Cours 3

Un exemple à deux dimensions d'espace (2)

- Moments et polynomes
- Tenseur des moments du second ordre à l'équilibre
- Algorithme de d'Humières
- Moments orthogonalisés
- Algorithme populaire

François Dubois, mars 2010, 15 pages.

sans difficulté :

$$(46) \qquad \rho = \sum_j f_j \ , \quad \rho u = \sum_j v_j f_j$$

$$(47) \qquad f_j^{eq} = G_j(\rho, u), \quad 0 \leq j \leq 8$$

$$(48) \qquad f_j^{*} = f_j + \frac{\Delta t}{\tau}\left(f_j^{eq} - f_j\right), \quad 0 \leq j \leq 8 ,$$

qui permet d'introduire le paramètre $s \equiv \frac{\Delta t}{\tau}$, structurellement positif.

- Moments et polynomes.

Afin de se donner une famille de vecteurs propres de la transposée de la matrice de relaxation on introduit une famille de polynomes. Pour $0 \leq k \leq 8$, on pose

$$(49) \quad L_k = \left\{ \begin{array}{ll} & k \\ 1 & 0 \\ X & 1 \\ Y & 2 \\ X^2+Y^2 & 3 \\ X^2-Y^2 & 4 \\ XY & 5 \\ (X^2+Y^2)\,X & 6 \\ (X^2+Y^2)\,Y & 7 \\ (X^2+Y^2)^2 & 8 \end{array} \right.$$

et on introduit la matrice L_{kj} grâce à la relation

(50) $\Lambda_{kj} = \Lambda_k(v_j)$, $0 \leq k, j \leq 8$.

Prop Unisolvance

Relativement à l'espace de vitesses V donné à la relation (8), à la famille Σ de degrés de liberté définis par

(51) $\Sigma = \{ \delta_{\lambda \xi_j}, \quad 0 \leq j \leq 8 \}$

et de polynomes $P = \langle \Lambda_k \rangle$ engendrée par la famille Λ_k introduite à la relation (49), on a l'unisolvance, c'est à dire

(52) $\forall \alpha \in \mathbb{R}^9, \exists ! p \in P, \forall \sigma \in \Sigma, \langle \sigma, p \rangle = \alpha_\sigma$.

En d'autres termes, la matrice L définie par les relations (50) est <u>inversible</u> si $\lambda > 0$.

(53)
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 & -\lambda & 0 & \lambda & -\lambda & -\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & -\lambda & \lambda & \lambda & -\lambda & -\lambda \\ 0 & \lambda^2 & \lambda^2 & \lambda^2 & \lambda^2 & 2\lambda^2 & 2\lambda^2 & 2\lambda^2 & 2\lambda^2 \\ 0 & \lambda^2 & -\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2 & -\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 & 0 & -\lambda^3 & 0 & 2\lambda^3 & -2\lambda^3 & -2\lambda^3 & 2\lambda^3 \\ 0 & 0 & \lambda^3 & 0 & -\lambda^3 & 2\lambda^3 & 2\lambda^3 & -2\lambda^3 & -2\lambda^3 \\ 0 & \lambda^4 & \lambda^4 & \lambda^4 & \lambda^4 & 4\lambda^4 & 4\lambda^4 & 4\lambda^4 & 4\lambda^4 \end{pmatrix}$$

- La preuve de la proposition d'unisolvance consiste simplement à calculer le déterminant de la matrice L. On factorise d'abord λ, qui apparaît avec un exposant égal à $1+1+2+2+2+3+3+4 = 18$. Puis on effectue des combinaisons simples de lignes pour créer un bloc 4×4 de zéros "en bas à gauche"

$$\det L = \lambda^{18} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

et le déterminant 8×8 qui reste à évaluer est le produit $D_1 D_2$, avec

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \quad D_2 = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

or

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

et

$$D_2 = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8 \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 8 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 16 \neq 0 . \quad \square$$

