Cours 3

Un exemple à deux dimensions d'espace (1)

- Généralités sur le schéma D2Q9
- Distribution d'équilibre à une dimension
- Polynomes de Hermite
- Distribution d'équilibre à deux dimensions d'espace
- Schéma D2Q9-BGK

François Dubois, mars 2010, 18 pages.

LBS

Cours (3) Un exemple à deux dimensions spatiales

- Généralités sur le schéma D2Q9.

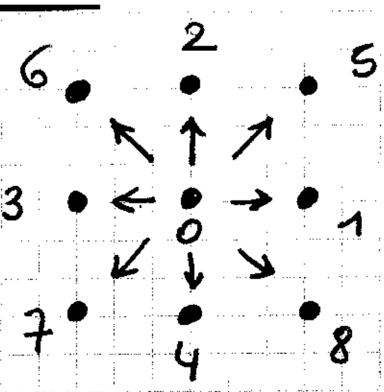

Figure 1. Schéma D2Q9.

Nous présentons dans ce cours le schéma "D2Q9" (deux dimensions spatiales, neuf points voisins) pour l'approximation d'un fluide barotrope (trois équations aux dérivées partielles pour la conservation de la masse et des deux composantes de l'impulsion ; thermodynamique simplifiée). Nous définissons d'abord la famille v de vitesses discrètes grâce à l'ensemble des $(\xi_j)_{0 \leq j \leq 8}$ ($\xi_j \in \mathbb{R}^2$) définis par

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \xi_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \xi_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \xi_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \xi_6 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \xi_7 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \xi_8 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

et illustré Figure 1. On introduit une échelle de vitesse λ par

(2) $\lambda = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$, $\lambda > 0$

et on pose

(3) $v_j = \lambda \xi_j$, $0 \leq j \leq 8$.

- Le réseau $\mathcal{L}$ est un simple produit cartésien :

(4) $\mathcal{L} = (\Delta x \mathbb{Z})^2$

(on ne traite pas de conditions aux limites dans le cadre de ce cours précis) et pour $x \in \mathcal{L}$ et $v_j \in \mathcal{V}$, on a $x - v_j \Delta t \in \mathcal{L}$. Le schéma d'évolution en temps de l'approche "Boltzmann sur réseau" prend la forme

(5) $f_j(x, t+\Delta t) = f_j^*(x - v_j \Delta t, t)$, $0 \leq j \leq 8$, $x \in \mathcal{L}$.

La phase d'advection est triviale (on utilise la méthode des caractéristiques dans le cas particulier où elle est exacte !) et le seul problème est de calculer l'opérateur de relaxation

(6) $\mathbb{R}^9 \ni f \mapsto f^* = Rf \in \mathbb{R}^9$

qui est local en espace, et couple les composantes de f entre elles.

- Dans le cas de l'approximation BGK, la fonction de relaxation R est paramétrée par un temps de relaxation $\tau > 0$, le pas de temps $\Delta t > 0$ et la distribution d'équilibre f_j^{eq} :

(7) $$f_j^* = f_j + \frac{\Delta t}{\tau}(f_j^{eq} - f_j) , \quad 0 \leq j \leq 8 .$$

Dans le cas du schéma à temps de relaxation multiples de d'Humières (1992), la relation algébrique qui permet de calculer Rf est un peu plus longue à écrire que la relation (7), mais elle utilise aussi une distribution d'équilibre $(f_j^{eq})_{0 \leq j \leq 8}$. La détermination de cette distribution d'équilibre est un point crucial dans la construction d'un schéma de Boltzmann sur réseau.

- Distribution d'équilibre à une dimension.

On remarque que pour le schéma D2Q9 tel qu'étudié ici, l'ensemble $\mathcal{V}$ des vitesses défini par (1)(2)(3) peut s'écrire

(8) $$\mathcal{V} = \lambda \{-1, 0, 1\}^2 .$$

Il est donc naturel de traiter d'abord le cas d'une seule dimension spatiale.

