Chapitre (I) Modélisation physique

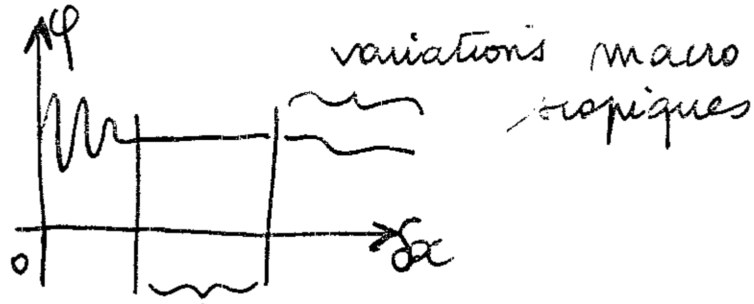
1) Le fluide comme milieu continu
2) Hydrostatique
3) Cinématique
4) Conservation de la masse
5) Contraintes
6) Modélisation des contraintes
7) Hydrodynamique et dynamique des gaz
8) Thermostatique
9) Conservation de l'énergie
10) Dissipation de l'entropie .

1) Le fluide comme milieu continu.

- description de l'ingénieur : champ $\varphi(x,t)$ continu.

A quelle échelle regarde-t-on x ?

φ = pression, température, vitesse, masse volumique



$\to$ $\varphi(x)$ prend un sens et représente $\frac{1}{V}\int_{V(x)} \varphi(y)\,dy$ en fait

- <u>libre parcours moyen</u>

Moyenne de distance entre deux collisions
hélium gazeux vitesse thermique moyenne $\bar{u}$

$$\frac{1}{2} m\bar{u}^2 = \frac{3}{2} k_B T \qquad \bar{u} \simeq 1370 \text{ m/s}$$

1 atome d'hélium — cste de Boltzmann

$l_{pm} = \frac{1}{\sqrt{2}\, n\, \sigma_c}$ $\begin{cases} \sigma_c = \text{section efficace atome hélium} \\ n = \text{nb atomes / unité de volume} \end{cases}$

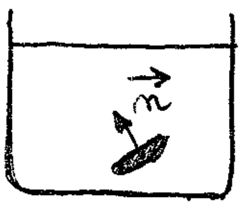
ie $(l_{pm})\,\sigma_c = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\text{volume molaire}}{\text{nb avogadro}}$

1 particule ds cylindre de section $\sigma_c = 10^{-20}$ m
et de lg $l_{pm} = 2,6\ 10^{-6}$ m

2) Hydrostatique

Le fluide sans mouvement

- Liquide au repos.



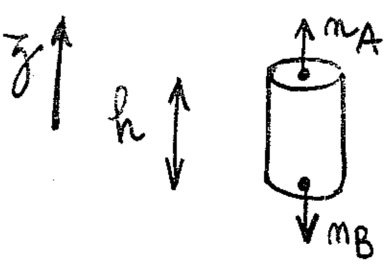
force s'appliquant sur une facette

$$\vec{ds} = \vec{n}\, d\gamma$$

cette force ne dépend pas de la normale (Pascal ; 1650) $\vec{df} = -p\,\vec{n}\, d\gamma$

$p > 0$ la pression (hydro) statique.

- Variation de pression d'un fluide pesant

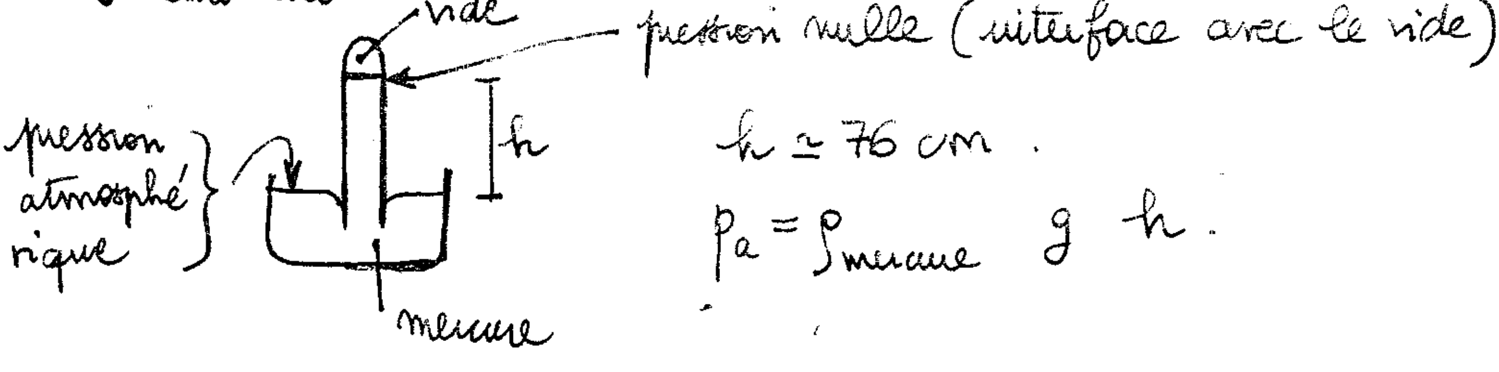


$$-\rho g h\, ds + p_B\, ds - p_A\, ds = 0$$

$$p_B = p_A + \rho g h$$

la somme des forces appliquées à la colonne de section ds est nulle.

