le cnam

Méthodes Mathématiques pour le Traitement du Signal

Cours 9 Introduction aux distributions

• Dérivation de la fonction valeur absolue

On pose $v(t) = |t|$. On sait que pour t non nul, cette fonction est dérivable et sa dérivée $v'(t)$ est égale a la fonction "signe" définie par $\mathrm{sgn}\,t = 1$ si $t > 0$ et $\mathrm{sgn}\,t = -1$ si $t < 0$. On peut constater [exercice !] que, même si la valeur absolue n'est pas dérivable en zéro, la relation fondamentale du calcul différentiel : $f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$ reste valable pour cette fonction ; en particulier, $v(t) = + \int_0^t \mathrm{sgn}\,\theta\,\mathrm{d}\theta$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

• Dérivation de la fonction de Heaviside

La fonction de Heaviside H satisfait aux relations $H(t) = 0$ si $t < 0$ et $H(t) = 1$ si $t > 0$. Elle n'est pas dérivable en zéro mais elle l'est en tout autre point $t \neq 0$ et $H'(t) = 0$ si $t \neq 0$. Pourtant, si on calcule l'expression $\int_0^t H'(\theta)\,\mathrm{d}\theta$, on ne retrouve pas $H(t)$ pour tout t ! Il manque "quelque chose" à la dérivée de la fonction de Heaviside.

• Valeur ponctuelle ou fonction test ?

On se donne (pour fixer les idées) une fonction bornée $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$. Si φ est une fonction intégrable ($\varphi \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$), l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est un nombre réel bien défini. La question posée est la suivante : à partir de toutes les intégrales $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ pour une certaine famille de fonctions de test, peut-on caractériser complètement la fonction f ? Au lieu de voir une fonction f comme une famille de nombres réels $f(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$, on la considère comme une famille de nombres $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ pour une famille de "fonctions test" φ.

• Fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide

Le mathématicien Laurent Schwartz (1915-2002) a proposé un espace de fonctions test $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ qui a permis de généraliser la notion de fonction en toute rigueur mathématique. Une fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ appartient à l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites. D'une part, la fonction φ est indéfiniment dérivable et on note $\varphi^{(k)}$ la dérivée k^{o} de la fonction φ. D'autre part la fonction φ est à décroissance rapide : la fonction φ et toutes ses dérivées $\varphi^{(k)}$ tendent vers zéro à l'infini plus vite que tout polynôme ; pour tout entier k et tout entier ℓ, l'expression $t^\ell\,\varphi^{(k)}(t)$ tend vers zéro si $|t|$ tend vers l'infini.

• Fonctions gaussiennes

On se donne $\theta \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. La fonction gaussienne $\varphi_{\theta,\sigma}$ centrée au point θ et d'écart type σ (ou de variance σ^2) est définie par $\varphi_{\theta,\sigma}(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\big(-\frac{(t-\theta)^2}{2\sigma^2}\big)$. Elle appartient à l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide. Et c'est encore vrai de toutes ses dérivées $\varphi^{(k)}_{\theta,\sigma}$. Toutes les fonctions $\varphi^{(k)}_{\theta,\sigma}$ sont des fonctions test que nous utilisons dans la suite de cette leçon. On remarque aussi [exercice !] que l'on a $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\theta,\sigma}(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

François Dubois, novembre 2017.

• L'espace des fonctions infiniment dérivables à décroissance rapide est stable par dérivation
C'est une propriété fondamentale qui est conséquence immédiate de la définition de l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R})$: si $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, alors sa dérivée φ' appartient également à l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. En d'autres termes, $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \implies \varphi' \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

• Convergence dans l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide
La notion de convergence dans l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ est délicate et nous n'entrerons pas dans le cadre de ce cours dans les difficultés techniques liées à cette question. Afin d'être complets, notons simplement qu'une suite de fonctions $\varphi_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ converge vers la fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ si et seulement si pour tout k et ℓ entiers, les fonctions $t \longmapsto t^\ell \, \varphi_n^{(k)}(t)$ convergent uniformément vers la fonction $t \longmapsto t^\ell \, \varphi^{(k)}(t)$. En d'autres termes, pour tout k et ℓ entiers,
$\|t^\ell \, \varphi_n^{(k)}(t) - t^\ell \, \varphi^{(k)}(t)\|_\infty$ tend vers zéro si n tend vers l'infini.

