'il soit uniforme),
* calculer les matrices de rigidité A (relation (43)) et de masse M (relations (56) à (58)),
* résoudre le système linéaire :

(59) $$A\,W = CF$$

dont les inconnues w_j représentent une approximation au $j^{\text{ème}}$ sommet de la solution u.

Le résultat est donc une fonction u_h, caractérisée en tout point par la relation (25), donc par les degrés de liberté w_j calculés par résolution de (25).

• Nous terminons ce paragraphe par quelques éléments de **vocabulaire**, général à la méthode des éléments finis. L'ensemble des sommets $\{x_j\}$ définit le **maillage** du domaine d'étude Ω ; chaque intervalle du type $[x_j, x_{j+1}]$ est un **élément fini géométrique** ; leur réunion permet de recouvrir Ω et leur intersection deux à deux est soit vide, soit formée d'un sommet de maillage, soit un élément lui-même. Les **degrés de liberté** σ_j définis en (14) sont des fonctionnelles qui permettent, pour toute fonction v de l'espace d'interpolation V_h, de calculer les nombres σ_j (v) qui la caractérisent complètement. Sur l'ensemble que nous avons étudié ici, les degrés de liberté sont formés par la valeur de la fonction au $j^{\text{ème}}$ sommet, qui sont dans ce cas appelés **noeuds** du maillage.

De façon plus générale, **les noeuds sont les supports géométriques des degrés de liberté.** Par exemple, dans certaines applications, on a besoin de définir comme degré de liberté la valeur moyenne d'une fonction dans un élément ; on pose alors :

(60) $$\sigma_{j+\frac{1}{2}}(v) = \frac{1}{h}\int_{x_j}^{x_{j+1}} v(x)\, dx$$

et l'élément $[x_j, x_{j+1}]$ est lui-même un "noeud" du maillage au sens adopté par les praticiens des éléments finis.

3) Problème de Dirichlet à deux dimensions d'espace

• Nous supposons maintenant que Ω est un ouvert borné du plan à frontière polygonale, nous cherchons à approcher par la méthode des éléments finis l'équation de Poisson (1) avec conditions limite de Dirichlet

(61) $\qquad u = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega.$

Pour cela, nous avons vu au chapitre précédent qu'une formulation variationnelle possible est de la forme (2) (3), avec :

(62) $\qquad V = \left\{ v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ v = 0 \text{ sur le bord } \partial\Omega \right\}$

(63) $\qquad a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \bullet \nabla v \, dx$

(64) $\qquad L(v) = \int_\Omega f v \, dx .$

• La construction d'un sous-espace V_h de V est plus compliquée à deux dimensions d'espace à cause de la **géométrie** du domaine Ω. Nous commençons par réaliser un **maillage** de Ω à l'aide de triangles K, c'est-à-dire découpons Ω en "éléments finis" K qui le recouvrent complètement :

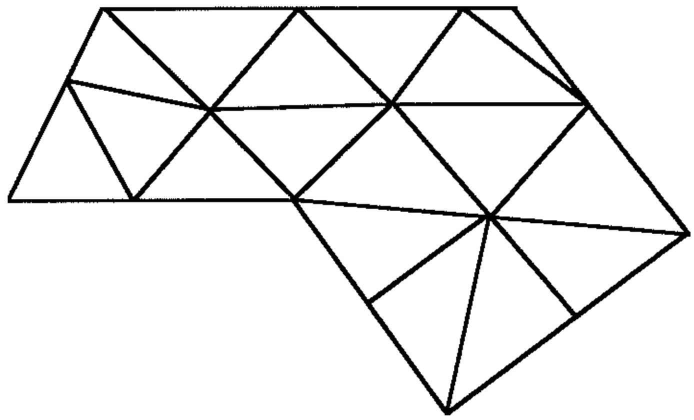
(65) $\qquad \overline{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{C}} \overline{K}.$

Nous imposons de plus à l'intersection à deux triangles K et L de satisfaire la condition suivante :

