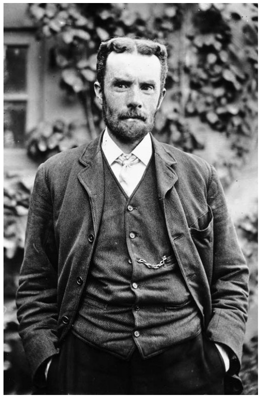
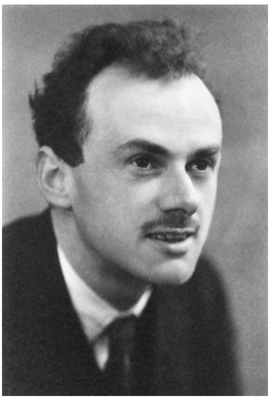
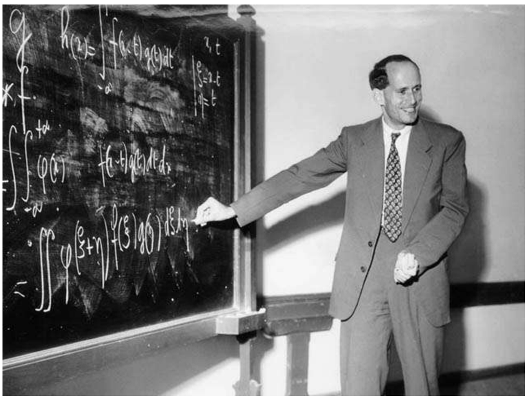


Méthodes Mathématiques pour le Traitement du Signal

François Dubois

Préface de François Roddier





Sur la couverture, les portaits de quatre personnalités qui ont contribué de façon essentielle à la création des méthodes mathématiques pour le traitement du signal : Joseph Fourier (1768–1830) [portrait de Jules Boilly] en haut à gauche, Oliver Heaviside (1850–1925) [portrait de Frances Hodge] en haut à droite, Paul Adrien Maurice Dirac (1902–1984) [fondation Nobel] en bas à gauche, Laurent Schwartz (1915–2002) [photothèque de l'Ecole Polytechnique] en bas à droite. Le graphe au centre de la page illustre l'approximation d'une fonction en dent de scie par une série de Fourier.

Méthodes Mathématiques pour le Traitement du Signal

Méthodes Mathématiques pour le Traitement du Signal

François Dubois

Préface de François Roddier

Préface

Toute science repose sur l'observation du monde réel et nécessite un consensus sur le résultat de ces observations. Ce consensus est obtenu grâce à des mesures quantitatives auxquelles chacun peut agréer en les reproduisant soi-même, d'où l'importance de la mesure en physique.

Souvent désignée sous le nom de signal, la quantité mesurée dépend généralement du temps et du lieu dans l'espace. Elle est alors représentée par une fonction du temps et de l'espace. Il arrive toutefois que cette représentation pose des problèmes. C'est le cas par exemple des évènements extrêmement localisés de sorte que leur étendue dans le temps ou dans l'espace devient négligeable. Des quantités intégrées telles que la masse totale ou l'énergie totale dissipée peuvent mathématiquement s'annuler alors que physiquement elles restent finies.

C'est pour résoudre ce genre de difficultés que le physicien Paul Dirac a introduit pour la première fois la notion de pic de Dirac. Un pic de Dirac représente une quantité nulle partout sauf en un point où elle est infinie, tandis que son intégrale reste finie. La plupart des physiciens se contentent de cette description approximative. On doit au mathématicien français Laurent Schwartz d'avoir étendu la notion de fonction pour y inclure des concepts comme celui de pic de Dirac. Il a donné à ces nouveaux objets le nom de distribution.

Ces notions m'avaient autrefois paru suffisamment importantes pour que j'écrive un livre sur ce sujet. On doit remercier François Dubois pour avoir repris ces notions et les avoir mises au goût du jour sous la forme de ce manuel. J'espère que de nombreux physiciens s'en inspireront. On ne soulignera jamais assez leur importance. J'ai vu personnellement des opticiens tester des pièces optiques à l'aide de franges d'interférences sans savoir qu'une simple transformation de Fourier leur permettait de remonter à la surface d'onde.

