Conservatoire National des Arts et Métiers
Département de Mathématiques
Cours de "Mathématiques du Signal Déterministe"

Examen partiel du 15 novembre 2016 (1 heure 30)

Les notes de cours sont autorisées, à l'exclusion de tout autre document. Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la rigueur des explications fournies. Les quatre exercices sont indépendants.

Exercice 1) Equation différentielle ordinaire
Avec la méthode de votre choix, déterminer pour t positif la solution $y(t)$ de l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y(t) = t^2 + 1$, avec la condition initiale $y(0) = 1$.

Exercice 2) Série de Fourier
On considère la fonction périodique f de période 2π, paire, qui satisfait à la relation $f(x) = x$ si $x \in [0, \pi]$.

a) Dessiner le graphe de la fonction $y = f(x)$.

b) Déterminer la série de Fourier trigonométrique $S(f)$ de la fonction f et montrer que $S(f)(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{\ell \geq 0} \dfrac{1}{(2\,\ell + 1)^2} \cos\big((2\,\ell + 1)\,x\big)$.

c) Déduire de ce qui précède les sommes $S = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2\,\ell + 1)^2}$ et $\Sigma = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

d) A l'aide de la relation de Bessel-Parseval, montrer que l'on a $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2\,\ell + 1)^4} = \dfrac{\pi^4}{96}$.

Exercice 3) Intégrales doubles
Soit T le triangle décrit algébriquement à l'aide de la relation
$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, x + y \leq 2\}$.

a) Dessiner le triangle T.

b) Calculer les cinq intégrales doubles suivantes : $I_1 = \displaystyle\iint_T \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,
$I_2 = \displaystyle\iint_T x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $I_3 = \displaystyle\iint_T y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $I_4 = \displaystyle\iint_T x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ et $I_5 = \displaystyle\iint_T x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Exercice 4) Transformée de Laplace
a) Calculer les trois nombres réels α, β et γ de sorte que la relation
$\dfrac{p^2 + 1}{p^2\,(p + 2)} = \dfrac{\alpha}{p} + \dfrac{\beta}{p^2} + \dfrac{\gamma}{p + 2}$ soit vraie pour tout réel p différent de 0 et 2.
b) Expliciter la fonction causale $x(t)$ telle que sa transformée de Laplace est égale à la fraction de la question a) : $[\mathcal{L}(x(t))](p) = \dfrac{p^2 + 1}{p^2\,(p + 2)}$.