Conservatoire National des Arts et Métiers
Département d'Ingénierie Mathématique
Cours de "Mathématiques du Signal Déterministe"

Examen partiel du 13 novembre 2012 (1 heure 30)

Les notes de cours sont autorisées, à l'exclusion de tout autre document. Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la rigueur des explications fournies.

Exercice 1) Série de Fourier

a) Soit ℓ un nombre entier. Montrer que $\int_0^\pi \big(\sin t\big)\big(\cos(2\ell+1)t\big)\,\mathrm{d}t = 0$.

b) Soit f la fonction périodique de période π égale à $\sin t$ sur cet intervalle. Démontrer que $f(t) = |\sin t|$ pour tout réel t. En déduire que f est paire.

c) Déduire des questions précédentes que le développement en série de Fourier de f est de la forme $f(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} \alpha_k \cos(2\,k\,t)$.

d) Calculer les coefficients de Fourier α_k introduits à la question précédente.

Exercice 2) Intégrale double

a) Soit D le disque de centre l'origine et de rayon 1 :
$D = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2,\, x^2+y^2 \leq 1\}$. On pose $g(x,\, y) = \big(\frac{1}{x^2+y^2}\big)^{\frac{3}{4}}$. L'intégrale double $I = \iint_D g(x,\, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ est-elle un nombre réel ? Justifier votre réponse.

b) Si la réponse à la question a) est "oui", calculer la valeur de l'intégrale I.

Exercice 3) Transformée de Laplace

a) Calculer les trois nombres réels α, β et γ de sorte que la relation
$\frac{p^2+1}{p^2\,(p+\frac{1}{2})} = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p^2} + \frac{\gamma}{p+\frac{1}{2}}$ soit vraie pour tout réel p.

b) Expliciter la fonction causale $x(t)$ telle que sa transformée de Laplace est égale à la fraction de la question a) : $[\mathcal{L}(x(t))](p) = \frac{p^2+1}{p^2\,(p+\frac{1}{2})}$.

Exercice 4) Equation différentielle ordinaire

Avec la méthode de votre choix, calculer les valeurs $y(t)$ (pour $t > 0$) de la solution de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{y(t)}{2} = t$ avec la condition initiale $y(0) = 1$.