Conservatoire National des Arts et Métiers
Département de Mathématiques
Cours de “Mathématiques du Signal Déterministe”

# Examen partiel du 07 novembre 2017 (1 heure 30)

*Les notes de cours sont autorisées, à l'exclusion de tout autre document. Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la rigueur des explications fournies.* Les quatre exercices sont indépendants.

**Exercice 1) Série de Fourier**

On considère la fonction $f$ définie par $f(t) = |\sin t|$ avec $t \in \mathbb{R}$.
a) Dessiner le graphe de la fonction $y = f(t)$.
b) Montrer que la fonction $f$ est paire.
c) Montrer que la fonction $f$ est périodique et préciser sa période.
d) Montrer que pour tout entier $k$, on a $\int_0^\pi f(t)\, \sin(2\,k\,t)\, \mathrm{d}t = 0$.
e) Calculer, pour $k$ entier positif ou nul, l'intégrale $\int_0^\pi f(t)\, \cos(2\,k\,t)\, \mathrm{d}t$.
f) Déduire des questions précédentes le développement en série de Fourier de la fonction $f$.

**Exercice 2) Intégrales doubles**

Soit $T_1$ et $T_2$ les triangles définis algébriquement à l'aide des relations
$T_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\, 0 \leq y \leq x \leq 1\}$ et $T_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\, 0 \leq x \leq y \leq 1\}$.
a) Dessiner le triangle $T_1$.
b) Dessiner le triangle $T_2$.
c) Quelle est la réunion $K = T_1 \cup T_2$ de ces deux triangles ?
d) Calculer l'intégrale double $I_1 = \iint_{T_1} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.
e) Calculer l'intégrale double $I_2 = \iint_{T_2} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.
f) Calculer l'intégrale double $I_3 = \iint_{K} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.
g) Que remarquez vous ?

**Exercice 3) Transformée de Laplace**

On désigne par $H$ la fonction de Heaviside. On pose $f(t) = H(t - \frac{\pi}{4})\, \sin(t - \frac{\pi}{4})$ et $g(t) = H(t)\, \sin(t - \frac{\pi}{4})$ d'une part et $A(p) = \frac{1}{p\,(p-1)\,(p-2)}$ et $B(p) = \frac{1}{(p+1)\,(p^2+1)}$ d'autre part.
a) Calculer les valeurs $F(p)$ de la transformée de Laplace de la fonction $f$.
b) Même question pour les valeurs $G(p)$ de la transformée de Laplace de la fonction $g$.
c) Déterminer l'unique fonction $\alpha(t)$ dont la transformée de Laplace est égale à $A(p)$.
d) Montrer qu'on peut décomposer la fraction $B(p)$ en éléments simples sous la forme $B(p) = \frac{a}{p+1} + \frac{b\,p+c}{p^2+1}$.
e) En déduire l'unique fonction $\beta(t)$ dont la transformée de Laplace est égale à $B(p)$.

**Exercice 4) Equation différentielle ordinaire**

Avec la méthode de votre choix, déterminer pour $t$ positif la solution $y(t)$ de l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y(t) = \sin t$ avec la condition initiale $y(0) = 1$.