- Nous avons vu lors du premier cours que pour les systèmes à vitesses discrètes, l'équilibre thermodynamique impose que la distribution $(\log f_j)_{0 \leq j \leq 8}$ appartient à l'espace des moments conservés. Dans le cas de vitesses variant dans le champ continu des composantes réelles, la conclusion du "théorème H" de Boltzmann (1872) est tout à fait analogue. La distribution continue de vitesse $\log f(v)$ $(v \in \mathbb{R})$ est engendrée par les fonctions $v \mapsto (1, v, \frac{1}{2}v^2)$. Il existe donc des nombres a, b, c réels tels que

$$(9) \qquad \log f^{eq}(v) = a + bv + cv^2, \quad v \in \mathbb{R}.$$

Après changement du nom des paramètres, et afin d'assurer la condition $f \in L^1(\mathbb{R})$, il existe $\rho \in \mathbb{R}$ ($\rho > 0$ en pratique), $\beta > 0$ et $u \in \mathbb{R}$ de sorte que f^{eq} soit égal à g_u, avec

$$(10) \qquad g_u(\theta) = \rho \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} \exp\left[-\frac{\beta}{2}(\theta - u)^2\right], \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

- Dans la loi Gaussienne, Maxwellienne et Boltzmannienne (10) [sans oublier le Français Laplace!], le paramètre β peut s'interpréter comme l'inverse de la variance ;

il est également égal à l'inverse du produit $k_B T$ où k_B est la constante de Boltzmann et T la température :

$$(11) \qquad \beta = \frac{1}{k_B T}.$$

Avant de poursuivre le discours, notons la présence du

Catalogue d'intégrales Gaussiennes

On a les relations élémentaires suivantes :

$$(12) \qquad \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{\beta}{2}\theta^2\right) d\theta = \sqrt{\frac{2\pi}{\beta}}$$

$$(13) \qquad \int_{\mathbb{R}} \theta \exp\left(-\frac{\beta}{2}\theta^2\right) d\theta = 0$$

$$(14) \qquad \int_{\mathbb{R}} \theta^2 \exp\left(-\frac{\beta}{2}\theta^2\right) d\theta = \frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{2\pi}{\beta}}$$

$$(15) \qquad \int_{\mathbb{R}} \theta^3 \exp\left(-\frac{\beta}{2}\theta^2\right) d\theta = 0$$

$$(16) \qquad \int_{\mathbb{R}} \theta^4 \exp\left(-\frac{\beta}{2}\theta^2\right) d\theta = \frac{3}{\beta^2}\sqrt{\frac{2\pi}{\beta}}.$$

La preuve figure dans tous les cours de mathématiques de premier cycle qui abordent ce sujet.

Prop Moments de la distribution d'équilibre.

Avec la fonction g_u définie à la relation (10), on a :

$$(17) \qquad \int_{\mathbb{R}} g_u(\theta)\, d\theta = \rho$$

$$(18) \qquad \int_{\mathbb{R}} \theta\, g_u(\theta)\, d\theta = \rho u$$

- La preuve est claire pour (17) compte tenu de la relation (12). Pour montrer la relation (18), on pose $\theta = u + x$ et on utilise la relation (13). $\square$

- La distribution d'équilibre $g_u(\theta)$ est paramétrée par la densité ρ, la vitesse u et le paramètre $\beta > 0$. Dans l'approche du schéma de Boltzmann sur réseau, il faut remplacer dans (17)(18) les intégrales sur $\mathbb{R}$ par des sommes discrètes sur les vitesses du réseau. Le plus simple, sans être trivial, consiste à utiliser les trois "sommets" $-\lambda, 0, \lambda$ (cf (8)) du réseau D1Q3.