- Baromètre



$h \simeq 76$ cm.

$p_a = \rho_{mercure}\; g\; h$.

3) Cinématique

$u(x,t)$ champ de vitesse

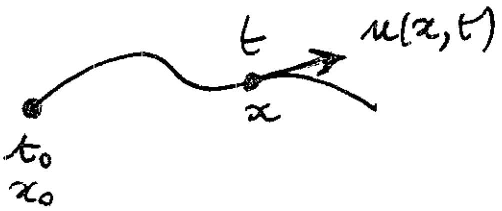
- on regarde passer le train
  → point de vue de Euler ($\simeq 1750$)
  on monte dans le train
  → point de vue de Lagrange ($\simeq 1800$).

- Trajectoire d'une particule (courbe caractéristique)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = u(x(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

équation différentielle ordinaire.

$x(t_0, x_0 ; t)$



- Domaine que l'on suit dans son mouvement

$t = t_0 \quad \Omega_0$.

$t \quad \Omega(t) = \{ x(t_0, x_0; t), \ x_0 \in \Omega_0 \}$.

- Dérivée convective (ou particulaire, ou lagrangienne)
  ↳ relie les points de vue de Euler et Lagrange.
  Evolution du champ φ sur la trajectoire.

$$t \mapsto \psi(t) = \varphi(x(t_0, x_0; t), t)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \nabla\varphi \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + u \cdot \nabla\varphi$$

4) Conservation de la masse

- Formule d'intégration par parties Green (?)

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\,dx = \int_{\partial\Omega} u\, n_j\, d\gamma$$ {la seule à savoir !}

$n =$ normale extérieure.

donc $$\int_\Omega \operatorname{div}\varphi\, dx = \int_{\partial\Omega} \varphi\cdot n\, d\gamma$$

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_j}\,dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} v\,dx + \int_{\partial\Omega} u v n_j\, d\gamma$$

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\varphi\, dx = -\int_\Omega u \operatorname{div}\varphi\, dx + \int_{\partial\Omega} u\,\varphi\cdot n\, d\gamma$$

$$\int_\Omega \psi\cdot \operatorname{rot}\varphi\, dx = \int_\Omega \operatorname{rot}\psi\, \varphi\, dx + \int_{\partial\Omega} (\psi\times n)\varphi\, d\gamma$$

$$(\operatorname{rot}\varphi)_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi_k$$

etc !

- Equation de continuité.

Ω fixe

La variation de la masse totale m contenue dans Ω est égale à l'opposé du flux sortant à travers la surface $\partial\Omega$.

$$m = \int_\Omega \rho\, dx \qquad \frac{dm}{dt} = -\int_{\partial\Omega} \rho u\cdot n\, d\gamma$$

donc $$\int_\Omega \left\{ \frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) \right\} dx = 0$$

Vrai $\forall\Omega \longrightarrow \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) = 0$

- Point de vue du domaine mobile avec le fluide
  $\Omega(t)$ en mouvement avec le fluide

$$I = \int_{\Omega(t)} \varphi \, dx .$$

$$\frac{dI}{dt} = \int_{\Omega_0} \varphi(x(t_0, x_0; t), t) \underbrace{\det\left(\frac{dx}{dx_0}\right)}_{\text{Jacobien } J \text{ de la transformation}} dx_0$$

$$\frac{dJ}{dt} = J(\operatorname{div} u) \qquad \{\text{Euler}\}.$$

[preuve (cf Serrin page 131)

$$A_i^\alpha = \text{cofacteur de } \frac{\partial x^i}{\partial x_0^\alpha}$$

on a: $\displaystyle\sum_\alpha \frac{\partial x^i}{\partial x_0^\alpha} A_j^\alpha = J \, \delta_j^i$

alors $\displaystyle\frac{dJ}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x^i}{\partial x_0^\alpha}\right) A_i^\alpha, \quad \sum_{i,\alpha}$ par dérivation du déterminant

$$= \frac{\partial u^i}{\partial x_0^\alpha} A_i^\alpha = \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \underbrace{\frac{\partial x^j}{\partial x_0^\alpha} A_i^\alpha}_{J\delta_i^j} = \underbrace{\frac{\partial u^i}{\partial x^i}}_{\operatorname{div} u} J \;]$$

Alors $\displaystyle\frac{dI}{dt} = \int_{\Omega_0} \left(\frac{d\varphi}{dt} J + \varphi J \operatorname{div} u\right) dx_0$

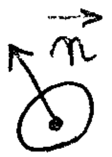
$$\frac{dI}{dt} = \int_\Omega \left(\frac{d\varphi}{dt} + \varphi \operatorname{div} u\right) dx . \qquad \{\text{peut être utile !}\}$$

Masse : $\varphi \equiv \rho \qquad \dfrac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} u = 0$ (autre forme).