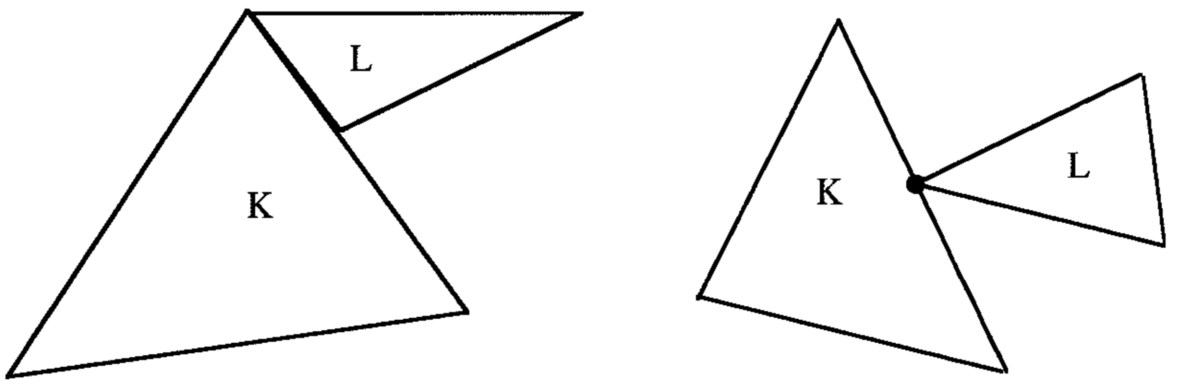
(66) $\qquad \overline{K} \cap \overline{L} = \begin{cases} \emptyset \\ \text{un sommet de K } \textbf{et} \text{ L} \\ \text{une arête de K } \textbf{et} \text{ L} \\ K = L \end{cases}$

qui interdit les deux configurations relatives proposées à la figure de la page suivante, où $\overline{K} \cap \overline{L}$ est une arête de L mais pas de K ou un sommet de L mais pas de K.

Le maillage $\mathcal{T}$ ainsi obtenu permet de définir un ensemble fini d'entités géométriques telles que les éléments du maillage, les arêtes du maillage (communes à deux



Maillage de l'ouvert polygonal Ω par des triangles



Configurations interdites pour deux triangles du maillage $\mathcal{T}$

éléments en touchant le bord $\partial\Omega$) et les sommets du maillage (communs à un nombre indéterminé d'éléments, touchant éventuellement le bord).

Nous définissons l'espace V_h associé à la triangulation $\mathcal{T}$ en choisissant des fonctions de V (donc nulles au bord), continues globalement sur $\overline{\Omega}$ et affines dans chaque triangle :

$$
(67) \qquad \begin{cases} V_h = \Big\{ v : \overline{\Omega} \rightarrow \quad , \text{ v continue sur } \overline{\Omega} , \\ \qquad\qquad v_{|K} \text{ est affine } \forall\, K \in \mathcal{T} ,\ v_{|\partial\Omega} \equiv 0 \Big\} . \end{cases}
$$

Le point clef est de remarquer qu'une fonction de V_h est entièrement déterminée par ses valeurs sur les **sommets du maillage intérieurs** au domaine Ω. On appelle $\mathcal{T}_o$ l'ensemble de ces sommets :

(68) $\mathcal{T}_o = \{ A \in \mathcal{C},\ A \text{ sommet},\ \ A \in \Omega,\ \ A \notin \partial\Omega \}$

et pour $A \in \mathcal{T}_o$, on introduit le degré de liberté σ_A associé à ce sommet :

(69) $\sigma_A(v) = v(A) \qquad A \in \mathcal{T}_o, \quad v \in V_h.$

On note également N_h le cardinal de l'ensemble $\mathcal{T}_o$, c'est à dire le nombre de sommets du maillage qui ne sont pas sur le bord. On a la

Proposition

Soit $\left(\alpha_1, \cdots, \alpha_A, \cdots, \alpha_{N_h}\right)$ une collection de N_h réels fixés. Il existe une unique fonction w nulle sur $\partial\Omega$ telle que :

(70) $\sigma_A(w) = \alpha_A \qquad \forall\, A \in \mathcal{T}_o$

(71) $\omega|_K$ est une fonction affine $\overline{K} \to \mathbb{R}$ continue.

De plus, w est globalement continue sur $\overline{\Omega}$, ce qui montre que w appartient à V_h.

Pour des raisons de commodités, nous appelons $\mathcal{T}$ l'ensemble de **tous** les sommets du maillage.

Preuve de la proposition

Si A désigne un sommet quelconque du maillage, ou bien A appartient à $\mathcal{T}_o$ et la valeur w(A) vaut α_A compte tenu de la relation (70), ou bien A est sur le bord du domaine Ω et la valeur w(A) est nulle. Donc les valeurs de w aux sommets du maillage sont toutes bien définies. De même qu'il faut trois points pour définir un plan dans l'espace, il existe, pour chaque triangle K de la triangulation $\mathcal{T}$, une unique fonction affine φ_K continue sur $\overline{K}$ et de valeurs données aux trois sommets du triangle. La seule chose à montrer est que si on définit w en recollant les fonctions φ_K précédentes, c'est à dire en posant :

