Conservatoire National des Arts et Métiers
Département de Mathématiques
Cours de "Mathématiques du Signal Déterministe"

**Examen partiel du 18 novembre 2014 (1 heure 30)**

*Les notes de cours sont autorisées, à l'exclusion de tout autre document. Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la rigueur des explications fournies. Les quatre exercices sont indépendants.*

**Exercice 1) Equation différentielle ordinaire**

On se propose de déterminer la solution $y(t)$ de l'équation différentielle

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y(t) = \cos t$

avec la condition initiale

(2) $y(0) = 1.$

a) Quelle est l'expression de la solution générale de l'équation (1) sans second membre ?

b) Chercher une solution particulière de l'équation (1) sous la forme d'une combinaison de fonctions trigonométriques élémentaires.

c) Proposer une solution analytique de l'équation différentielle (1) avec la condition initiale (2).

d) Vérifier que la relation proposée à la question précédente est effectivement solution du problème (1)(2).

**Exercice 2) Série de Fourier**

On consifère la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(t) = |\cos t|$ .

a) Montrer que $f$ est périodique et que $f(t+\pi) = f(t)$ pour tout nombre réel $t$.

b) Calculer l'intégrale $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t)\mathrm{d}t$.

c) On se donne un entier naturel $k$ supérieur ou égal à 1. Calculer les intégrales $J_k = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t) \cos\big(2\,k\,t\big)\,\mathrm{d}t$.

d) Pourquoi les intégrales $L_k = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t) \sin\big(2\,k\,t\big)\,\mathrm{d}t$ sont-elles nulles pour tout entier $k$ ?

e) Déduire des questions précédentes le développement en série de Fourier de la fonction $f$.

f) Appliquer le thérorème de Parseval pour calculer exactement la somme

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2\,(2k-1)^2}.$$

**Exercice 3) Intégrales doubles**

Soit $T$ le triangle décrit algébriquement à l'aide de la relation

$T \, = \, \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2,\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, x + y \leq 1\}.$

Dessiner le triangle $T$. Calculer les cinq intégrales doubles suivantes :

a) $I_1 = \iint_T \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, b) $I_2 = \iint_T \, x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, c) $I_3 = \iint_T \, y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$,

d) $I_4 = \iint_T \, x^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ et e) $I_5 = \iint_T \, x \, y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$.

**Exercice 4) Transformée de Laplace**

On désigne par H(t) la fonction de Heaviside : $H(t) = 1$ si $t \geq 0$ et $H(t) = 0$ si $t < 0$ et par $[\mathcal{L}(x(t))](p)$ la transformée de Laplace d'une fonction $x$.

a) Expliciter l'expression des transformées de Laplace suivantes :

$[\mathcal{L}(H(t))](p),\ [\mathcal{L}(t\, H(t))](p),\ [\mathcal{L}(t^2\, H(t))](p),\ [\mathcal{L}(\cos t\, H(t))](p),\ [\mathcal{L}(\sin t\, H(t))](p).$

b) On se donne la fraction rationnelle (3) $F(p) \equiv \dfrac{2}{p^3\,(p^2+1)}$.

Décomposer cette fraction en éléments simples. On cherchera des nombres réels $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ et $\varepsilon$ de sorte que $F(p) = \dfrac{\alpha}{p} + \dfrac{\beta}{p^2} + \dfrac{\gamma}{p^3} + \dfrac{\delta\, p + \varepsilon}{p^2+1}$. On pourra utiliser les valeurs particulières suivantes de $p$ : $i$, $0$, $\infty$, $1$.

c) En déduire l'expression d'une fonction $f(t)$ de sorte que $[\mathcal{L}(f(t))](p) = F(p)$, où $F$ est la fraction rationnelle introduite en (3).

d) On se propose de calculer la solution $y(t)$ de l'équation différentielle

$$(4) \qquad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + y(t) \, = \, t^2$$

avec la condition initiale

$$(5) \qquad y(0) = 1,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = 1.$$

Quelle est la relation satisfaite par la transformée de Laplace $Y(p)$ de la solution $y(t)$ de (4)(5) ? On rappelle que $Y(p) = [\mathcal{L}(H(t)\, y(t))](p)$.

e) A l'aide des questions précédentes, calculer la solution $y(t)$ de l'équation différentielle (4) avec la condition initiale (5).