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \varphi \, dx = \int_\Omega \left\{\frac{d\varphi}{dt} + \varphi \operatorname{div} u\right\} dx = \int_\Omega \left\{\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(\varphi u)\right\} dx}$$

5) Contraintes

- Vecteur des contraintes de Cauchy (1827)



L'action du fluide sur une surface $\vec{ds} = \vec{n} d\sigma$ est un vecteur $\vec{t}$, fonction de la position x, le temps t, l'orientation de la normale $\vec{n}$, la surface $d\sigma$.

- Conservation de l'impulsion

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho\, u\, dx = \int_{\Omega} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{forces de volumes}}}{\rho f}\, dx + \int_{\partial\Omega} t\, d\sigma$$

Ω de volume ℓ^3

on divise chaque côté de l'égalité précédente par ℓ^2

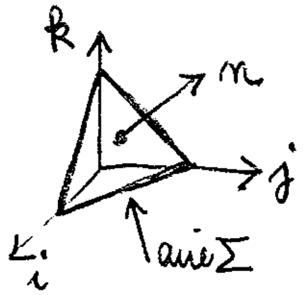
on fait tendre Ω vers 0

les intégrandes sont bornés $\rightarrow$ termes $\int_{\Omega}$ tendent vers 0

$$\rightarrow \lim_{\Omega \to 0} \frac{1}{\ell^2} \int_{\partial\Omega} t\, d\sigma = 0 .$$

Le vecteur des contraintes est en équilibre local.

- $n \mapsto t(n)$ est linéaire



face $-i$: aire $n_1 \Sigma$; $-j$: $n_2 \Sigma$; $-k$: $n_3 \Sigma$

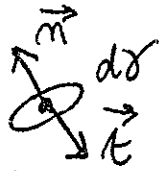
$$t(n) + n_1\, t(-i) + n_2\, t(-j) + n_3\, t(-k) = 0$$

part et d'autre d'une facette

↳ équilibre $\quad t(n) + t(-n) = 0$.

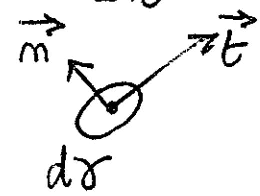
D'où le résultat

- Deux cas particuliers {avant le point précédent}

* 

$\vec{t} = -p\,\vec{n}\,d\sigma$

$\vec{t} \parallel \vec{n}$ <u>compression</u>

* 

$\vec{t} \perp \vec{n}$ <u>cisaillement</u>.

- Tenseur des contraintes

on explicite la linéarité de $t(n)$ à l'aide de la matrice σ ou "tenseur des contraintes"

$$t_i = \sum_j \sigma_{ij}\, n_j$$

Comme : si $u \equiv 0$, $\sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij}$ (hydrostatique)

- Conservation du moment cinétique

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega x \times \rho u\, dx = \int_\Omega x \times \rho f\, dx + \int_{\partial\Omega} x \times t\, d\sigma$$

Même analyse dimensionnelle que pour la conservation de l'impulsion

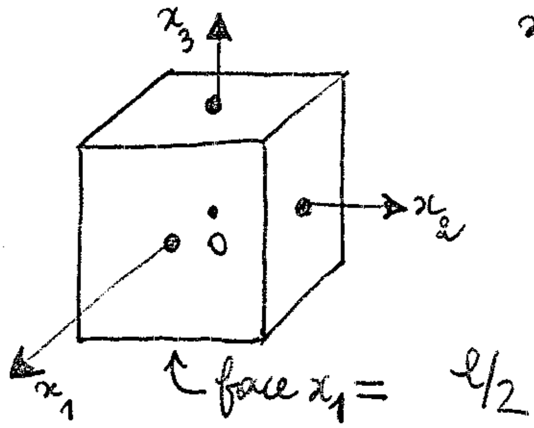
Donc pour toute surface fermée $\partial\Omega$,

$$\frac{1}{\ell^3} \int_{\partial\Omega} (x \times t)\, d\sigma = 0$$

{Variation du moment cinétique = moment des forces appliquées au système}

- Symétrie du tenseur des contraintes

Ecrire la relation précédente dans un cube infiniment petit, de côté ℓ, centré sur l'origine



