Conservatoire National des Arts et Métiers
Département de Mathématiques
Cours de “Mathématiques du Signal Déterministe”

Examen partiel du 10 novembre 2015 (1 heure 30)

Les notes de cours sont autorisées, à l'exclusion de tout autre document. Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la rigueur des explications fournies. Les cinq exercices sont indépendants. Toutefois, des résultats de certains exercices peuvent être utilisés dans l'exercice qui suit.

Exercice 1) Calcul d'une intégrale

a) Quelle est la valeur de l'intégrale $\int_0^1 4\,\theta\,(1-\theta)\,\mathrm{d}\theta$?

b) On se donne un entier k non nul. Calculer la dérivée par rapport à la variable θ de la fonction $g_k(\theta) = \big[\frac{2}{ik\pi}\,\theta^2 + \big(\frac{2i}{k\pi} - \frac{2}{k^2\pi^2}\big)\,\theta + \big(\frac{i}{k^3\pi^3} + \frac{1}{k^2\pi^2}\big)\big]\ \exp(-2\,i\,k\,\pi\,\theta)$.

c) En déduire que l'on a $\int_0^1 4\,\theta\,(1-\theta)\ \exp(-2\,i\,k\,\pi\,\theta)\,\mathrm{d}\theta \;=\; -\frac{2}{k^2\pi^2}$ si l'entier k est différent de zéro.

Exercice 2) Série de Fourier

On se donne un nombre T strictement positif et on note f la fonction périodique de période T telle que $f(t) \;=\; 4\,\frac{t\,(T-t)}{T^2}$ si $0 \leq t \leq T$.

a) Dessiner le graphe de la fonction f.

b) La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

c) Pour k entier positif, négatif ou nul, calculer le coefficient de Fourier $a_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\ \exp(-2\,i\,k\,\pi\,t/T)\,\mathrm{d}t$ de la fonction f.

d) A l'aide du calcul précédent et de l'égalité de Bessel-Parseval, montrer que l'on a $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} \;=\; \frac{\pi^4}{90}$.

Exercice 3) Espaces fonctionnels

a) On désigne par I l'intervalle $]1,\,+\infty[$ et par f la fontion $f(t) = \frac{1}{t}$. Cette fonction appartient-elle à l'espace $L^1(I)$? à l'espace $L^2(I)$? à l'espace $L^\infty(I)$?

b) Reprendre les questions précédentes avec la même fonction f et $I =]0,\,1[$.

Exercice 4) Transformée de Laplace

Calculer les originales $f_j(t)$ des fonctions dont la transformée de laplace est donnée par $F_1(p) = \frac{1}{p}$, $F_2(p) = \frac{1}{p^2}$, $F_3(p) = \frac{1}{p\,(p+1)}$ et $F_4(p) = \frac{1}{p^2\,(p+1)}$.

Exercice 5) Equation différentielle ordinaire

Avec la méthode de votre choix, déterminer pour t positif la solution $y(t)$ de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y(t) = t + 1$, avec la condition initiale $y(0) = 1$.