• Action d'une fonction contre une fonction test
Comme toute fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ décroît plus vite vers zéro à l'infini que la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t^2}$ dont l'intégrale converge à l'infini, l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| \, \mathrm{d}t$ est bien définie et $\varphi \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$: $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \subset \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Donc pour $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \, \varphi(t) \, \mathrm{d}t$ est bien définie. On l'appelle "action de la fonction f contre la fonction test φ" et on la note $< T_f, \varphi >$. Par définition, $< T_f, \varphi >= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \, \varphi(t) \, \mathrm{d}t$; c'est une simple intégrale convergente.

• Les actions contre toutes les fonctions test permettent de déterminer les valeurs ponctuelles
On se donne une fonction f bornée "inconnue" pour laquelle on se donne toutes les actions $< T_f, \varphi >$ pour toutes les fonctions $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Alors la fonction f est parfaitement connue ; les valeurs $f(t)$ sont connues pour (presque) tout $t \in \mathbb{R}$.
On peut se convaincre de cette propriété pour une fonction continue au point θ. Dans ce cas, la valeur numérique $f(\theta)$ apparaît comme la limite des intégrales $< T_f, \varphi_{\theta,\sigma} >$ pour σ tendant vers zéro.

• Distribution
Une distribution T généralise l'opération d'intégration proposée avec l'intégration T_f. Une distribution $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ associe à toute fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ le nombre $< T, \varphi >$. Deux conditions doivent être satisfaites : la linéarité et la continuité. De façon précise, l'application $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \ni \varphi \longmapsto < T, \varphi > \in \mathbb{R}$ est linéaire : $< T, \varphi + \psi >=< T, \varphi > + < T, \psi >$ si φ et ψ sont deux fonctions test et $< T, \lambda \, \varphi >= \lambda \, < T, \varphi >$ si λ est un nombre réel. De plus, si la suite $\varphi_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ converge vers la fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ alors la suite numérique $< T, \varphi_n >$ converge vers $< T, \varphi >$ lorsque n tend vers l'infini.
Deux distribution T et U sont égales si et seulement si pour toute fonction test $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a égalité des nombres $< T, \varphi >$ et $< U, \varphi >$.
Bien entendu, si f est une fonction bornée, l'opération T_f définit une distribution avec la relation $< T_f, \varphi >= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \, \varphi(t) \, \mathrm{d}t$ [exercice !]. Mais il existe aussi des distributions qui ne se réduisent pas à des intégrales fonctionnelles de la forme $< T_f, \varphi >$.

- Dérivée d'une fonction au sens des distributions

Si f est une fonction bornée dérivable dont la dérivée f' est également bornée, on peut calculer $< T_{f'}, \varphi >$ à l'aide d'une intégration par parties. Il vient alors
$< T_{f'}, \varphi >= -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = -< T_f, \varphi' >$, ce pour toute fonction test. On constate que même si la fonction f n'est pas dérivable, le nombre $-< T_f, \varphi' >$ a un sens pour toute fonction test. Cette relation définit la dérivée $(T_f)'$ au sens des distributions. Par définition, la distribution $(T_f)'$ "dérivée de f au sens des distributions" agit sur une fonction test φ *via* la relation $< (T_f)', \varphi >= -< T_f, \varphi' >$.
Dans le cas ou la fonction f est dérivable, une intégration par parties montre que l'on a [exercice !] $(T_f)' = T_{f'}$ et la dérivée au sens des distribution est alors simplement l'intégration de la dérivée contre une fonction test.

