Schéma D2Q9

1. Prise en main du code D2Q9 fourni

L'objectif de cette partie est de prendre en main le code D2Q9 et d'ajouter un certain nombre de fonctions non encore implémentées.

Question 1.
Lancez le code et modifiez les différents paramètres afin de comprendre leur influence. Par exemple, changez le nombre de pas de temps, le pas d'espace, la condition initiale, les paramètres de relaxation.

Question 2.
Expliquez comment les conditions de bord de type bounce back sont implémentées. Ajoutez dans le programme les conditions de type spéculaires, périodiques et anti-bounce back.

Question 3.
Ajoutez d'autres conditions initiales afin de retrouver les résultats obtenus avec le schéma D1Q3 sur l'équation des ondes.

2. Cavité entraînée

Le problème de la cavité entraînée consiste à résoudre l'équation de Navier-Stokes incompressible dans le carré unité en imposant sur la vitesse des conditions aux limites de type Dirichlet (homogène sur trois des côtés et non homogène sur le dernier). On rappelle les équations de Navier-Stokes :

$$\nabla_x \cdot u = 0, \qquad \partial_t u + u \cdot \nabla_x u + \nabla_x p = \nu \Delta_x u.$$

Question 4.
Montrez qu'un schéma D2Q9 dont les conditions initiales sont bien préparées permet d'obtenir une solution approchée des équations de Navier-Stokes. En particulier montrez qu'un choix adapté des paramètres de relaxation permet de spécifier la valeur de la diffusion ν.

Question 5.
En utilisant une modification de la condition de bord de type bounce-back, proposez une méthode qui permet de spécifier des conditions de type Dirichlet non homogène sur la vitesse u. Implémentez cette méthode afin d'imposer $u = 0$ sur les bords ouest, sud, est et $u = u_0 \overrightarrow{x}$ sur le bord nord, où u_0 est une constante que l'on pourra faire varier.

Question 6.
Tracez la solution du problème de la cavité entraînée pour différentes valeurs du nombre de Reynolds, qui vaut u_0/ν.

3. Ecoulement de Poiseuille

L'écoulement de Poiseuille est un écoulement d'un fluide entre deux plaques infinies en régime permanent. On suppose que le fluide est régi par les équations de Navier-Stokes et que la vitesse est nulle sur le bord des plaques. Par invariance par translation, nous pouvons supposer que la solution ne dépend que de deux variables, $x \in \mathbb{R}$ la variable dans le sens de l'écoulement et $y \in [0, 1]$ la variable verticale. On montre que la fonction

$$u(x, y) = \frac{f}{2\nu} y(1 - y),$$

est solution du problème

$$\nabla_x \cdot u = 0, \qquad \partial_t u + u \cdot \nabla_x u + \nabla_x p = \nu \Delta_x u + f,$$

où f est un vecteur constant orienté le long de l'écoulement.

Question 7.
Expliquez sans faire de calcul pourquoi le fait d'ajouter $f * dt$ à la quantité de mouvement entre la phase de transport libre et la phase de collision permet bien de tenir compte de la force extérieure dans le schéma D2Q9.

Question 8.
En pratique, pour des raisons de précision, on ajoute plutôt la moitié de ce terme avant la phase de collision et la moitié après. Programmez le terme de force dans le schéma D2Q9.

Question 9.
Tracez la solution ex acte et la solution approchée obtenue par le schéma D2Q9 où l'on prendra des conditions de bord périodiques sur les bords ouest et est et des conditions de type bounce back sur les bords sud et nord.