- A partir de la matrice L (relations (50) et (53)), on introduit des moments non orthogonaux par

$$(54) \qquad m_k = \sum_{j=0}^{8} L_{kj} \, f_j \, , \quad 0 \leq k \leq 8$$

puis leur valeur à l'équilibre :

$$(55) \qquad m_k^{eq} \equiv \langle \varphi_k \rangle = \sum_{j=0}^{8} L_{kj} \, G_j(\rho, u) \, .$$

(Prop) <u>Moments à l'équilibre.</u>

Avec L_{kj} donné par (50) et $G_j(\rho, u)$ par la relation "BGK" (38), on a

$$(56) \quad \langle \varphi_k \rangle = \left\{ \begin{array}{ll} \rho & 0 \\ \rho u_x & 1 \\ \rho u_y & 2 \\ \frac{2}{3}\lambda^2 \rho + \rho |u|^2 & 3 \\ \rho (u_x^2 - u_y^2) & 4 \\ \rho u_x u_y & 5 \\ \frac{4}{3}\lambda^2 \rho u_x & 6 \\ \frac{4}{3}\lambda^2 \rho u_y & 7 \\ \frac{\lambda^2}{?}(8\rho\lambda^2 + 15\rho |u|^2) & 8 \end{array} \right. \qquad \swarrow k =$$

La preuve de (56) demande de nouveaux résultats préliminaires:

Lemme. Secondes sommes partielles.

(57) $\sum_1^4 [(\xi_j^x)^2 - (\xi_j^y)^2](\xi_j \cdot u) = 0$, $\sum_5^8 [(\xi_j^x)^2 - (\xi_j^y)^2](\xi_j \cdot u) = 0$

(58) $\sum_1^4 [(\xi_j^x)^2 - (\xi_j^y)^2] |\xi_j \cdot u|^2 = 2(u_x^2 - u_y^2)$, $\sum_5^8 [(\xi_j^x)^2 - (\xi_j^y)^2] |\xi_j \cdot u|^2 = 0$

(59) $\sum_1^4 \xi_j^x \xi_j^y (\xi_j \cdot u) = 0$, $\sum_5^8 \xi_j^x \xi_j^y (\xi_j \cdot u) = 0$

(60) $\sum_1^4 \xi_j^x \xi_j^y |\xi_j \cdot u|^2 = 0$, $\sum_5^8 \xi_j^x \xi_j^y |\xi_j \cdot u|^2 = 8 u_x u_y$

• Preuve du lemme.

On commence par la relation (57):

$$\sum_1^4 [\;](\xi_j \cdot u) = u_x - u_y + (-u_x) - (-u_y) = 0$$

et comme $[\;] \equiv [(\xi_j^x)^2 - (\xi_j^y)^2] \equiv 0$ si $j \geq 5$,

les relations (57) et (58) sont établies dans ce cas. Par ailleurs,

$$\sum_1^4 [(\;)^2 - (\;)^2] |\xi_j \cdot u|^2 = u_x^2 - u_y^2 + u_x^2 - u_y^2 = 2(u_x^2 - u_y^2)$$

ce qui prouve la relation (58) dans ce cas. On remarque ensuite que $\xi_j^x \xi_j^y \equiv 0$ si $j \leq 4$; les deux relations associées en (59) et (60) s'en déduisent immédiatement. Pour $j \geq 5$, on a

$$\sum_5^8 \xi_j^x \xi_j^y (\xi_j \cdot u) = (u_x+u_y) - (-u_x+u_y) + (-u_x-u_y) - (u_x-u_y) = 0$$

$$\sum_5^8 \xi_j^x \xi_j^y |\xi_j \cdot u|^2 = (u_x+u_y)^2 - (-u_x+u_y)^2 + (-u_x-u_y)^2 - (u_x-u_y)^2 = 2\left[(u_x+u_y)^2 - (u_x-u_y)^2\right]$$
$$= 2u_x u_y (2-(-2)) = 8 u_x u_y$$