- <u>Polynomes de Hermite</u>

On suppose qu'on dispose d'une formule de quadrature

(19) $$\int_{\mathbb{R}} \varphi(\theta) \exp\left(-\frac{\beta}{2}\theta^2\right) d\theta \simeq \sum_j \omega_j \, \varphi(\xi_j)$$

paramétrée par les poids ω_j et les nœuds ξ_j. Si $\varphi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, on peut interpréter la relation (19) en termes de mesures. On pose

(20) $$d\mu \equiv \exp\left(-\frac{\beta}{2}\theta^2\right) d\theta .$$

Alors (19) s'écrit aussi

(21) $$d\mu \simeq \sum_j \omega_j \, \delta_{\xi_j} .$$

* La relation (19) est exacte pour φ polynôme de degré modéré. On sait que la bonne façon de faire consiste par exemple à choisir pour ξ_j les points de Gauss. Alors on sait (voir un cours d'intégration numérique !) que le bon choix est celui des zéros de la famille des polynômes orthogonaux. Si $H_n(\theta)$ désigne le n° polynôme orthogonal (pour le produit scalaire $(P,Q) = \int_{\mathbb{R}} P(\theta)\, Q(\theta)\, d\mu(\theta)$) de degré n, alors la formule de quadrature (19) est exacte pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à $2n-1$. Nous déterminons dans le paragraphe suivant les polynômes orthogonaux pour la mesure $d\mu$ donnée à la relation (20) de degré ≤ 3 ; ce sont les polynômes de Hermite.

Prop Premiers polynomes de Hermite.

On pose

(22) $H_0(\theta)=1$, $H_1(\theta)=\theta$, $H_2(\theta)=\theta^2-\frac{1}{\beta}$, $H_3(\theta)=\left(\theta^2-\frac{3}{\beta}\right)\theta$

Alors on a

(23) $\int_{\mathbb{R}} H_k H_\ell \, d\mu = 0$ si $k\neq\ell$, $k,\ell\leq 3$

• La preuve consiste à partir de $H_0\equiv 1$ et à construire les H_k de degré k par orthogonalisation de Gram-Schmidt. L'orthogonalité H_0, H résulte de la relation (13). Vu la parité, il est naturel de chercher H_2 sous la forme $H_2(\theta)=\theta^2-C$. Alors

$$(H_2,H_0)=\int_{\mathbb{R}} H_2 \cdot 1\, e^{-\frac{\beta}{2}\theta^2}d\theta = \int_{\mathbb{R}}(\theta^2-C)e^{-\frac{\beta}{2}\theta^2}d\theta$$

$$=\left(\frac{1}{\beta}-C\right)\sqrt{\frac{2\pi}{\beta}} \quad (\text{cf } (12) \text{ et } (14))$$

et la nullité de ce produit scalaire justifie la valeur de $H_2(\theta)$ donnée à la relation (22). Enfin, cherchant H_3 sous la forme d'un polynome impair de degré 3 (alors l'orthogonalité avec H_0 et H_2 résulte facilement de (13)(15)), la seule orthogonalité non banale s'écrit

$$(H_3,H_1)=\int_{\mathbb{R}}(\theta^3-K\theta)\theta\, e^{-\frac{\beta}{2}\theta^2}d\theta=\left(\frac{3}{\beta^2}-K\frac{1}{\beta}\right)\sqrt{\frac{2\pi}{\beta}}$$

grâce aux relations (14) et (16). Le choix $K = 3/\beta$ permet d'achever la construction des premiers polynomes de Hermite, telle que proposée à la relation (22).

Prop Trois points de Gauss pour la Gaussienne

La relation (19) est exacte pour $\varphi \in P_5$ si on choisit pour ξ_j les zéros du polynome H_3 donné à la relation (22) $\left[\xi_{-1} = -\sqrt{\frac{3}{\beta}},\ \xi_0 = 0,\ \xi_1 = \sqrt{\frac{3}{\beta}} \right]$ et comme poids les ω_j donnés par

$$\omega_{-1} = \sqrt{\frac{2\pi}{\beta}}\,\frac{1}{6},\quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2\pi}{\beta}}\,\frac{2}{3},\quad \omega_1 = \sqrt{\frac{2\pi}{\beta}}\,\frac{1}{6}\ :$$

$$(24)\quad \int_{\mathbb{R}} \varphi(\theta) \exp\left(-\frac{\beta}{2}\theta^2\right) d\theta \simeq \left[\frac{2}{3}\varphi(0) + \frac{1}{6}\varphi\left(\sqrt{\frac{3}{\beta}}\right) + \frac{1}{6}\varphi\left(-\sqrt{\frac{3}{\beta}}\right) \right] \sqrt{\frac{2\pi}{\beta}}.$$