$$x \times t(\vec{n}) = \begin{cases} x_2\,\sigma_{31} - x_3\,\sigma_{21} \\ x_3\,\sigma_{11} - x_1\,\sigma_{31} \\ x_1\,\sigma_{21} - x_2\,\sigma_{11} \end{cases}$$

$$\int_{x_1=\pm\frac{\ell}{2}} x_2\,\sigma_{**}\,d\gamma = 0 \quad \text{par symétrie}$$

ou $$\int_{x_1=\pm\frac{\ell}{2}} x_3\,\sigma_{**}\,d\gamma = 0$$

de même, $$\int_{x_1=+\frac{\ell}{2}} x\times t = \int_{x_1=-\frac{\ell}{2}} x\times t$$

car seuls les termes en x_1 contribuent et ils changent de signe, et $\vec{t}$ change aussi de signe.

* Il vient alors $$\int_{x_1=\pm\frac{\ell}{2}} x\times t = \ell^3 \begin{cases} 0 \\ -\sigma_{31} \\ \sigma_{21} \end{cases}$$

on fait de même pour les quatre autres faces, en faisant attention au second indice :

$$\int_{x_2=\pm\ell/2} x\times t\,d\gamma = \ell^3 \begin{cases} \sigma_{32} \\ 0 \\ -\sigma_{12} \end{cases}$$

$$\int_{x_3=\pm\ell/2} x\times t\,d\gamma = \ell^3 \begin{cases} -\sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ 0 \end{cases}$$

* $\int_{\partial\Omega} x\times t\,d\gamma = 0$ donne par sommation $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}\ \forall(i,j)$

- Equation de l'impulsion.

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho u \, dx = \int_\Omega \rho f \, dx + \int_{\partial\Omega} t \, d\gamma$$

on développe $\frac{d}{dt}$ sur la i^e composante

t_i sur la normale : $\sigma_{ij}\, n_j$

on intègre par parties à l'envers le terme de bord :

$$\int_{\partial\Omega} t_i \, d\gamma = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij} \, dx \quad \text{(sommation } j\text{)}$$

on en déduit la forme conservative :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) - \frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij} = \rho f_i$$

- Forme non conservative

Développer la dérivée des produits

$$\frac{d}{dt}(\rho u) = \rho \frac{du}{dt} + \frac{d\rho}{dt} u = \rho \frac{du}{dt} - \rho u \, \mathrm{div}\, u.$$

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho u \, dx = \int_\Omega \left\{ \frac{d}{dt}(\rho u) + \rho u \, \mathrm{div}\, u \right\} dx \quad \{\text{cf p6}\}$$

Donc $$\frac{du}{dt} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{div}\,\sigma = f$$

ou $$\frac{\partial u}{\partial t} + u\cdot\nabla u - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{div}\,\sigma = f.$$

6) Modélisation des contraintes

- fluide parfait

on ne tient pas compte du champ de vitesse (du gradient du champ de vitesse en fait) pour modéliser le tenseur des contraintes. Tout se passe comme pour l'hydrostatique !

$$\sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij}$$

- fluide Newtonien. (Stokes, 1845)

$$\sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij} + \tau_{ij}$$

τ_{ij} : contraintes visqueuses, fonctions a priori (du gradient) du champ de vitesses.

* invariance par translation

τ_{ij} ne dépend que du gradient du champ de vitesses.

$\tau_{ij} = 0$ si $u(x) = \text{cste}$

* invariance par rotation

$\tau_{ij} = 0$ si le fluide suit (localement !) un mouvement de rotation.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}_{\text{deformation}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)}_{\text{rotation}}$$

$$\nabla u = D_{ij} + \Omega_{ij}$$

$\tau =$ fonction de D_{ij} seulement

* Homogénéité spatiale

τ ne dépend de la position x que par l'intermédiaire de la variation par rapport à x de D.

* Isotropie de l'espace

Pas de direction privilégiée.

Alors (Théorème, Truesdell 1952) (Serrin p 231)

$$\tau = \alpha I + \beta D + \gamma D^2 .$$

avec α, β, γ fonctions des invariants principaux de D, c'est à dire des trois fonctions symétriques des valeurs propres de D (trace, det, ...).

* Linéarité

$D \mapsto \tau(D)$ linéaire

on ne regarde qu'au premier ordre les effets du gradient du champ de vitesse sur les contraintes visqueuses τ.