ce qui achève de prouver la relation (60) et établir le lemme. $\square$

• <u>Preuve</u> de la proposition sur les moments à l'équilibre. Les trois premières valeurs ($k=0,1,2$) ne sont qu'une réécriture de la relation (39). Pour $k=3$, on a

$$\sum_0^8 |v_j|^2 G_j = \lambda^2 \sum_0^8 |\xi_j|^2 G_j$$
$$= \rho \frac{\lambda^2}{9} \sum_1^4 |\xi_j|^2 \psi_j + \rho \frac{\lambda^2}{36} \sum_5^8 |\xi_j|^2 \psi_j$$
$$= \rho \frac{\lambda^2}{9} \sum_1^4 \psi_j + \rho \frac{\lambda^2}{18} \sum_5^8 \psi_j$$
$$= \rho \frac{\lambda^2}{9} \left(\sum_1^4 + \frac{1}{2}\sum_5^8\right)\left[1 - \frac{3}{2}\left|\frac{u}{\lambda}\right|^2 + 3\frac{\xi_j \cdot u}{\lambda} + \frac{9}{2}\left|\frac{\xi_j \cdot u}{\lambda}\right|^2\right]$$
$$= \rho \frac{\lambda^2}{9}\left\{ 6\left(1 - \frac{3}{2}\left|\frac{u}{\lambda}\right|^2\right) + \left(\frac{9}{2}\right) 2 \left|\frac{u}{\lambda}\right|^2 + \left(\frac{9}{2}\right)\frac{1}{2} 4 |u|^2 \right\}$$

grâce à (40)(41)

$$= \frac{2}{3}\rho\lambda^2 + \rho\frac{\lambda^2}{9}\left|\frac{u}{\lambda}\right|^2(-9+9+9)$$
$$= \frac{2}{3}\rho\lambda^2 + \rho |u|^2 .$$

Pour $k=4$, il vient grâce à (57) et (58) :

$$\sum_0^8 \left[(v_j^x)^2 - (v_j^y)^2 \right] G_j = \lambda^2 \sum_0^8 \left[(\xi_j^x)^2 - (\xi_j^y)^2 \right] G_j$$
$$= \rho \frac{\lambda^2}{9} \left\{ \sum_1^4 + \frac{1}{4} \sum_5^8 \right\} \left[(\xi_j^x)^2 - (\xi_j^y)^2 \right] \psi_j$$
$$= \rho \frac{\lambda^2}{9} \sum_1^4 \left[(\,)^2 - (\,)^2 \right] \frac{9}{2} \left| \frac{\xi_j \cdot u}{\lambda} \right|^2$$
$$= \frac{1}{2} \rho \quad \left(2 (u_x^2 - u_y^2) \right) \quad (\text{cf } (58))$$
$$= \rho \; (u_x^2 - u_y^2).$$

* Pour la ligne correspondant à $k = 5$, on a grâce à (59) et (60)

$$\sum_{j=0}^8 v_j^x v_j^y G_j = \lambda^2 \sum_1^8 \xi_j^x \xi_j^y G_j$$
$$= \frac{\lambda^2}{36} \rho \sum_5^8 \xi_j^x \xi_j^y \psi_j$$
$$= \rho \frac{\lambda^2}{36} \cdot \frac{9}{2} \; 8 \frac{u_x u_y}{\lambda^2} = \rho \, u_x u_y .$$

* Pour les lignes correspondant à des polynomes d'ordre 3, il vient

$$\sum_0^8 |v_j|^2 v_j G_j = \lambda^3 \sum_1^8 |\xi_j|^2 \xi_j G_j$$
$$= \rho \frac{\lambda^3}{9} \sum_1^4 \xi_j \psi_j + \rho \frac{\lambda^3}{36} \cdot 2 \sum_5^8 \xi_j \psi_j$$
$$= \rho \frac{\lambda^3}{9} \cdot 3 \cdot 2 \frac{u}{\lambda} + \rho \frac{\lambda^3}{18} \cdot 3 \cdot 4 \frac{u}{\lambda} \quad \text{cf} (42)(43)$$
$$= \rho \frac{\lambda^2}{3} (2u + 2u) = \frac{4}{3} \rho \lambda^2 u \quad .$$