• La preuve s'obtient en imposant simplement à la relation (19) d'être exacte pour $\varphi = 1, \theta, \theta^2$. Il vient sans difficulté

$$\begin{cases} \omega_1 + \omega_0 + \omega_{-1} = \sqrt{2\pi/\beta} \\ \omega_1 - \omega_{-1} = 0 \\ 2\,\omega_1 \left(\sqrt{\frac{3}{\beta}}\right)^2 = \frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{2\pi}{\beta}}. \end{cases}$$

D'où $\omega_{-1} = \omega_1 = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{2\pi}{\beta}}$ et ω_0 résulte du complément à l'unité. Le reste de l'énoncé résulte des résultats classiques pour l'intégration numérique de Gauss. □

- On peut faire le lien avec g_0 (faire $u=0$ dans la relation (10)) en choisissant β de sorte que les points de quadrature soient situés sur la "grille en vitesse" donnée à la relation (8), c'est à dire

$$(25) \qquad \lambda = \sqrt{\frac{3}{\beta}} \quad , \text{ie} \quad \beta = \frac{3}{\lambda^2} .$$

On a donc

$$(26) \qquad g_0(\theta)\, d\theta \simeq \rho \left(\frac{2}{3}\delta_0 + \frac{1}{6}\delta_\lambda + \frac{1}{6}\delta_{-\lambda} \right) .$$

- Mais ici, on ne doit pas oublier que la distribution de vitesse à prendre en compte est $g_u(\bullet)$ et non $g_0(\bullet)$! On pourrait adapter (26) sans difficultés, grâce à δ_u, $\delta_{u+\lambda}$ et $\delta_{u-\lambda}$ mais on doit se rappeler que la grille en vitesse (relation (8)) est <u>fixe</u>. On remarque toutefois que l'on a

$$(27) \qquad g_u(\theta) = \exp\left(\beta u \theta - \frac{\beta}{2} u^2 \right) g_0(\theta) , \quad \theta \in \mathbb{R} .$$

Compte tenu de (25) et en développant les exponentielles en vitesse à l'ordre deux au plus, on a

$$(28) \quad g_u(\theta)\, d\theta \simeq \left(1 + \frac{3u}{\lambda}\theta + 3\frac{u^2}{\lambda^2} \right) \rho \left(\frac{2}{3}\delta_0 + \frac{1}{6}\left(\delta_\lambda + \delta_{-\lambda} \right) \right)$$

grâce à la relation (26). Cette dernière relation permet de proposer une <u>distribution d'équilibre à une dimension d'espace</u> :

$$(29)\begin{cases} f_0^{eq} = \frac{2\rho}{3}\left(1-\frac{3}{2}\frac{u^2}{\lambda^2}\right) \\ f_1^{eq} = \frac{\rho}{6}\left(1+\frac{3u}{\lambda}+\frac{3u^2}{\lambda^2}\right) \\ f_{-1}^{eq} = \frac{\rho}{6}\left(1-3\frac{u}{\lambda}+3\frac{u^2}{\lambda^2}\right). \end{cases}$$

Prop Moyennes discrètes.

Pour la distribution d'équilibre $(f_j^{eq})_{j=-1,0,1}$ proposée en (29), on a

$$(30)\begin{cases} f_{-1}^{eq} + f_0^{eq} + f_1^{eq} = \rho \\ -\lambda f_{-1}^{eq} + 0 f_0^{eq} + \lambda f_1^{eq} = \rho u. \end{cases}$$

- Cette proposition est non banale ; en effet, elle permet de satisfaire les contraintes imposées à la distribution d'équilibre, qui peut être aussi recherchée par minimisation de l'entropie $\sum f_j \log f_j$.
- Preuve des relations (30)

  C'est clair pour la première. Pour la seconde,

$$\lambda(f_1^{eq} - f_{-1}^{eq}) = \lambda\frac{\rho}{6}\left(\frac{3u}{\lambda}+\frac{3u}{\lambda}\right) = \rho u. \quad \square$$

- Distribution d'équilibre à deux dimensions d'espace.