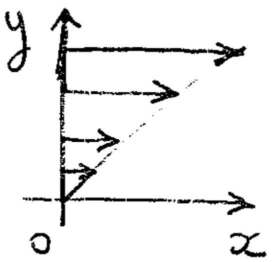
$$\tau = 2\mu D + \left(K - \frac{2}{3}\mu\right)\underbrace{(\operatorname{tr} D)}_{\operatorname{div} u} I$$

μ : viscosité dynamique

K : viscosité en volume

$\mu > 0$, $K > 0$
(admis pour le moment)

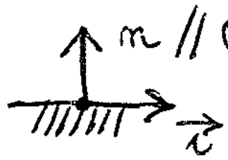
- Ecoulement de cisaillement simple



$$u = \begin{cases} u(y) \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

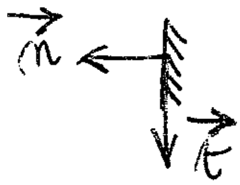
$$D = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\frac{du}{dy} & 0 \\ \frac{1}{2}\frac{du}{dy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tau = 2\mu D + 0 = \begin{pmatrix} 0 & \mu\frac{du}{dy} & 0 \\ \mu\frac{du}{dy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

* 

$n \,/\!/\, Oy$ $\quad t = \tau \cdot n = \mu \dfrac{du}{dy}\vec{\imath}$

$\mu =$ viscosité de cisaillement

* 

$n \,/\!/\, Ox$ $\quad t = \tau \cdot \underbrace{n}_{-\vec{\imath}} = -\mu \dfrac{du}{dy}\vec{\jmath}$

Moins intuitif ?!

- Valeurs numériques

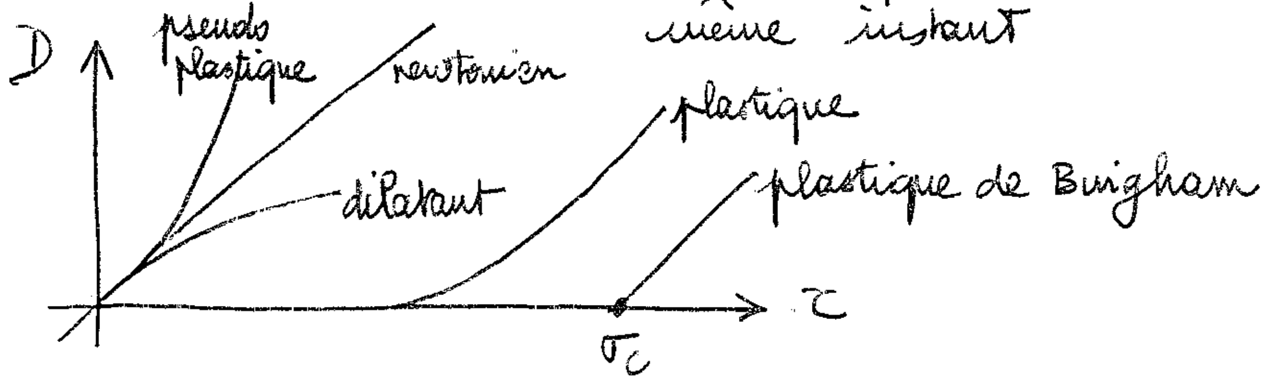
(Landau p65)

	μ en g/(cm.s)	$\frac{\mu}{\rho}$ en cm²/s
eau	0,01	0,01
air	1,8 10^{-4}	0,150
alcool	0,018	0,022
mercure	0,0156	0,0012

- Fluide non newtonien {Guyon p 145 et suiv}

* pas d'effet de mémoire

i.e. $\tau(x,t) =$ fonction $[D(x,t)]$ même instant



1) dilatant : la viscosité $\mu = \frac{\tau}{2D}$ augmente avec la contrainte appliquée

ex sable mouillé (glisse à faible vitesse, frotte si le gradient de vitesse est plus fort)

2) pseudo plastique

la viscosité effective diminue lorsque la contrainte croît (les macromolécules s'alignent parallèlement à l'écoulement)

ex peintures : s'étalent au pinceau et ne coulent pas

encres d'imprimerie ...

3) plastique : modèle de Bingham

aucun écoulement jusqu'à une valeur critique σ_c de la contrainte, puis relation linéaire entre D et τ (vitesse de déformation, contrainte) écoulement bouchon jusqu'à la valeur critique (vitesse indépendante de la distance aux parois) car le cisaillement n'est pas encore créé, puis profil réparti sous forte contrainte

ex boues argileuses
pâte dentifrice
ciment frais ($\sigma_c \simeq 50\ N/m^2$; $\mu_e = 3.10^{-4}$)

ex boue de forage

coule facilement au fond du puits sous la pression de pompage

remonte les débris de roche vers la surface sans que ceux-ci chutent au fond du puits quand la circulation est arrêtée.

* Effet de mémoire

$$\tau(x,t) = \text{fonction}\ \{ D(x,\tau),\ \tau \leq t \}$$

1) fluide viscoélastique (garder la linéarité !)

Variation d'énergie interne due aux déformations de structure induite par l'écoulement

ex pâte à pain
fibres de textiles artificiels
gelées

Nombre de Deborah $= \frac{\tau}{T}$

τ : tps de relaxation microscopique

T : tps caractéristique d'une perturbation

$\tau/T \ll 1$ fluide classique

$\tau/T \gg 1$ réponse de type "solide"

2) fluide thixotrope

la viscosité effective diminue avec le temps
pas d'incompatibilité avec la plasticité !

ex solutions d'argiles (bentonites)
polymères
sy suspensions.