La dernière ligne de la relation (56), on a

$$\sum_0^8 |v_j|^4 g_j = \lambda^4 \sum_1^8 |\xi_j|^4 g_j$$

$$= \rho\left[\frac{\lambda^4}{9}\sum_1^4 \psi_j + \frac{\lambda^4}{36}\cdot 4 \cdot \sum_5^8 \psi_j\right]$$

$$= \rho\frac{\lambda^4}{9}\left((4+4)\left(1-\frac{3}{2}\left|\frac{u}{\lambda}\right|^2\right) + \frac{9}{2}\left(2\left|\frac{u}{\lambda}\right|^2 + 4\left|\frac{u}{\lambda}\right|^2\right)\right)$$

au vu de (36) et (41)

$$= \frac{8}{9}\rho\lambda^4 + \rho\frac{\lambda^2}{9}|u|^2(-12+27) = \rho\frac{\lambda^2}{9}(8\lambda^2 + 15|u|^2)$$

ce qui achève la preuve. $\square$

- <u>Tenseur des moments du second ordre à l'équilibre.</u>

Pour $1 \leq \alpha, \beta \leq 2$, on pose

(61) $\quad F^{\alpha\beta} = \sum_j v_j^\alpha v_j^\beta g_j(\rho, u) \quad , \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq 2$

et l'on définit ainsi le tenseur des seconds moments de la distribution à l'équilibre.

Prop <u>Tenseur des seconds moments.</u>

Avec $F \equiv (F^{\alpha\beta})_{\alpha,\beta}$ défini par la relation (61), on a

(62) $$F = \begin{pmatrix} \rho u_x^2 + \frac{\lambda^2}{3}\rho & \rho u_x u_y \\ \rho u_x u_y & \rho u_y^2 + \frac{\lambda^2}{3}\rho \end{pmatrix}.$$

* On verra au cours numéro 4 que l'essentiel du fluide parfait est traité grâce au tenseur F défini en (61). On peut ensuite identifier le terme $\lambda^2 \rho / 3$ sur la diagonale à la pression. Cette dernière apparaît donc dans l'approximation acoustique, c'est à dire

(63) $$p = c_0^2 \rho$$

avec une vitesse du son c_0 qui vaut ici

(64) $$c_0 = \frac{\lambda}{\sqrt{3}} \,.$$

- Preuve de la proposition

De $X^2 = \frac{1}{2}(X^2+Y^2) + \frac{1}{2}(X^2-Y^2)$, il vient

$$\begin{aligned} F^{11} &= \frac{1}{2}\langle L_3 \rangle + \frac{1}{2}\langle L_4 \rangle \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{2}{3}\lambda^2\rho + \rho|u|^2 + \rho(u_x^2 - u_y^2)\Big) \\ &= \frac{\lambda^2}{3}\rho + \rho u_x^2 \end{aligned}$$ comme proposé.

$F^{12} = \langle L_5 \rangle = \rho\, u_x u_y$ et de $Y^2 = \frac{1}{2}(X^2+Y^2) - \frac{1}{2}(X^2-Y^2)$, on tire

$$\begin{aligned} F^{22} &= \frac{1}{2}\langle L_3 \rangle - \frac{1}{2}\langle L_4 \rangle \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{2}{3}\lambda^2\rho + \rho|u|^2 - \rho(u_x^2 - u_y^2)\Big) \\ &= \frac{\lambda^2}{3}\rho + \rho u_y^2 \,. \end{aligned}$$ $\square$