Il suffit de remarquer que l'on peut, en s'inspirant du théorème de Fubini, itérer deux fois de suite l'approximation (24) si φ est continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(\theta) \exp\left(-\frac{\beta}{2}|\theta|^2\right) d\theta \simeq$$

$$\sqrt{\frac{2\pi}{\beta}} \left\{ \frac{2}{3} \int_{\mathbb{R}} \varphi(\theta_1, 0) \exp\left(-\frac{\beta}{2}\theta_1^2\right) d\theta_1 + \frac{1}{6} \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\theta_1, \sqrt{\frac{3}{\beta}}\right) \exp\left(-\frac{\beta}{2}\theta_1^2\right) d\theta_1 + \frac{1}{6} \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\theta_1, -\sqrt{\frac{3}{\beta}}\right) \exp\left(-\frac{\beta}{2}\theta_1^2\right) d\theta_1 \right\}$$

$$\simeq \left(\frac{2\pi}{\beta}\right) \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^2 \varphi(0,0) + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} \left[\varphi\left(-\sqrt{\frac{3}{\beta}}, 0\right) + \varphi\left(\sqrt{\frac{3}{\beta}}, 0\right) + \varphi\left(0, -\sqrt{\frac{3}{\beta}}\right) + \varphi\left(0, \sqrt{\frac{3}{\beta}}\right) \right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \left[\varphi\left(-\sqrt{\frac{3}{\beta}}, \sqrt{\frac{3}{\beta}}\right) + \varphi\left(\sqrt{\frac{3}{\beta}}, \sqrt{\frac{3}{\beta}}\right) + \varphi\left(-\sqrt{\frac{3}{\beta}}, -\sqrt{\frac{3}{\beta}}\right) + \varphi\left(\sqrt{\frac{3}{\beta}}, -\sqrt{\frac{3}{\beta}}\right) \right] \right\}$$

D'où

$$(31) \left\{ \begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^2} \varphi(\theta) \exp\left(-\frac{\beta}{2}|\theta|^2\right) d\theta \simeq \left(\frac{2\pi}{\beta}\right) \left\{ \frac{4}{9} \varphi(0,0) + \right. \\ &\quad + \frac{1}{9} \left[\varphi\left(\sqrt{\frac{3}{\beta}}, 0\right) + \varphi\left(0, \sqrt{\frac{3}{\beta}}\right) + \varphi\left(-\sqrt{\frac{3}{\beta}}, 0\right) + \varphi\left(0, -\sqrt{\frac{3}{\beta}}\right) \right] \\ &\left. + \frac{1}{36} \left[\varphi\left(\sqrt{\frac{3}{\beta}}, \sqrt{\frac{3}{\beta}}\right) + \varphi\left(-\sqrt{\frac{3}{\beta}}, \sqrt{\frac{3}{\beta}}\right) + \varphi\left(-\sqrt{\frac{3}{\beta}}, -\sqrt{\frac{3}{\beta}}\right) + \varphi\left(\sqrt{\frac{3}{\beta}}, -\sqrt{\frac{3}{\beta}}\right) \right] \right\} \end{aligned} \right.$$

$\frac{1}{36}$ •	$\frac{1}{9}$ •	• $\frac{1}{36}$
$\frac{1}{9}$ •	$\frac{4}{9}$ •	• $\frac{1}{9}$
$\frac{1}{36}$ •	$\frac{1}{9}$ •	• $\frac{1}{36}$

Figure 2. Poids de Gauss pour le schéma D2Q9

et cette formule de quadrature est illustrée figure 2.