7) Hydrodynamique et dynamique des gaz

• Equations

* masse $\qquad \dfrac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} u = 0$

* impulsion $\qquad \rho \dfrac{du}{dt} + \nabla p - \mu \Delta u - \left(\kappa + \dfrac{\mu}{3}\right) \nabla(\operatorname{div} u) = \rho f$

$$\sigma = -p I + 2\mu D + \left(\kappa - \frac{2}{3}\mu\right) \operatorname{div} u \, I$$

$$(\operatorname{div}\sigma)_i = -\partial_i p + \mu \, \partial_j (\partial_i u_j + \partial_j u_i) + \left(\kappa - \frac{2}{3}\mu\right) \partial_i (\operatorname{div} u)$$

$$\operatorname{div}\sigma = -\nabla p + \mu \Delta u + \left(\kappa + \frac{\mu}{3}\right) \nabla(\operatorname{div} u)$$

* Décompte $\qquad 1 + 3 = 4$ équations

$1 + 3 + 1 = 5$ inconnues.

$\rho \quad u \quad p$

↳ Malgré la modélisation du tenseur des contraintes, le problème de la mécanique des fluides ne peut pas être fermé (à ce niveau !).

- Hydrodynamique

$$\rho \equiv \rho_0 = \text{cste} \qquad \forall x, \forall t$$

les liquides.

$$\begin{cases} \operatorname{div} u = 0 & \text{continuité} \\ \rho_0 \dfrac{du}{dt} + \nabla p - \mu \Delta u = \rho_0 f & \text{Navier Stokes } 1827 - 1845 \end{cases}$$

Décompte 4 équations, 4 inconnues (u, p)

(R) Pas d'équation pour la pression

Peut être vue comme multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte de divergence nulle du champ de vitesse.

- Gaz barotrope

La pression est une fonction donnée de la masse volumique.

$$p = G(\rho)$$

(ex) * isentropique $\dfrac{p}{\rho^\gamma} = \text{cste} \qquad \gamma = 7/5$

* isotherme $\dfrac{p}{\rho} = \text{cste}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \nabla p(\rho) - \mu \Delta u \\ \qquad - \left(K + \dfrac{\mu}{3}\right) \nabla(\operatorname{div} u) = \rho f . \end{cases}$$

Emploi de la forme conservative des équations

Décompte 4 équations

4 inconnues (ρ, u).

→ Modèle déconseillé pour la dynamique des gaz, qui cache la conservation de l'énergie et la dissipation de l'entropie.

- Dissipation de l'énergie cinétique d'un fluide incompressible.

$$E_C = \frac{1}{2} \int_\Omega \rho u^2 \, dx$$

$$\frac{d}{dt} E_C \leq 0 \ , \quad \text{ie} \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho \frac{u^2}{2} \, dx \underset{\text{hyp?}}{\leq} 0$$

$$\frac{d}{dt} E_C = \int_\Omega \left\{ \frac{d}{dt}(\rho u^2/2) + \rho \frac{u^2}{2} \operatorname{div} u \right\} dx$$

$$= \int_\Omega \frac{u^2}{2} \underbrace{\left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} u \right)}_{0} dx + \int_\Omega \rho u \frac{du}{dt} \, dx$$

$$= \int_\Omega \rho u \cdot f \, dx + \int_\Omega u \operatorname{div} \sigma \, dx$$

ppe: sans forces extérieures et sans apport surfacique d'énergie, l'énergie cinétique d'un fluide qui ne suit dans son mouvement est décroissante.

$$\int_\Omega u \operatorname{div} \sigma \, dx = -\int_\Omega \nabla u . \sigma \, dx + \int_{\partial\Omega} u . t \, d\gamma$$

tenseur des contraintes de Cauchy

avec les indices, le terme de volume devient :

$$-\int_\Omega (\partial_j u_i)(-p\delta_{ij} + \mu(\partial_i u_j + \partial_j u_i)) dx$$

$$= -\mu \int_\Omega \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j)^2 \, dx - \frac{\mu}{2}\int_\Omega \underbrace{(\partial_j u_i - \partial_i u_j)(\partial_i u_j + \partial_j u_i)}_{\text{nul après sommation sur } i,j} dx$$

$$* \quad \frac{d}{dt} E_c = \underbrace{\int_\Omega \rho u . f \, dx + \int_{\partial\Omega} u . t \, d\gamma}_{\text{apport extérieur}} \underbrace{- 2\mu \int_\Omega (D(u))^2 dx}_{\leqslant 0}$$

Donc $\mu \geqslant 0$.

