le cnam

Méthodes Mathématiques pour le Traitement du Signal

Cours 10 Transformée de Fourier des distributions

• Multiplication d'une distribution par une fonction régulière "à croissance lente"

Une fonction régulière à croissance lente est par définition une fonction ψ indéfiniment dérivable dont toutes les dérivées sont au plus à croissance polynomiale : pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, il existe une constante C_k et un entier $\ell_k \in \mathbb{N}$ de sorte que pour tout t de valeur absolue assez grande, $|\psi^{(k)}(t)| \leq C_k \, |t|^{\ell_k}$. Alors pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, le produit $\psi \, \varphi$ appartient à l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ [exercice !]. On définit le produit de la distribution $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ par la fonction à croissance lente ψ *via* son action sur une fonction test $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$: $< \psi T, \, \varphi > = < T, \, \psi \, \varphi >$.

• Transformée de Fourier des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide

Toute fonction indéfiniment dérivable à décroissance rapide est intégrable : $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \subset \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Donc toute fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ a une transformée de Fourier $\widehat{\varphi}$ qu'on peut calculer avec la relation $\widehat{\varphi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i \, \omega \, t) \, \varphi(t) \, \mathrm{d}t$.

On dispose aussi de la transformée de Fourier conjuguée : $\overline{\mathscr{F}} \varphi(\omega) = \widehat{\varphi}(-\omega)$.

• L'espace des fonctions à décroissance rapide est stable par transformation de Fourier

Si $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, alors sa transformée de Fourier $\mathscr{F} \varphi \equiv \widehat{\varphi}$ appartient également à l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R})$: $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \Longrightarrow \mathscr{F} \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

• Inversion de Fourier dans l'espace des fonctions à décroissance rapide

Si $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, alors on a aussi $\mathscr{F} \varphi \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et on peut écrire la formule de réciprocité de Fourier : $\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i \, \omega \, t) \, \widehat{\varphi}(\omega) \, \mathrm{d}\omega$. Donc $(\overline{\mathscr{F}} \circ \mathscr{F})(\varphi) = (\mathscr{F} \circ \overline{\mathscr{F}}(\varphi) = 2\pi \, \varphi$ pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

On définit l'opérateur identité id de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ par la relation $\mathrm{id}(\varphi) = \varphi$. On a alors une égalité entre opérateurs : $\overline{\mathscr{F}} \circ \mathscr{F} = \mathscr{F} \circ \overline{\mathscr{F}} = 2\pi \, \mathrm{id}$. Par suite, dans l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide, l'opérateur inverse de la transformée de Fourier est, à un facteur 2π près, l'opérateur de Fourier conjugué : $\mathscr{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi} \overline{\mathscr{F}}$.

• Dualité de la transformation de Fourier

Pour $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a la relation suivante entre nombres réels : $\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t) \, \varphi(t) \, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \, \widehat{\varphi}(t) \, \mathrm{d}t$. La preuve demande simplement une utilisation soignée du théorème de Fubini.

• Transformée de Fourier des distributions

On se donne une distribution $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$. Par définition, sa transformée de Fourier $\mathscr{F} T \equiv \widehat{T}$ agit sur une fonction test $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ selon la relation $< \widehat{T}, \, \varphi > = < T, \, \widehat{\varphi} >$. On peut bien sûr écrire aussi $< \mathscr{F} T, \, \varphi > = < T, \, \mathscr{F} \varphi >$.

François Dubois, décembre 2017.

- Cohérence de la définition de la transformée de Fourier des distributions

Pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$, on a vu lors de la leçon précédente qu'elle définit une distribution que nous notons encore pour quelques lignes T_f: $< T_f, \varphi >= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t$. Si de plus $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, la relation de dualité $\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \widehat{\varphi}(t)\, \mathrm{d}t$ peut maintenant s'écrire $< T_{\widehat{f}}, \varphi > =< T_f, \varphi >$ qui par définition est égal à $< \widehat{T_f}, \varphi >$, ce pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. On en déduit une égalité dans l'espace des distributions : $\widehat{T_f} = T_{\widehat{f}}$ pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. La définition de la transformée de Fourier des distributions est cohérente avec la définition de la transformée de Fourier des fonctions.

- Notation

On se donne une fonction $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$. Dans la suite du cours, nous notons simplement f la distribution T_f: $< f, \varphi >= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t$. Alors la notation f' désigne (sauf mention contraire) la dérivée au sens des distributions de la fonction f: $< f', \varphi >= - < f, \varphi' >$ pour $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. La transformée de Fourier $\mathscr{F} f$ de f au sens des distributions est elle aussi toujours définie et on a simplement $< \mathscr{F} f, \varphi >= < f, \mathscr{F} \varphi >$.

- Transformée de Fourier de la masse de Dirac

On rappelle que $< \delta, \varphi >= \varphi(0)$ pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. On a alors en utilisant la définition de la transformée des distributions $\widehat{\delta} = 1$: pour toute fonction test $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $< \widehat{\delta}, \varphi >= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, \mathrm{d}t$.

