Conservatoire National des Arts et Métiers
Département de Mathématiques
Cours de “Mathématiques du Signal Déterministe”

Examen partiel du 12 novembre 2013 (1 heure 30)

Les notes de cours sont autorisées, à l'exclusion de tout autre document. Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la rigueur des explications fournies.

Exercice 1) Intégrale double
Soit D le domaine du plan défini par
$D = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2,\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, x^2 + y^2 \geq 1\}$. On pose $f(x,\, y) = \frac{x\,y}{(x^2+y^2)^\alpha}$. On cherche à déterminer les valeurs du paramètre α pour lesquelles l'intégrale double $I = \iint_D f(x,\, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ est un nombre réel puis à calculer cette intégrale.
a) Dessiner le domaine D.
b) On passe en coordonnées polaires et on pose $x = r\,\cos\theta$, $y = r\,\sin\theta$ avec $r \geq 0$. Montrer que, pour tout $(x, y) \in D$, on a $\mid f(x, y) \mid \leq g(r, \theta) \equiv r^{2-2\,\alpha}$.
c) Après avoir remarqué que la fonction g est positive, établir pour quelles valeurs du paramètre α l'intégrale $\iint_{r\geq 1,\, 0\leq\theta\leq\pi/2} g(r, \theta)\, r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ obtenue après passage en coordonnées polaires est bien un nombre réel.
d) Dans le cas où $\iint_{r\geq 1,\, 0\leq\theta\leq\pi/2} g(r, \theta)\, r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ est un nombre réel, calculer l'intégrale I en fonction de α.

Exercice 2) Convolution
On se donne deux nombres réels a et ω et on désigne par H la fonction de Heaviside. On pose $f(t) = H(t)\, \exp(a\,t)$ et $g(t) = H(t)\, \exp(i\,\omega\,t)$.
a) La fonction convolée $f * g$ de f et de g est-elle définie ? Est-elle causale ?
b) Calculer pour tout nombre réel t l'expression $\big(f * g\big)(t)$.
c) Pour $a = \omega = 1$ calculer les parties réelle et imaginaire de la fonction $f * g$.
d) En déduire l'expression de la convolée $\big(H(t)\,\mathrm{e}^t\big) * \big(H(t)\,\sin t\big)$.

Exercice 3) Transformée de Laplace
a) Calculer les trois nombres réels α, β et γ de sorte que la relation $\frac{1}{(p-1)\,(p^2+1)} = \frac{\alpha\,p+\beta}{p^2+1} + \frac{\gamma}{p-1}$ soit vraie pour tout nombre réel ou complexe p différent de $+1$, $+i$ ou $-i$.
b) Expliciter la fonction causale $x(t)$ telle que sa transformée de Laplace est égale à la fraction de la question a) : $[\mathcal{L}(x(t))](p) = \frac{1}{(p-1)\,(p^2+1)}$.
c) En déduire l'expression de la convolée $\big(H(t)\,\mathrm{e}^t\big) * \big(H(t)\,\sin t\big)$.

Exercice 4) Equation différentielle ordinaire
Avec la méthode de votre choix, calculer les valeurs $y(t)$ (pour $t > 0$) de la solution de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y(t) = \sin t$ avec la condition initiale $y(0) = 0$.