Conservatoire National des Arts et Métiers
Département de Mathématiques
Méthodes Mathématiques pour le Traitement du Signal

# Examen partiel du 06 novembre 2018 (1 heure 30)

*Les notes de cours sont autorisées, à l'exclusion de tout autre document. Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la rigueur des explications fournies.* Les quatre exercices sont indépendants.

**Exercice 1) Equation différentielle ordinaire**

On se propose de calculer la solution de l'équation différentielle (1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y(t) = \sin t$ avec la condition initiale (2) $y(0) = 0$.

a) Quelle est la solution générale de l'équation "sans second membre" $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y(t) = 0$ ?

b) Chercher une solution particulière de l'équation (1) sous la forme $y(t) = a\,\cos(t) + b\,\sin(t)$, où $a$ et $b$ sont des nombres que l'on précisera.

c) Déterminer pour $t$ positif la solution $y(t)$ de l'équation différentielle (1) avec la condition initiale (2).

**Exercice 2) Intégrales doubles**

Soit $T$ le triangle défini algébriquement à l'aide des relations $T = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2,\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, x + y \leq 1\}$.

a) Dessiner le triangle $T$.

b) Calculer l'intégrale double $I_1 = \iint_T \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

c) Calculer l'intégrale double $I_2 = \iint_T x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

d) Calculer l'intégrale double $I_3 = \iint_T y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

e) Calculer l'intégrale double $I_4 = \iint_T x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

**Exercice 3) Convolution et transformée de Laplace**

On désigne par $H$ la fonction de Heaviside : $H(t) = 1$ si $t > 0$ et $H(t) = 0$ sinon. On pose $f(t) = H(t)\,\exp(-t)$.

a) La fonction $f$ est-elle causale ?

b) Le produit de convolution $g = f * f$ est-il une fonction causale ?

c) Calculer $g(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

d) Calculer la transformée de Laplace $F = \mathcal{L}f$ de la fonction $f$.

e) Calculer la transformée de Laplace $G = \mathcal{L}g$ de la fonction $g$.

f) Quelle est la relation vérifée entre $F$ et $G$ ?

g) Pouvait-on prévoir le résultat ?

**Exercice 4) Transformée de Laplace**

On pose $F(p) = \frac{1}{p\,(p+1)}$ et $G(p) = \frac{1}{p^2\,(p+1)}$.

a) Décomposer la fonction $F$ en éléments simples sous la forme $F(p) = \frac{a}{p} + \frac{b}{p+1}$. On déterminera les coefficients $a$ et $b$.

b) Décomposer la fonction $G$ en éléments simples sous la forme $G(p) = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p^2} + \frac{\gamma}{p+1}$. On déterminera les coefficients $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$.

c) Déterminer l'unique fonction $f(t)$ dont la transformée de Laplace est égale à $F(p)$.

d) Déterminer l'unique fonction $g(t)$ dont la transformée de Laplace est égale à $G(p)$.