(72) $w(x) = \varphi_K(x) \qquad x \in K, \quad K \in \mathcal{T}$

on définit bien une unique fonction continue $\overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ de cette façon. Le seul point non banal est d'établir la continuité sur les arêtes a du maillage à l'interface entre deux éléments K et L du maillage, car en un point $x \in a$, $w(x)$ peut avoir a priori **deux** valeurs limites selon que l'on tend vers x depuis K ou depuis L. Mais pour $x \in a$, la valeur $\varphi_K(x)$ est l'interpolé affine entre les deux valeurs $\sigma_A(\varphi_K)$ et $\sigma_B(\varphi_K)$ (où l'on a posé $a = [A, B]$, lesquelles sont indépendantes de $K \in \mathcal{T}$ compte tenu de (70). La valeur $\varphi_K(x)$, pour $x \in$ a, est définie de façon unique par interpolation linéaire à l'aide des valeurs $\sigma_A(W)$ et $\sigma_B(W)$, donc ne dépend pas du choix de K ou L, ce qui établit la propriété.

■

Réciproquement, étant donné une fonction w de V_h, la collection $\{v(A),\ A \in \mathcal{T}_0\}$ de ses valeurs aux sommets intérieurs du maillage est bien définie car w est continue sur $\overline{\Omega}$. Nous avons donc la

Proposition

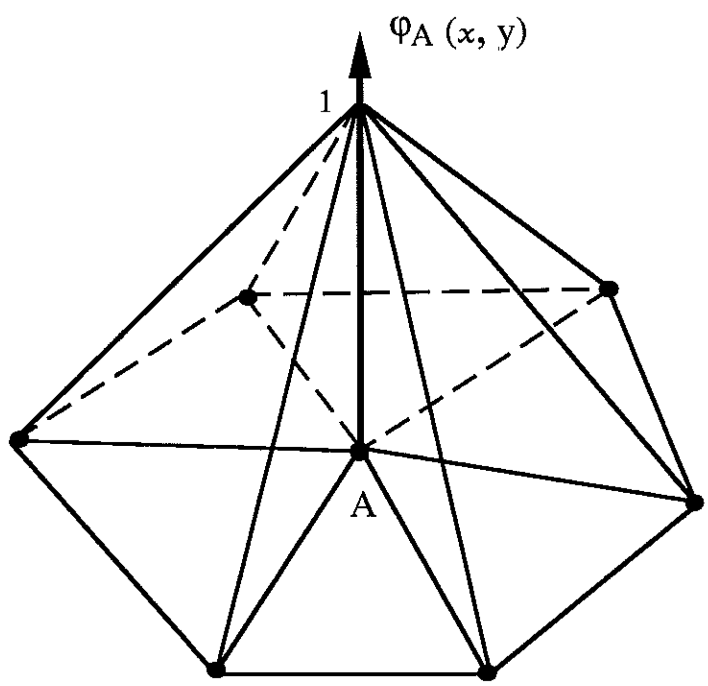
L'espace V_h défini à la relation (67) est de dimension N_h ; il existe une famille unique de fonctions $\{v(A),\ A \in \mathcal{T}_0\}$ formant une **base** de V_h et telle que :

(73) $\quad \sigma_B\,(\varphi_A) = 0 \quad$ si $\quad B \neq A$

(74) $\quad \sigma_A\,(\varphi_A) = 1$;

toute fonction $w \in V_h$ admet une décomposition unique sous la forme :

(75) $$w(x) = \sum_{A \in \mathcal{T}_0} w(A)\ \varphi_A(x)\ , \quad x \in \Omega\,.$$



Graphe d'une fonction de base φ_A relative à un sommet A du maillage commun à six triangles

Preuve

On a vu à la proposition précédente que pour toute collection $\{\alpha_A,\ A \in \mathcal{T}_0\}$ de réels, il existe une unique fonction $\varphi \in V_h$ de sorte que $\sigma_A(\varphi) = \alpha_A$ pour tout sommet A de $\mathcal{T}_0$ En prenant le cas particulier proposé aux relations (73) (74), c'est à dire $\alpha_B = 0$ sauf si $B = A$ (A désignant un sommet fixé), on construit une **unique** fonction φ_A appartenant à V_h et satisfaisant aux deux relations (73) et (74). La fonction φ_A a pour valeur zéro sur tous les sommets, sauf pour le sommet A où elle vaut 1 ; son graphe à l'allure proposée à la page précédente.