- Si on passe de une à deux dimensions spatiales, on remplace la gaussienne g_u de la relation (10) par son analogue à deux dimensions d'espace

(32) $$f_u(\theta) = \rho\left(\frac{\beta}{2\pi}\right) \exp\left[-\frac{\beta}{2}(\theta_1 - u_x)^2 - \frac{\beta}{2}(\theta_2 - u_y)^2\right]$$

on a alors

(33) $$f_u(\theta) = \exp\left[-\frac{\beta}{2}|u|^2 + \beta(\theta_1 u_x + \theta_2 u_y)\right] f_0(\theta)$$

Donc

$$\begin{aligned} f_u(\theta)d\theta \simeq \exp\left[-\frac{\beta}{2}|u|^2 + \beta(\theta \bullet u)\right] \rho \Big\{ & \frac{4}{9}\delta_{(0,0)} + \\ & + \frac{1}{9}\left(\delta_{(\lambda,0)} + \delta_{(0,\lambda)} + \delta_{(-\lambda,0)} + \delta_{(0,-\lambda)}\right) \\ & + \frac{1}{36}\left(\delta_{(\lambda,\lambda)} + \delta_{(-\lambda,\lambda)} + \delta_{(-\lambda,-\lambda)} + \delta_{(\lambda,-\lambda)}\right)\Big\} \end{aligned}$$

$$\simeq \exp\left[-\frac{\beta}{2}|u|^2 + \beta(\theta \bullet u)\right] \rho \sum_{j=0}^{8} \omega_j \, \delta_{\lambda \xi_j}$$

en introduisant les poids ω_j illustrés figure 2 :

(34) $$\begin{cases} \omega_0 = \dfrac{4}{9} \\ \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \dfrac{1}{9} \\ \omega_5 = \omega_6 = \omega_7 = \omega_8 = \dfrac{1}{36} \end{cases}$$

En appliquant les masses de Dirac aux préfacteurs, il vient

$$f_u(\theta)\,d\theta \simeq \rho \sum_{j=0}^{8} \exp\Big[-\frac{\beta}{2}|u|^2 + \beta\lambda(\xi_j \cdot u)\Big]\, \omega_j\, \delta_{\lambda\xi_j}$$

$$\simeq \rho \sum_j \exp\Big(-\frac{3}{2}\frac{|u|^2}{\lambda^2} + \frac{3}{\lambda}(\xi_j \cdot u)\Big)\, \omega_j\, \delta_{\lambda\xi_j}$$

avec $\beta = 3/\lambda^2$ (cf (25))

Puis on développe le préfacteur exponentiel au second ordre relativement à la vitesse. On pose

(36) $\varphi_j(u) = 1 + 3\left(\frac{\xi_j \cdot u}{\lambda}\right) + \frac{9}{2}\left(\frac{\xi_j \cdot u}{\lambda}\right)^2 - \frac{3}{2}\left|\frac{u}{\lambda}\right|^2.$

on a donc établi l'approximation

(37) $f_u(\theta)\,d\theta \simeq \sum_{j=0}^{8} \rho\, \omega_j\, \varphi_j(u)\, \delta_{\lambda\xi_j}$

- L'approximation (37) définit naturellement une distribution d'équilibre $G_j(\rho, u)$ par

(38) $G_j(\rho, u) = \rho\, \omega_j\, \varphi_j(u)$, $0 \leq j \leq 8$,

ω_j donné en (34) et $\varphi_j(u)$ à la relation (37). Noter que les vecteurs ξ_j intervenant dans (36) sont donnés à la relation (1). La distribution de vitesse (38) est la distribution classique du schéma BGK.

Prop Cohérence de la distribution d'équilibre.

Avec $G_j(\rho, u)$ donné à la relation (38), on a :

(39) $\sum_{j=0}^{8} G_j(\rho, u) = \rho$, $\sum_{j=0}^{8} v_j\, G_j(\rho, u) = \rho u.$

La preuve est un long exercice qui repose de façon fondamentale sur un lemme élémentaire.

Lemme Sommes partielles.

