Conservatoire National des Arts et Métiers
Département d'Ingénierie Mathématique
Cours de Méthodes Mathématiques pour le Traitement du Signal

Examen du 08 avril 2014 (3 heures)

Les notes de cours manuscrites ou transmises via le site internet du cours sont autorisées, à l'exclusion de tout autre document. Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la précision des explications fournies. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1) Intégrale double

Soit D le domaine du plan défini par
$D = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2,\, x \geq 0,\, y \geq 0,\, x^2 + y^2 \geq 1\}$. On pose $f(x,\, y) = \frac{x\, y}{(x^2+y^2)^\alpha}$. On cherche à déterminer les valeurs du paramètre α pour lesquelles l'intégrale double $I = \iint_D f(x,\, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ est un nombre réel puis à calculer cette intégrale.
a) Dessiner le domaine D.
b) On passe en coordonnées polaires et on pose $x = r\, \cos\theta$, $y = r\, \sin\theta$ avec $r \geq 0$. Montrer que, pour tout $(x, y) \in D$, on a $\mid f(x, y) \mid \leq g(r, \theta) \equiv r^{2-2\,\alpha}$.
c) Après avoir remarqué que la fonction g est positive, établir pour quelles valeurs du paramètre α l'intégrale $\iint_{r\geq 1,\, 0\leq\theta\leq\pi/2} g(r, \theta)\, r\mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta$ obtenue après passage en coordonnées polaires est bien un nombre réel.
d) Dans le cas où $\iint_{r\geq 1,\, 0\leq\theta\leq\pi/2} g(r, \theta)\, r\mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta$ est un nombre réel, calculer l'intégrale I en fonction de α.

Exercice 2) Equation différentielle ordinaire

Avec la méthode de votre choix, calculer les valeurs $y(t)$ (pour $t > 0$) de la solution de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y(t) = t^2$ avec la condition initiale $y(0) = 0$.

Exercice 3) Dérivation au sens des distributions

Soit $f(t)$ la fonction définie par $f(t) = 0$ si $t \leq 0$, $f(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}$ si $0 < t < 1$ et $f(t) = \frac{1}{6}$ si $t \geq 1$.
a) Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa fonction dérivée $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On regardera en particulier le cas des points $t = 0$ et $t = 1$.

b) Montrer que $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sauf pour $t = 0$ et $t = 1$. Calculer la fonction dérivée seconde $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}$ au sens des distributions.
c) Montrer que $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}$ n'est pas une fonction continue en tout point de $\mathbb{R}$. Calculer la dérivée troisième $\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}t^3}$ au sens des distributions.

Exercice 4) Transformation de Fourier
On se donne un réel a strictement positif et la fonction $f(t) = \exp(-a\ |t|)$.
a) Quelle est l'expression de $(\mathcal{F}f)(\omega)$?
b) Démontrer que la fonction $(\mathcal{F}f)(\omega)$ est à la fois paire et réelle.
c) Expliquer pourquoi la fonction $g(\omega) = \frac{1}{a^2+\omega^2}$ appartient à l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.
d) Pour t réel arbitraire, montrer que l'expression $\Phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega)\ \exp(i\,\omega\,t)\,\mathrm{d}\omega$ est bien définie. A l'aide de quel opérateur est-elle reliée à la fonction g ?
e) Calculer une expresion analytique de $\Phi(t)$ pour tout nombre réel t.

Exercice 5) Transformée en z
On désigne par h le signal discret $h = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{4}\delta_a + \frac{1}{8}\delta_{2a} + \frac{1}{8}\delta_{3a} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} h_k\, \delta_{ka}$.
a) Montrer que $\sum_{k=0}^{\infty} \mid h_k \mid = 1$. En déduire que si x est un signal borné, alors le signal $h * x$ est également borné.
b) Le filtre discret T qui à x associe $y \equiv h * x$ est-il stable dans ℓ^∞ ? Est-il causal ?
c) Calculer l'expression de la fonction de transfert $H(z)$ du filtre T, c'est à dire la transformée en z du signal h. Dans quelle région du plan complexe est-elle définie ?