Conservatoire National des Arts et Métiers
Département de Mathématiques
Cours de “Mathématiques du Signal Déterministe”

Examen du 19 avril 2016 (3 heures)

Les notes de cours manuscrites ou téléchargées avant l’épreuve via le site internet du cours sont autorisées, à l’exclusion de tout autre document, ordinateur, tablette ou téléphone. Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la précision des explications fournies. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1) Equations différentielles ordinaires

a) Calculer l’ensemble des solutions $u(t)$ de l’équation différentielle homogène

(1) $\dfrac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + u(t) = 0\,.$

b) Calculer la solution $u_1(t)$ de l’équation différentielle (2) $\dfrac{\mathrm{d}^2 u_1}{\mathrm{d}t^2} + u_1(t) = t$ avec la condition initiale (3) : $u_1(0) = 0,\ u_1'(0) = 0.$

c) Calculer la solution $u_2(t)$ de l’équation différentielle (4) $\dfrac{\mathrm{d}^2 u_2}{\mathrm{d}t^2} + u_2(t) = \sin t$ avec la même condition initiale (3) : $u_2(0) = 0,\ u_2'(0) = 0.$

Exercice 2) Convolution et transformation de Fourier

On se donne un nombre réel τ strictement positif et la fonction f définie par

$$f(t) = \exp(- \mid t \mid / \tau)\,.$$

On remarque que $f(t) = \exp(t/\tau)$ si $t \leq 0$ et $f(t) = \exp(-t/\tau)$ si $t \geq 0\,.$

a) Calculer la transformée de Fourier $\widehat{f}(\omega)$ de la fonction f.

b) En déduire la valeur de l’intégrale $I(t) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)\, \exp(i\,\omega\, t)\, \mathrm{d}\omega\,.$

c) Que vaut $I(0)$? Pouvait-on prévoir le résultat par une autre méthode ?

d) Montrer que le produit de convolution $\varphi(t) \equiv (f * f)(t)$ est une fonction paire de l’argument t.

e) Si t est positif ou nul, calculer le produit de convolution $\varphi(t) = (f * f)(t)\,.$

f) Quelle est l’expression de $\varphi(t)$ si t est un réel quelconque ?

g) Que vaut $\varphi'(0)$?

h) Calculer l’expression de la transformée de Fourier $\widehat{\varphi}(\omega)$ de la fonction φ.

i) En déduire la valeur de l'intégrale $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+\omega^2)^2}\, \mathrm{d}\omega\,.$

Exercice 3) Dérivation au sens des distributions

Soit $f(t)$ la fonction définie par $f(t) = \cos^2 t$ si $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ et $f(t) = 0$ si $\mid t \mid \geq \frac{\pi}{2}$.

a) Dessiner le graphe de la fonction f.

b) Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Préciser sa fonction dérivée f' et dessiner le graphe de f'.

c) La fonction f' est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? Justifier avec soin votre réponse.

d) Calculer les expressions de la dérivée seconde f'' (c'est à dire la dérivée de la fonction f') de la fonction f au sens des distributions. Justifier avec soin votre réponse.

e) Même question avec f''', dérivée au sens des distributions de la fonction f''. Justifier avec soin votre réponse.

Exercice 4) Signal discret

On se donne un pas d'échantillonnage $a > 0$; la notation δ_{na} désigne la masse de Dirac au point na. Un signal discret $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n\, \delta_{na}$ se transforme sous l'action d'un filtre T en un signal discret $y = \sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n\, \delta_{na}$ de sorte que $y_n = x_n + x_{n-1} + \frac{1}{2}\, x_{n-2} + \frac{1}{3}\, x_{n-3} + \frac{1}{4}\, x_{n-4}$.

a) Ce filtre est-il causal ?

b) Calculer sa réponse impulsionnelle h.

c) Ce filtre est-il stable ?

d) Calculer sa fonction de transfert H.

e) Pour quelles valeurs de z la fonction $H(z)$ est-elle définie ?

f) Quel commentaire pouvez-vous faire ?