Avec les notations précédentes, on a

$$(40)\qquad \sum_1^4 (\xi_j \cdot u) = 0 \qquad\qquad \sum_5^8 (\xi_j \cdot u) = 0$$

$$(41)\qquad \sum_1^4 |\xi_j \cdot u|^2 = 2|u|^2 \qquad\qquad \sum_5^8 |\xi_j \cdot u|^2 = 4|u|^2$$

$$(42)\qquad \sum_1^4 \xi_j (\xi_j \cdot u) = 2u \qquad\qquad \sum_5^8 \xi_j (\xi_j \cdot u) = 4u$$

$$(43)\qquad \sum_1^4 \xi_j |\xi_j \cdot u|^2 = 0 \qquad\qquad \sum_5^8 \xi_j |\xi_j \cdot u|^2 = 0$$

• **Preuve du lemme.**

Il suffit de s'intéresser aux relations (1). Alors la relation (40) est claire. Par ailleurs,

$$\sum_1^4 |\xi_j \cdot u|^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_x^2 + u_y^2 = 2|u|^2 \text{ comme annoncé}$$

et
$$\sum_5^8 |\xi_j \cdot u|^2 = (u_x+u_y)^2 + (-u_x+u_y)^2 + (-u_x-u_y)^2 + (u_x-u_y)^2$$
$$= 2\left(u_x^2+u_y^2+u_x^2+u_y^2\right) = 4(u_x^2+u_y^2)$$

ce qui achève de prouver la relation (41). On a aussi

$$\sum_1^4 \xi_j (\xi_j \cdot u) = u_x \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + u_y \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - u_x \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} - u_y \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}u_x\\u_y\end{pmatrix}$$

$$\sum_5^8 \xi_j (\xi_j \cdot u) = (u_x+u_y)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + (-u_x+u_y)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + (-u_x-u_y)\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$$
$$+ (u_x-u_y)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4u_x\\4u_y\end{pmatrix} = 4u$$

ce qui établi (42). Enfin, on a

$$\sum_{1}^{4} \xi_j |\xi_j \cdot u|^2 = u_x^2 \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + u_y^2 \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + (-u_x)^2 \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} + u_y^2 \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = 0$$

$$\sum_{5}^{8} \xi_j |\xi_j \cdot u|^2 = (u_x+u_y)^2 \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + (-u_x+u_y)^2 \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + $$
$$+ (u_x+u_y)^2 \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} + (u_x-u_y)^2 \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = 0,$$

d'où la relation (43). $\square$

• <u>Preuve</u> de la cohérence de l'équilibre (BGK).

On a $\frac{1}{\rho} \sum_{0}^{8} G_j(\rho,u) = \frac{4}{9}\left(1 - \frac{3}{2}\left|\frac{u}{\lambda}\right|^2\right) + \frac{1}{9} \sum_{1}^{4} \left\{ 1 - \frac{3}{2}\left|\frac{u}{\lambda}\right|^2 \right.$

$$\left. + 3\,\frac{\xi_j \cdot u}{\lambda} + \frac{9}{2}\left|\frac{\xi_j \cdot u}{\lambda}\right|^2 \right\} + \frac{1}{36} \sum_{5}^{8} \left\{ 1 - \frac{3}{2}\left|\frac{u}{\lambda}\right|^2 \right.$$

$$\left. + 3\,\frac{\xi_j \cdot u}{\lambda} + \frac{9}{2}\left|\frac{\xi_j \cdot u}{\lambda}\right|^2 \right\}$$

$$= \left(\frac{4}{9} + 4\cdot\frac{1}{9} + 4\cdot\frac{1}{36}\right)\left(1 - \frac{3}{2}\left|\frac{u}{\lambda}\right|^2\right) + \frac{1}{9}\cdot\frac{9}{2}\cdot 2\left|\frac{u}{\lambda}\right|^2$$
$$+ \frac{1}{36}\cdot\frac{9}{2}\cdot 4\left|\frac{u}{\lambda}\right|^2$$