- ## Algorithme de d'Humières

Afin d'itérer le schéma de Boltzmann sur réseau (5), l'approche de d'Humières (1992) pour le calcul de la relaxation $f \mapsto f^*$ suit l'approche décrite ci-dessous

- Calcul des moments grâce à (54).
- Remarquer que $\rho = m_0$ et $\rho u = m_\alpha$ sont les moments à l'équilibre.
- calcul des autres moments à l'équilibre m_k^{eq} pour $k \geq 3$ grâce aux relations (56).
- Pour $k \geq 3$, introduire le paramètre $s_k > 0$ de relaxation du k^e moment

(65) $$s_k = \frac{\Delta t}{\tau_k}, \quad k \geq 3, \quad s_k > 0.$$

Alors

(66) $$m_k^* = m_k + s_k \left(m_k^{eq} - m_k \right), \quad k \geq 3$$

- Repasser dans l'espace des particules :

(67) $$f_j^* = \sum_k \left(L^{-1} \right)_{jk} \, m_k^* .$$

- Moments orthogonalisés.

L'état de l'art (Lallemand et Luo, 2000) consiste à utiliser une matrice M du genre de celle introduite à la relation (50). Mais on orthogonalise la matrice $(L_{kj})_{0 \leq k,j \leq 8}$ par un procédé de Gram-Schmidt relativement au produit scalaire

$$(68) \qquad (P, Q) = \sum_{j=0}^{8} P(v_j)\, Q(v_j).$$

(Prop) Polynomes de Lallemand.

La famille $(\widetilde{L}_k)_{0 \leq k \leq 8}$ issue de $(L_k)_{0 \leq k \leq 8}$ (relation (49)) par le procédé de Gram-Schmidt

$$(69) \quad \widetilde{L}_k = \begin{cases} L_0 = 1 \\ L_1 = X \\ L_2 = Y \\ 3L_3 - 4\lambda^2 L_0 = 3(X^2+Y^2) - 4\lambda^2 \\ L_4 = X^2 - Y^2 \\ L_5 = XY \\ 3L_6 - 5\lambda^2 L_1 = \left(3(X^2+Y^2) - 5\lambda^2\right) L_1 \\ 3L_7 - 5\lambda^2 L_2 = \left(3(X^2+Y^2) - 5\lambda^2\right) L_2 \\ \frac{9}{2} L_8 - \frac{7}{2}\lambda^2 \widetilde{L}_3 - 10\lambda^4 L_0 = \frac{9}{2} L_8 - \frac{21}{2}\lambda^2 L_3 + 4\lambda^4 \end{cases}$$

est orthogonale pour le produit scalaire défini par la relation (68).