8) Thermostatique

* volume V masse M énergie interne E

Il existe une entropie S et

$$S = \Sigma(M, V, E)$$

S homogène de degré 1

S concave du tuplet M, V, E.

(Carathéodory, 1905).

* dérivées $dE = T\,dS - p\,dV + \mu\,dM$

T température
p pression
μ potentiel chimique massique.

* mécanique des milieux continus
↪ raisonner par unité de masse

$$V = \frac{1}{\rho} M$$
$$E = e M$$
$$S = s M$$

$$de = T\,ds - p\,d\left(\frac{1}{\rho}\right) + \left(\mu + Ts - \frac{p}{\rho}\right)\underbrace{\frac{dM}{M}}_{}$$

0 en mécanique des milieux continus.

* La pression est a priori une fonction donnée de l'énergie interne e et du volume spécifique $\tau = 1/\rho$

$$ds = \frac{1}{T}\,de + \frac{p}{T}\,d\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

idem pour la température !

* exemple : gaz parfait polytropique.

$$e = \text{cste}\ \rho^{\gamma-1} \exp\left(\frac{s}{c_v}\right).$$

$$\frac{\partial e}{\partial s}(s,\tau) = \frac{e}{c_v} = T$$

$$\frac{\partial e}{\partial \tau}(s,\tau) = \frac{\partial \rho}{\partial \tau}\,\frac{\partial e}{\partial \rho}(s,\rho) = -\rho^2\,\frac{\partial e}{\partial \rho}(s,\rho)$$

$$= -\rho^2(\gamma-1)\frac{e}{\rho}$$

Donc $p = (\gamma-1)\rho e = (\gamma-1)\,c_v\,\rho T$

équation d'état du gaz parfait.

* prop si $T \geq 0$, $(s,\tau) \mapsto e(s,\tau)$ est convexe.

changement de variable bijectif $e(s)$ à τ fixé

ie $\tilde{e}(\tilde{s}(e,\tau),\tau) = e \quad \forall e,\ \forall \tau$.

$T \geq 0$ $\tilde{e}(s,\tau)$ est fn $\uparrow$ de s à τ fixé

$0 \leq \theta \leq 1$. $e_1 = \tilde{e}(s_1,\tau_1)$
$e_2 = \tilde{e}(s_2,\tau_2)$

$$\tilde{e}\left(\theta s_1+(1-\theta)s_2,\ \theta\tau_1+(1-\theta)\tau_2\right) \leqslant ?$$

$$\theta s_1+(1-\theta)s_2 \leqslant \tilde{s}\left(\theta e_1+(1-\theta)e_2,\ \theta\tau_1+(1-\theta)\tau_2\right)$$

concavité de $\tilde{s}$ (ou Σ).

Donc $\tilde{e}\left(\theta s_1+(1-\theta)s_2,\ \theta\tau_1+(1-\theta)\tau_2\right)$

$$\leqslant \tilde{e}\left(\tilde{s}\left(\theta e_1+(1-\theta)e_2,\ \theta\tau_1+(1-\theta)\tau_2\right),\ \theta\tau_1+(1-\theta)\tau_2\right)$$

$$\equiv \theta e_1+(1-\theta)e_2 \qquad \text{(cf plus haut!)}$$

* Inégalités thermodynamiques

$$d^2 e = \begin{pmatrix} \partial T/\partial s & \dfrac{\partial T}{\partial \tau} \\ -\dfrac{\partial p}{\partial s} & -\dfrac{\partial p}{\partial \tau} \end{pmatrix} \qquad \frac{\partial T}{\partial \tau} = -\frac{\partial p}{\partial s}.$$

$$\frac{\partial T}{\partial s} \geqslant 0 \quad -\frac{\partial p}{\partial \tau} \geqslant 0 \quad \frac{\partial T}{\partial s}\frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{\partial p}{\partial s}\frac{\partial T}{\partial \tau} \geqslant 0$$

$$\underbrace{\rho^2 \frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho, s)}_{c^2} \geqslant 0.$$

c^2 carré de la vitesse du son, qui existe bien!

(R) $c^2 = \dfrac{\gamma p}{\rho}$ pour un gaz parfait polytropique

$c = 340{,}3$ m/s dans l'air à 20°C.

9) Conservation de l'énergie.

