Conservatoire National des Arts et Métiers
Département de Mathématiques
Cours de "Mathématiques du Signal Déterministe"

Examen du 02 février 2016 (3 heures)

Les notes de cours manuscrites ou téléchargées avant l'épreuve via le site internet du cours sont autorisées, à l'exclusion de tout autre document, ordinateur, tablette ou téléphone. Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la précision des explications fournies. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1) Espaces de fonctions

On rappelle que l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions f intégrables sur $\mathbb{R}$, l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ celui des fonctions f de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ et que les fonctions de l'espace $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$ sont bornées.

a) On pose $f_1(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$. La fonction f_1 appartient-elle à l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$? Appartient-elle à l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$? Appartient-elle à l'espace $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$? Justifier avec soin votre réponse.

b) Mêmes questions avec f_2 définie par la relation $f_2(t) = \dfrac{1}{\sqrt{\mid t \mid}\,\big(1+t^4\big)}$.

c) Mêmes questions avec f_3 définie par la relation $f_3(t) = \dfrac{\sin\, t}{t}$.

d) On pose $f_4(t) = \dfrac{1-\cos\, t}{t}$. Cette fonction appartient-elle à l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$? Appartient-elle à l'espace $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$?

Exercice 2) Equations différentielles ordinaires

On se donne la fonction de Heaviside $H(t) = 0$ si $t \leq 0$ et $H(t) = 1$ si $t > 0$.

a) Calculer la solution $u(t)$ de l'équation différentielle homogène (1) $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u(t) = 0$ avec la condition initiale (2) $u(0) = 1$.

b) Même question pour l'équation différentielle (3) $\dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + u_1(t) = 1$ avec la condition initiale (2) : $u_1(0) = 1$.

c) Question analogue pour l'équation différentielle (4) $\dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} + u_2(t) = H(t)$ avec la condition initiale (2) : $u_2(0) = 1$.

d) Même question pour l'équation différentielle (5) $\dfrac{\mathrm{d}u_3}{\mathrm{d}t} + u_3(t) = 1 - H(t)$ tout en conservant avec la condition initiale (2) : $u_3(0) = 1$.

Exercice 3) Transformation de Fourier

On se donne un nombre réel α strictement positif et la fonction φ_α définie par $\varphi_\alpha(t) = \exp(-\alpha t)$ si $t \geq 0$ et $\varphi_\alpha(t) = 0$ si $t < 0$.

a) Rappeler pourquoi la fonction φ_α est intégrable sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer les valeurs $\widehat{\varphi_\alpha}(\omega)$ de la transformée de Fourier $\widehat{\varphi_\alpha}$ de cette fonction.

c) Calculer les valeurs $f(t)$ du produit de convolution $f = \varphi_\alpha * \varphi_\alpha$.

d) Calculer les valeurs $\widehat{f}(\omega)$ de la transformation de Fourier $\widehat{f}$ de la fonction f.

Exercice 4) Dérivation au sens des distributions

Soit $f(t)$ la fonction définie par $f(t) = -1$ si $t < -\frac{\pi}{2}$, $f(t) = \sin t$ si $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ et $f(t) = +1$ si $t > \frac{\pi}{2}$.

a) Dessiner le graphe de la fonction f.

b) Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Préciser sa fonction dérivée f' et dessiner le graphe de f'.

c) La fonction f' est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? Justifier avec soin votre réponse.

d) Calculer la dérivée seconde f'' (c'est à dire la dérivée de la fonction f') de la fonction f au sens des distributions. Justifier avec soin votre réponse.

Exercice 5) Signal discret

On se donne un pas d'échantillonnage $a > 0$; la notation δ_{na} désigne la masse de Dirac au point na. Un signal discret $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n\, \delta_{na}$ se transforme sous l'action d'un filtre T en un signal discret $y = \sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n\, \delta_{na}$ de sorte que $y_n = \frac{1}{6}x_{n-1} + \frac{1}{3}x_n + \frac{1}{2}x_{n+1}$.

a) Ce filtre est-il causal ?

b) Calculer sa réponse impulsionnelle h.

c) Ce filtre est-il stable ?

d) Calculer sa fonction de transfert H.

Exercice 6) Signal discret

On se donne un pas d'échantillonnage $a > 0$, un nombre réel α strictement positif et la fonction suivante $H(z)$ de la variable complexe z définie par une série: $H(z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{z}\right)^\ell$.

a) Pour quelles valeurs de z la série $H(z)$ est-elle convergente ?

b) Montrer que la fonction $H(z)$ est une fonction de transfert d'un filtre linéaire U qui transforme un signal discret $x = \sum_{j\in\mathbb{Z}} x_j\, \delta_{ja}$ en un signal discret $y = \sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n\, \delta_{na}$; préciser la réponse impulsionnelle du filtre U ainsi défini.

c) Comment calculer les valeurs de y_n en fonction de l'ensemble des nombres x_j pour j entier positif ou négatif ?

d) A quelle condition sur le paramètre α le filtre U est-il stable ?