• La preuve est claire pour les trois premiers polynomes L_0, L_1, L_2. Pour le suivant, on remarque que $(L_3, L_1) = (L_3, L_2) = 0$ donc on cherche L'_3 sous la forme $L'_3 = L_3 - a\, L_0$. Comme $(L_3, L_0) = 12\,\lambda^2$ et $(L_0, L_0) = 9$, il vient $a = 12\,\lambda^2/9 = \frac{4}{3}\,\lambda^2$. La valeur proposée à la relation (68) consiste à choisir $\widetilde{L}_3 = 3\, L'_3$.
Les polynomes L_4 et L_5 sont orthogonaux à L_0, L_1, L_2, L_3 (voir la relation (49)), donc $\widetilde{L}_4$ et $\widetilde{L}_5$ sont égaux à L_4 et L_5 respectivement. Les polynomes L_6 et L_7 sont orthogonaux à $L_0, .., L_5$ sauf L_1 et L_2 respectivement. On cherche donc L'_6 sous la forme $L'_6 = L_6 - b\, L_1$. Comme $(L_6, L_1) = 10\,\lambda^4$ et $(L_1, L_1) = 6\lambda^2$, on a $b = \frac{5}{3}\,\lambda^2$ et le choix proposé correspond à $\widetilde{L}_6 = 3\, L'_6$. Le calcul avec L_7 et L_2 est tout à fait analogue (c'est la seconde composante du flux de chaleur) ; il est laissé au lecteur.
Enfin, le polynome L_8 est orthogonal à L_1, L_2, L_4, L_5, L_6 et L_7 mais pas à L_0 et L_3. On pose donc $L'_8 = L_8 - c\,\widetilde{L}_3 - d\, L_0$. Sachant que $\widetilde{L}_3(v_0) = -4\,\lambda^2$, $\widetilde{L}_3(v_1)$ à $\widetilde{L}_3(v_4) = -\lambda^2$, $\widetilde{L}_3(v_5)$ à $\widetilde{L}_3(v_8) = 2\lambda^2$, il vient $(L_8, \widetilde{L}_3) = 28\lambda^6$, $(\widetilde{L}_3, \widetilde{L}_3) = 36\,\lambda^4$ et l'orthogonalité $(L'_8, \widetilde{L}_3)$ impose $c = \frac{28}{36}\,\lambda^2$, ie $c = \frac{7}{9}\,\lambda^2$. Par ailleurs, $(L_8, L_0) = 20\,\lambda^4$, $(L_0, L_0) = 9$ donc $d = \frac{20}{9}\,\lambda^4$. En choisissant $\widetilde{L}_3 = \frac{9}{2}\, L'_3$, on obtient la première relation proposée à la dernière ligne de la relation (69). On a ensuite

$$\tilde{L}_8 = \frac{9}{2} L_8 - \frac{7\lambda^2}{2}\left(3 L_3 - 4\lambda^2\right) - 10\lambda^4 = \frac{9}{2} L_8 - \frac{21\lambda^2}{2} L_3 + 4\lambda^4 = \frac{9}{2} L_8 - \frac{21}{2}\lambda^2 (X^2 + Y^2) + 4\lambda^4 .$$

$\square$

- Nous pouvons maintenant expliciter la matrice M définie par

$$(70) \qquad M_{kj} = \tilde{L}_k (v_j) \ , \quad 0 \leq k, j \leq 8 :$$

$$(71) \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 & -\lambda & 0 & \lambda & -\lambda & -\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & -\lambda & \lambda & \lambda & -\lambda & -\lambda \\ -4\lambda^2 & -\lambda^2 & -\lambda^2 & -\lambda^2 & -\lambda^2 & 2\lambda^2 & 2\lambda^2 & 2\lambda^2 & 2\lambda^2 \\ 0 & \lambda^2 & -\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2 & -\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \\ 0 & -2\lambda^3 & 0 & 2\lambda^3 & 0 & \lambda^3 & -\lambda^3 & -\lambda^3 & \lambda^3 \\ 0 & 0 & -2\lambda^3 & 0 & 2\lambda^3 & \lambda^3 & \lambda^3 & -\lambda^3 & -\lambda^3 \\ 4\lambda^4 & -2\lambda^4 & -2\lambda^4 & -2\lambda^4 & -2\lambda^4 & \lambda^4 & \lambda^4 & \lambda^4 & \lambda^4 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est de fait utilisée dans de nombreux logiciels de résolution numérique de problèmes fluides à deux dimensions d'espace avec le schéma de Boltzmann sur réseau, dans sa variante DdH à "temps de relaxation multiples".

Prop <u>Moments orthogonalisés à l'équilibre.</u>

A l'aide des polynomes $(\tilde{L}_k)_{0 \leq k \leq 8}$ définis en (69) et l'équilibre $G_j(\rho, u)$ obtenus à la relation (38), les moments $\tilde{m}_k$ à l'équilibre définis par

$$(72) \quad \tilde{m}_k^{eq} = \sum_{j=0}^{8} \tilde{L}_k(v_j)\, G_j(\rho, u) = \sum_{j=0}^{8} M_{kj}\, G_j(\rho, u),$$