On peut illustrer cette propriété avec ce que l'on sait de la tranformée de Fourier des fonctions et de l'approximation de la masse de Dirac par des fonctions simples. Si on approche δ par la famille de fonctions δ_ε définies par $\delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}$ si $|t| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $\delta_\varepsilon(t) = 0$ sinon, on a par un calcul classique vu à la leçon d'introduction de la transformée de Fourier, $\widehat{\delta_\varepsilon}(\omega) = \mathrm{sinc}\big(\frac{\varepsilon\, \omega}{2}\big)$. Cette fonction converge simplement vers la fonction "un" si ε tend vers zéro.

- Transformée de Fourier de la masse de Dirac au point a

On rappelle que si $a \in \mathbb{R}$, $< \delta_a, \varphi >= \varphi(a)$. Alors la distribution $\mathscr{F} \delta_a$ est en fait une fonction et $(\mathscr{F} \delta_a)(t) = \exp(-i\, a\, t)$. On a aussi $(\overline{\mathscr{F}} \delta_a)(t) = \exp(i\, a\, t)$.

Avec cette définition, les polynômes prennent un sens dans l'espace $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ des distributions.

- Inversion de Fourier dans l'espace des distributions

On se donne l'opérateur identité id de $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ par la relation $\mathrm{id}\, T = T$ pour toute distribution T. La transformation de Fourier des distributions $\mathscr{F}$ satisfait aux relations entre opérateurs : $\overline{\mathscr{F}} \circ \mathscr{F} = \mathscr{F} \circ \overline{\mathscr{F}} = 2\pi\, \mathrm{id}$. Dans l'espace $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ des distributions, l'opérateur inverse de la transformée de Fourier est, à un facteur 2π près, l'opérateur de Fourier conjugué : $\mathscr{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi}\, \overline{\mathscr{F}}$.

On a alors $\mathscr{F}(\exp(i\, a\, t)) = 2\pi\, \delta_a$, $\mathscr{F}(\cos(a\, t)) = \pi\, (\delta_a + \delta_{-a})$ et $\mathscr{F}(\sin(a\, t)) = \frac{\pi}{i}\, (\delta_a - \delta_{-a})$.

- Peigne de Dirac

On se donne $a > 0$ et on définit le peigne de Dirac de pas a à l'aide de la relation $\Delta_a = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{k\, a}$. En action contre une fonction test $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a $< \Delta_a, \varphi >= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(k\, a)$. On laisse au lecteur [exercice !] le soin de vérifier que la série $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(k\, a)$ est absolument convergente si φ est à décroissance rapide.

- Formule sommatoire de Poisson

Pour $T > 0$ et $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(kT) = \frac{1}{T} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}\big(\frac{2\ell\pi}{T}\big)$. En termes de distributions, $\Delta_T = \frac{1}{T} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \exp\big(\frac{2i\pi\ell}{T}\big)$.

- Convolution des distributions

Si f et g sont deux fonctions de $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, leur produit de convolution $f * g$ est défini (presque partout) par la relation $(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\, g(t-\theta)\, \mathrm{d}\theta$. On le teste contre une fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, c'est à dire qu'on évalue l'intégrale $< f*g,\, \varphi >= \int_{-\infty}^{\infty} (f*g)(t)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t$. On a en appliquant le théorème de Fubini : $< f*g,\, \varphi >= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\theta\, f(\theta)\, \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, g(t)\, \varphi(t+\theta)$. On pose $\psi(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, \varphi(t+\theta)\, \mathrm{d}t$ et on a : $< f*g,\, \varphi >= \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\, \psi(\theta)\, \mathrm{d}\theta$.

Pour passer aux distributions, les fonctions f et g sont remplacées par des distribution T et U. La relation précédente se généralise en $< T*U,\, \varphi >=< T,\, \psi >$ avec une fonction ψ telle que $\psi(\theta) =< U,\, \varphi_\theta >$ et $\varphi_\theta(t) = \varphi(t+\theta)$.

Attention ! La convolution $T*U$ des distributions T et U n'est pas toujours définie. Pour calculer $< T*U,\, \varphi >$, on suit l'algorithme suivant :

(i) définir une nouvelle fonction $\varphi_\theta \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ par la relation $\varphi_\theta(t) = \varphi(t+\theta)$

(ii) faire agir U sur cette fonction : $\psi(\theta) =< U,\, \varphi_\theta >$

(iii) si la fonction ψ appartient à l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ (ce qui n'est pas toujours vrai !) alors il suffit de faire agir T sur la fonction ψ et $< T*U,\, \varphi >=< T,\, \psi >$. Si la fonction ψ n'appartient pas à l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, le processus s'arrête et le produit de convolution $T*U$ n'est pas défini.

- La masse de Dirac est un élément neutre pour la convolution

Si $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$, les produits de convolution $T*\delta$ et $\delta*T$ sont bien définis et on a $T*\delta = \delta*T = T$.