



MAA107 - Mathématiques du Signal Déterministe

Examen première session, 29 janvier 2019

Enseignant responsable :

François Dubois

Durée 3 heures

Les calculatrices sont interdites

Documents autorisés :

notes de cours personnelles

et transmises lors des cours, sous forme papier,

les ouvrages

**“Aide mémoire de mathématiques de l’ingénieur”
(M. Chossat) et “Distributions, Analyse de Fourier et
Transformation de Laplace” (A. Lesfari),**

à l’exclusion de tout autre document.

**Les téléphones mobiles et autres équipements com-
municants (ordinateur, tablette, etc.) doivent être
éteints et rangés dans les sacs pendant toute la durée
de l’épreuve.**

Ce sujet comporte 3 pages, celle-ci comprise.

Examen du 29 janvier 2019 (3 heures)

Les notes de cours manuscrites ou téléchargées avant l'épreuve via le site internet du cours sont autorisées, ainsi que les deux ouvrages mentionnés dans la page de garde, à l'exclusion de tout autre document, ordinateur, tablette ou téléphone. Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la précision des explications fournies. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1) Espaces de fonctions

On rappelle que l'espace $L^1(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions intégrables sur \mathbb{R} , l'espace $L^2(\mathbb{R})$ celui des fonctions de carré intégrable sur \mathbb{R} et que les fonctions de l'espace $L^\infty(\mathbb{R})$ sont bornées. On se donne un nombre réel α et on pose $f_\alpha(t) = \left(\frac{1}{1+t^2}\right)^\alpha$.

- a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f_α ?
- b) Pour quelles valeurs de α la fonction f_α appartient-elle à l'espace $L^\infty(\mathbb{R})$?
- c) Pour quelles valeurs de α la fonction f_α appartient-elle à l'espace $L^1(\mathbb{R})$?
- d) Pour quelles valeurs de α la fonction f_α appartient-elle à l'espace $L^2(\mathbb{R})$?

Exercice 2) Transformation de Fourier

On se donne $T > 0$ et on note P_T la fonction porte : $P_T(t) = 1$ si $|t| \leq \frac{T}{2}$, $P_T(t) = 0$ si $|t| > \frac{T}{2}$. On définit f comme le produit de convolution de la porte P_T par elle-même : $f = P_T * P_T$.

- a) Rappeler l'expression de la transformée de Fourier $\widehat{P_T}(\omega)$ de la porte P_T .
- b) Montrer que la fonction f est paire.
- c) Montrer que la fonction f admet l'expression suivante : $f(t) = T - |t|$ si $|t| \leq T$, $f(t) = 0$ si $|t| > T$.
- d) Représenter graphiquement la fonction f .
- e) Calculer la transformée de Fourier $\widehat{f}(\omega)$ de la fonction f .
- f) La fonction \widehat{f} appartient-elle à l'espace $L^1(\mathbb{R})$ des fonctions intégrables ?
- g) On désigne par sinc la fonction sinus cardinal : $\text{sinc}(\theta) = \frac{\sin \theta}{\theta}$. Calculer en fonction de t les valeurs de l'intégrale $I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right)^2 \exp(i\omega t) d\omega$. On pourra utiliser le théorème d'inversion de Fourier.
- h) En déduire une expression analytique de l'intégrale $J = \int_{-\infty}^{+\infty} (\text{sinc}(\theta))^2 d\theta$.

Exercice 3) Dérivation au sens des distributions

Soit $f(t)$ la fonction définie par $f(t) = 0$ si $t < -1$, $f(t) = t(1 - t^2)$ si $-1 \leq t \leq 1$ et $f(t) = 0$ si $t > 1$.

- a) Dessiner le graphe de la fonction f .
- b) Montrer que la fonction f est continue sur \mathbb{R} .
- c) Montrer que la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} , sauf en certains points que l'on précisera.
- d) Calculer la dérivée de f au sens classique.
- e) Dessiner le graphe de la fonction dérivée de la fonction f .
- f) Quelle est la dérivée de f au sens des distributions ?
- g) Calculer la dérivée seconde de f au sens des distributions.
- h) Cette distribution peut-elle être représentée par une fonction ?

Exercice 4) Signaux discrets et transformée en z

On se donne un pas d'échantillonnage $a > 0$; la notation δ_{na} désigne la masse de Dirac au point na . Un signal discret $x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \delta_{na}$ se transforme sous l'action d'un filtre T en un signal discret $y = \sum_{n \in \mathbb{Z}} y_n \delta_{na}$ de sorte que $y_n = x_n + x_{n-1} + \frac{1}{2}x_{n-2} + \frac{1}{3}x_{n-3}$.

- a) Ce filtre est-il causal ?
- b) Calculer sa réponse impulsionnelle h .
- c) Ce filtre est-il stable ?
- d) Calculer sa fonction de transfert H .
- e) Pour quelles valeurs de z la fonction $H(z)$ est-elle définie ?
- f) Quel commentaire pouvez-vous faire ?