- Dérivée de la fonction de Heaviside au sens des distributions

Si on applique la définition précédente à la fonction de Heaviside, on obtient [exercice !]
$< (T_H)', \varphi >= \varphi(0)$ pour toute fonction test.

- Masse de Dirac δ.

On peut vérifier que l'application $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \ni \varphi \longmapsto \varphi(0) \in \mathbb{R}$ est bien une distribution. C'est par définition la masse de Dirac δ et on a $< \delta, \varphi >= \varphi(0)$.
La dérivée de la fonction de Heaviside au sens des distributions peut maintenant s'écrire
$(T_H)' = \delta$ dans l'espace $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ des distributions. Cette égalité signifie que simplement que pour toute fonction test $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a $< (T_H)', \varphi >= \varphi(0)$.

- Approximation de la masse de Dirac par une famille de fonctions

On définit, pour tout $\varepsilon > 0$ la fonction δ_ε par la relation $\delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}$ si $|t| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $\delta_\varepsilon(t) = 0$ si $|t| > \frac{\varepsilon}{2}$. Alors $< T_{\delta_\varepsilon}, \varphi >= \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est exactement la valeur moyenne de la fonction φ sur l'intervalle $]-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}[$. Comme la fonction test φ est continue en zéro, la valeur moyenne converge vers $\varphi(0)$ si ε tend vers zéro [exercice !]. Les (distributions associées aux) fonctions δ_ε approchent la masse de Dirac.

- La masse de Dirac n'est pas une fonction

Il n'existe pas de fonction f de sorte que $T_f = \delta$, c'est à dire telle que pour toute fonction test $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on ait $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(0)$. Si une telle fonction existe, elle est nécessairement nulle. Mais alors l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est nulle pour toute fonction test φ et ne peut donc valoir $\varphi(0)$ si l'"ordonnée à l'origine" de la fonction φ est non nulle.
Les distributions généralisent véritablement la notion de fonction. Toute fonction définit une distribution. De plus, il existe des distributions qui ne se réduisent pas à des fonctions !

- Dérivée d'une distribution

Nous avons vu que si la distribution$T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ est de la forme $T = T_f$ pour une certaine fonction f, on a la relation $< T', \varphi >= -< T, \varphi' >$ pour toute fonction test $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Si maintenant T est une distribution quelconque, le nombre $-< T, \varphi' >$ peut être calculé pour toute fonction test. Par définition, il est égal à l'action de la distribution dérivée T' contre la fonction test φ: $< T', \varphi >= -< T, \varphi' >$.

Toute distribution est indéfiniment dérivable au sens de cette définition. En conséquence, toute fonction est indéfiniment dérivable au sens des distributions !

- Dérivée au sens des distributions d'une fonction qui a un point de discontinuité

On se donne une fonction f bornée très régulière sauf au point $\theta \in \mathbb{R}$. En ce point, la fonction f est discontinue mais elle a une limite à gauche y_- et une limite à droite y_+. On note $[f]_\theta \equiv y_+ - y_-$ le saut de la fonction f au point θ. On définit aussi la masse de Dirac δ_θ au point θ par la relation $< \delta_\theta, \varphi >= \varphi(\theta)$. En particulier, $\delta_0 = \delta$, masse de Dirac en zéro. De plus, on note f' la dérivée de f, définie partout sauf au point θ. On a $< T_{f'}, \varphi >= \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t$. Alors la dérivée de la fonction f au sens des distributions $(T_f)'$ peut s'exprimer en fonction de la dérivée classique f' et de la masse de Dirac au point θ : $(T_f)' = T_{f'} + [f]_\theta\, \delta_\theta$.

- Epilogue sur la valeur absolue et la fonction de Heaviside

Pour l'exemple de la valeur absolue, la fonction $v(t)$ est continue à l'origine et seule la dérivée classique (la fonction signe) contribue pour construire la dérivée au sens des distributions. Dans la cas de la fonction de Heaviside au contraire, la dérivée classique est nulle, le saut de la fonction au point de discontinuité est égal à 1 et on a $(T_H)' = \delta_0$.