$$= 1 + \left|\frac{u}{\lambda}\right|^2\left(-\frac{3}{2} + 1 + \frac{1}{2}\right) = 1 \text{ et}$$

$$\frac{1}{\rho} \sum_{0}^{8} v_j G_j(\rho,u) = \frac{\lambda}{\rho} \sum_{0}^{8} \xi_j G_j(\rho,u) = \frac{\lambda}{9} \left\{ \sum_{1}^{4} \xi_j \left(1 - \frac{3}{2}\left|\frac{u}{\lambda}\right|^2\right.\right.$$

$$\left.\left. + 3\,\frac{\xi_j \cdot u}{\lambda} + \frac{9}{2}\left|\frac{\xi_j \cdot u}{\lambda}\right|^2\right) \right\} + \frac{\lambda}{36} \sum_{5}^{8} \xi_j \Big($$

$$1 - \frac{3}{2}\left|\frac{u}{\lambda}\right|^2 + 3\left|\frac{\xi_j \cdot u}{\lambda}\right| + \frac{9}{2}\left|\frac{\xi_j \cdot u}{\lambda}\right|^2\Big)$$

$$= \left\{ \frac{1}{9}\cdot 3 \cdot 2u + \frac{1}{36}\cdot 3\cdot 4u \right\} = \left(\frac{2}{3}u + \frac{u}{3}\right) = u,$$

et les relations (39) sont démontrées. $\square$

Prop Positivité de la distribution d'équilibre.

Sous la condition

(44) $\quad |u| \leq \dfrac{\lambda}{\sqrt{3}}$

la distribution $G_j(\rho, u)$ est positive si $\rho \geq 0$ et

(45) $\quad \psi_j(u) \geq 0 \quad , \; 0 \leq j \leq 8.$

• Preuve. Si ψ_j est donné à la relation (36), on a

$$\psi_j(u) \geq 1 + 3\left(\frac{u\cdot\xi_j}{\lambda}\right) + \frac{9}{2}\left|\frac{u\cdot\xi_j}{\lambda}\right|^2 - \frac{3}{2}\,\frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + 6\,\frac{u\cdot\xi_j}{\lambda} + 9\left(\frac{u\cdot\xi_j}{\lambda}\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + 3\,\frac{\xi_j\cdot u}{\lambda}\right)^2 \geq 0 . \quad \square$$

• Schéma D2Q9 – BGK.

Avec $f_j^{eq} = G_j(\rho, u)$ donné à la relation (38) (sans oublier (34) et (36)!), la relaxation $f \mapsto f^*$ (cf (6)) est facile à évaluer si on utilise l'approche BGK avec un unique temps de relaxation $\tau > 0$. Si $f_j(x)$ est supposé connu, la fonction $f \mapsto f^*$ se décompose sans difficulté :

$$(46) \qquad \rho = \sum_j f_j \ , \quad \rho u = \sum_j v_j f_j$$

$$(47) \qquad f_j^{eq} = G_j(\rho, u) , \quad 0 \leq j \leq 8$$

$$(48) \qquad f_j^{*} = f_j + \frac{\Delta t}{\tau}\left(f_j^{eq} - f_j\right) , \quad 0 \leq j \leq 8 ,$$

qui permet d'introduire le paramètre $s \equiv \frac{\Delta t}{\tau}$, structurellement positif.

- Moments et polynômes.

Afin de se donner une famille de vecteurs propres de la transposée de la matrice de relaxation on introduit une famille de polynômes. Pour $0 \leq k \leq 8$, on pose

$$(49) \qquad \psi_k = \left\{ \begin{array}{ll} & k \\ 1 & 0 \\ X & 1 \\ Y & 2 \\ X^2+Y^2 & 3 \\ X^2-Y^2 & 4 \\ XY & 5 \\ (X^2+Y^2)\,X & 6 \\ (X^2+Y^2)\,Y & 7 \\ (X^2+Y^2)^2 & 8 \end{array} \right.$$

et on introduit la matrice ψ_{kj} grâce à la relation