Montrons que la famille $\{\varphi_A,\ A \in \mathcal{T}_0\}$ forme effectivement une base de V_h, c'est à dire que la relation (75) a nécessairement lieu pour toute fonction $w \in V_h$. La différence

$$z(x) = w(x) - \sum_{A \in \mathcal{T}_0} w(A)\ \varphi_A(x)\ , \quad x \in \Omega \tag{76}$$

est une fonction appartenant à V_h, nulle en tout sommet B du maillage qui n'est pas sur le bord :

$$z(B) = w(B) - \sum_{A \in \mathcal{T}_0} w(A)\ \varphi_A(B) = w(B) - w(B) = 0 \tag{77}$$

et nulle également sur le bord de Ω ; la fonction $z(\bullet)$ est nulle sur tout sommet du maillage, donc en tout point de Ω par interpolation affine, donc elle est nulle. Ce raisonnement vaut pour toute fonction $w \in V_h$ donc la famille de fonctions $\{\varphi_A,\ A \in \mathcal{T}_0\}$ engendre bien l'espace V_h. Cette famille est de plus libre : si une collection $\{\xi_A,\ A \in \mathcal{T}_0\}$ est telle que :

$$\sum_{A \in \mathcal{T}_0} \xi_A\, \varphi_A \equiv 0 \tag{78}$$

alors cette fonction est nulle pour tout sommet B du maillage, ce qui implique :

$$\xi_B\ \varphi_B(B) = 0 \tag{79}$$

compte tenu des relations (73) et (74), donc tous les coefficients ξ_B sont nuls, ce qui montre la propriété.

■

• Une fonction $w \in V_h$ se manipule en pratique très facilement ; il suffit de se donner les N_h valeurs aux sommets du maillage (les N_h degrés de liberté), ce qui constitue une famille de N_h nombres à manipuler.

Nous pouvons donc poser un problème variationnel **approché** pour résoudre approximativement le problème variationnel (2) (3) associé à (62) (63) (64). On remplace simplement l'espace V par l'espace V_h de dimension finie construit au-dessus. Il vient :

(80) $$u_h \in V_h$$

(81) $$\int_\Omega \nabla u_h \bullet \nabla v \; dx = \int_\Omega f\, v \, dx \,, \quad \forall\, v \in V_h \,.$$

Nous avons la

Proposition

Le problème variationnel discret (80) (81) admet une unique solution u_h. Les coefficients w_A qui caractérisent u_h dans la base $\{\varphi_A\}$:

(82) $$W_h = \sum_{A \in \mathcal{T}_0} w_A \, \varphi_A$$

sont solutions d'un système linéaire

(83) $$\mathcal{A} W = \mathcal{B}$$

d'ordre N_h, la matrice $\mathcal{A}$ et le second membre $\mathcal{B}$ ayant des éléments respectifs $\mathcal{A}_{IJ}$ et $\mathcal{B}_I$ donnés par les relations :

(84) $$\mathcal{A}_{IJ} = \int_\Omega \nabla \varphi_I \bullet \nabla \varphi_J \; dx$$

(85) $$\mathcal{B}_I = \int_\Omega f \;\varphi_I \; dx \,.$$

Preuve

Elle reprend dans ses grandes lignes l'argumentation donnée dans le cas monodimensionnel. On cherche u_h sous la forme (82) et on prend pour fonction test $v = \varphi_I$. Il vient alors nécessairement :

(86) $$\sum_J \mathcal{A}_{IJ} \; W_J = \mathcal{B}_I$$

qui est un système symétrique (clair sur la forme (84)) et défini positif puisque :

(87) $$\sum_{IJ} \mathcal{A}_{IJ}\, \xi_I\, \xi_J = \int_\Omega \Big[\nabla \Big(\sum_J \xi_J\, \varphi_J\Big)\Big]^2 \, dx$$

est toujours positif et n'est nul que si $\sum_J \xi_J\, \varphi_J$ est constante, laquelle est nécessairement nulle en regardant la valeur de cette fonction sur un sommet du bord de Ω. Donc u_h est nécessairement égale à la solution (unique) du système (83) (ou (86), ce qui constitue une écriture équivalente).

Réciproquement, la fonction u_h définie ci-dessus est bien solution de (80) (81) car d'une part (82) est une réécriture de (80) et d'autre part si u_h est solution de (81) dans le cas particulier où $v = \varphi_I$, c'est encore vrai dans le cas général par combinaison linéaire des N_h équations, compte tenu de la linéarité par rapport à v des deux membres de l'égalité (81). Ceci montre la propriété.

■

Le calcul explicite des éléments de matrice $\mathcal{A}_{IJ}$ et du second membre $\mathcal{B}_I$ est traité dans un chapitre particulier, mettant en évidence la possibilité de traitement automatique.

Comme pour le cas monodimensionnel, on peut introduire l'interpolé $\Pi_h f$ dans l'espace W_h de toutes les fonctions continues et affines dans chaque triangle. Le système (83) s'écrit alors :

(88) $$\mathcal{A}\, W = \mathcal{M}\, F$$

en introduisant la matrice de masse $\mathcal{M}$ d'élément générique $\mathcal{M}_{IJ}$:

(89) $$\mathcal{M}_{IJ} = \int_\Omega \varphi_I\, \varphi_J \, dx .$$

Les détails sont laissés au lecteur.