* $$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} \left(\rho\frac{u^2}{2}+\rho e\right)dx$$ = travail des forces + chaleur par unité de temps

$= \dot{W}+\dot{Q}$ (1° ppe thermo !)

travail $\dot{W} = \int_\Omega \rho u \cdot f \, dx + \int_{\partial\Omega} t \cdot u \, d\gamma$

chaleur $\dot{Q} = -\int_{\partial\Omega} q \cdot n \, d\gamma$

$\vec{q}$ = flux de chaleur par conduction

(pas de source de chaleur volumique)

* forme locale

Compte tenu de la formule page 6 et de la définition du tenseur des contraintes, il vient

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{u^2}{2}+e\right)\right] + \operatorname{div}\left[\rho u\left(\frac{u^2}{2}+e\right)\right] - \operatorname{div}(u\cdot\sigma) + \operatorname{div} q = \rho f u$$

* Modélisation du flux de chaleur

$q = -k\nabla T$ loi de Fourier (1822)

Justification ? {Onsager !}

* le problème de la méca flu semble alors fermé

5 équations [1+3+1] de conservation

7 inconnues ρ, u, e, p, T {1+3+1+1+1}

2 relations thermodynamiques (état, énergie)

10) <u>Dissipation de l'entropie</u>

* Second principe de la thermodynamique.

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} \rho s \, dx \geqslant 0$$

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} \rho s \, dx = \int_{\Omega} \left\{ \frac{d}{dt}(\rho s) + \rho s \operatorname{div} u \right\} dx$$

$$= \int_{\Omega} \left\{ \rho \frac{ds}{dt} + s\left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} u \right) \right\} dx = \int_{\Omega} \rho \frac{ds}{dt} \, dx$$

$$= \int_{\Omega} \frac{\rho}{T} \left(\frac{de}{dt} + p \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) \right) dx$$

$$= \int_{\Omega} \frac{1}{T} \left[\frac{d}{dt}(\rho e) - e \frac{d\rho}{dt} - \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \right] dt$$

$$\frac{d}{dt}(\rho e) = \frac{d}{dt}\left(\rho e + \rho \frac{u^2}{2} \right) - \frac{u^2}{2} \frac{d\rho}{dt} - \rho u \frac{du}{dt}$$

$$= -\rho\left(e + \frac{u^2}{2}\right) \operatorname{div} u + \operatorname{div}(u \cdot \sigma) - \operatorname{div} q + \rho u \cdot f$$
$$- \frac{u^2}{2} \frac{d\rho}{dt} + u \cdot \nabla p + u \operatorname{div} \tau - \rho u \cdot f$$

$$= -\rho e \operatorname{div} u - p \operatorname{div} u + (\partial_j u_i) \tau_{ij} - \operatorname{div} q$$

* $$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} \rho s \, dx = \int_{\Omega} \left\{ (\partial_j u_i) \tau_{ij} - \operatorname{div} q \right\} \frac{dx}{T}$$

Voir aussi Candel p 123

$*\quad (\partial_j u_i)\tau_{ij} = \left\{ D_{ij} + \frac{1}{2}(\partial_j u_i - \partial_i u_j) \right\}\left\{ 2\mu D_{ij} + (\kappa - \frac{2}{3}\mu)\, \mathrm{div}\, u\, \delta_{ij} \right\}$

$= 2\mu D_{ij} D_{ij} + \mu\left\{ (\partial_j u_i)^2 - (\partial_i u_j)^2 \right\} + (\kappa - \frac{2}{3}\mu)(\mathrm{div}\, u)^2$

je pose $D_{ij} = \xi_{ij} + \frac{1}{3}\mathrm{div}\, u\, \delta_{ij}$ (Landau p 233)

alors $D_{ij} D_{ij} = (\xi_{ij})^2 + \frac{2}{3}\mathrm{div}\, u\, \underbrace{\xi_{ij}\,\delta_{ij}}_{0} + \frac{1}{9}(\mathrm{div}\, u)^2 (\delta_{ij})^2$

$\sum_i \xi_{ii} = 0$ car $\mathrm{tr} D = \mathrm{div}\, u$.

et $\sum_{ij} (D_{ji})^2 = \sum_{ij} (\xi_{ij})^2 + \frac{1}{3}(\mathrm{div}\, u)^2$.

ainsi $(\partial_j u_i)\tau_{ij} = 2\mu \sum_{ij} (\xi_{ij})^2 + \kappa\,(\mathrm{div}\, u)^2$.

$*\quad -\int_\Omega (\mathrm{div}\, q)\frac{dx}{T} = \int_\Omega -k\, \nabla T\, \nabla\left(\frac{1}{T}\right) + \int_{\partial\Omega} \frac{q\cdot n}{T}\, d\gamma$

in fine $\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho s\, dx = \int_\Omega 2\mu \left(D_{ij} - \frac{1}{3}\mathrm{div}\, u\, \delta_{ij} \right)^2 \frac{dx}{T}$

$+ \int_\Omega \kappa\,(\mathrm{div}\, u)^2 \frac{dx}{T} + \int_\Omega \frac{k}{T^2}(\nabla T)^2 dx - \int_{\partial\Omega} q\cdot n \frac{d\gamma}{T}$

ce qui montre (positivité de la forme quadratique) que $\mu \geq 0$, $\kappa \geq 0$, $k \geq 0$.