on a

$$(73) \quad \tilde{m}_k^{eq} = \left\{ \begin{array}{ll} & k = \downarrow \\ \rho & 0 \\ \rho\, u_x & 1 \\ \rho\, u_y & 2 \\ \rho\,(3|u|^2 - 2\lambda^2) & 3 \\ \rho\,(u_x^2 - u_y^2) & 4 \\ \rho\, u_x\, u_y & 5 \\ -\lambda^2 \rho\, u_x & 6 \\ -\lambda^2 \rho\, u_y & 7 \\ \rho \lambda^2 (\lambda^2 - 3|u|^2) & 8\,. \end{array} \right.$$

- La preuve utilise les relations (69) et l'équilibre $\langle L_k \rangle$ calculé aux relations (56). Seules les lignes numéros 3, 6, 7 et 8 sont non triviales à calculer.

Pour $k=3$

on a $\tilde{m}_3^{eq} = 3\langle L_3 \rangle - 4\lambda^2 \langle L_0 \rangle$

$$= 3\left(\frac{2}{3}\lambda^2 + |u|^2\right)\rho - 4\lambda^2 \rho$$

$$= -2\lambda^2 \rho + 3\rho |u|^2.$$

Pour $k=6$, il vient $\tilde{m}_6^{eq} = 3\langle L_6 \rangle - 5\lambda^2 \langle L_1 \rangle$

$$= 3 \cdot \frac{4}{3}\lambda^2 \rho\, u_x - 5\lambda^2 \rho u_x = -\lambda^2 \rho\, u_x\,.$$

De même, $\tilde{m}_7^{eq} = 3\langle L_7 \rangle - 5\lambda^2 \langle L_2 \rangle$

$$= 3 \cdot \frac{4}{3}\lambda^2 \rho\, u_y - 5\lambda^2 \rho u_y = -\lambda^2 \rho u_y$$

Enfin, $\tilde{m}_8^{eq} = \frac{9}{2} \langle L_8 \rangle - \frac{21}{2} \lambda^2 \langle L_3 \rangle + 4 \lambda^4 \langle L_0 \rangle$

$$= \left[\frac{9}{2} \frac{\lambda^2}{9} (8\lambda^2 + 15|u|^2) - \frac{21}{2} \lambda^2 \left(\frac{2}{3} \lambda^2 + |u|^2 \right) + 4\lambda^4 \right] \rho$$

$$= \rho \lambda^2 \left((4 - 7 + 4) \lambda^2 + |u|^2 \left(\frac{15}{2} - \frac{21}{2} \right) \right)$$

$$= \rho \lambda^2 \left(\lambda^2 - 3|u|^2 \right)$$

ce qui achève l'établissement des relations (73). □

- **Algorithme populaire**

De façon analogue au cas des moments non orthogonaux, le calcul $\mathbb{R}^9 \ni f \mapsto f^* \in \mathbb{R}^9$ s'obtient ici grâce aux étapes suivants.

- Calcul des moments

(74) $\tilde{m}_k = \sum_{j=0}^{8} M_{kj} f_j$, $0 \leq k \leq 8$, M donné en (71)

on a toujours $\rho = \tilde{m}_0$, $\rho u_\alpha = \tilde{m}_\alpha$ si $1 \leq \alpha \leq 2$

- Calcul des moments à l'équilibre $\tilde{m}_k$ pour $k \geq 3$ grâce aux relations (73)
- Pour $k \geq 3$, introduire $\tilde{s}_k > 0$ comme en (65) et écrire une schéma d'Euler comme en (66) :

(75) $\tilde{m}_k^* = \tilde{m}_k + \tilde{s}_k \left(\tilde{m}_k^{eq} - \tilde{m}_k \right)$, $k \geq 3$

- Repasser dans l'espace des particules :

(76) $f_j^* = \sum_{k=0}^{8} (M^{-1})_{jk} \, m_k^*$.

Dubois
Paris, 22 mars 2010.