Il faut aussi remercier François Dubois pour y avoir ajouté la rigueur mathématique apportée par la théorie des distributions de Laurent Schwartz. Trop de physiciens en sous-estiment l'importance. Elle est essentielle pour la clarté de ces notions.

François Roddier
Carqueiranne, 06 mai 2019.

Avant propos

Ce petit livre est issu d'un enseignement de troisième année de Licence au Conservatoire National des Arts et Métiers à Paris, transmis au cours de la période 2012-2019.

Le programme suivi touche à l'analyse fonctionnelle et à l'analyse de Fourier dans une première parie. Les distributions sont introduites dans la seconde partie de l'ouvrage, uniquement dans le cas fondamental des distributions sur la droite réelle. La notion de solution élémentaire est mise en exergue avec le filtrage linéaire. Le traitement du signal discret est abordé en fin d'ouvrage, en se situant dans le cadre des distributions.

Chaque chapitre correspond à une séance de cours de deux heures au total, suivie d'une séance d'exercices de deux heures également. Le résumé de cours est suivi d'énoncés d'exercices qui lui correspondent directement. Les dates entre crochets pour les énoncés d'exercices renvoient à la période où le sujet a été posé pour un contrôle des connaissances.

Merci tout d'abord aux auditeurs qui par leurs questions et leurs remarques ont permis de grandement améliorer cet enseignement.

Merci aux auteurs des magnifiques ouvrages de référence*. Ces notes de cours sont directement inspirées de ces traités. Un merci tout particulier à François Roddier, auteur de l'un de ces livres et créateur de l'optique adaptative. Merci aussi à Madame Claudine Schwartz qui a autorisé l'utilisation d'une des photos de la couverture.

Merci enfin au lecteur, qui fait vivre ce texte !

Paris, le 15 juin 2019.

---

* voir la bibliographie en fin de volume.

Table des matières

-1- Remise en forme

- Fonction exponentielle

Elle est définie dans un premier temps comme une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et satisfait aux conditions $\exp(0) = 1$ et
$\exp(x+y) = \exp(x)\,\exp(y)$ pour tous les nombres réels x et y. De plus, $\exp(x) > 0$ pour tout nombre réel x.
La fonction exponentielle est étendue au corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. En particulier, pour deux nombres complexes z et z' arbitraires : $\exp(z+z') = \exp(z)\,\exp(z')$.

- Trigonométrie

Les formules d'Euler relient l'exponentielle complexe et les fonctions circulaires sinus et cosinus : $\exp(i\,\theta) \equiv \cos(\theta) + i\,\sin(\theta)$. Alors la relation $\exp\big(i\,(\theta+\varphi)\big) = \exp(i\,\theta)\,\exp(i\,\varphi)$ peut se lire sur les fonctions trigonométriques :
$\cos(\theta+\varphi) = \cos(\theta)\,\cos(\varphi) - \sin(\theta)\,\sin(\varphi)$
$\sin(\theta+\varphi) = \sin(\theta)\,\cos(\varphi) + \cos(\theta)\,\sin(\varphi)$.
On a aussi la relation fondamentale $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ pour tout nombre θ.

- Dérivation des fonctions composées

Si $y = f(x)$ définit une première application dérivable de la variable réelle x et $z = g(y)$ une seconde application dérivable, on peut composer ces deux fonctions : $z = g\big(f(x)\big) \equiv \big(g_\circ f\big)(x)$. Alors la fonction composée $g_\circ f$ est dérivable et $(g_\circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big)\,f'(x)$. On écrit en pratique cette relation sous la forme $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

- Dérivée de la fonction exponentielle

On admet que la fonction exponentielle est dérivable et qu'on a en particulier $\exp'(0) = 1$. On peut alors établir une relation fondamentale $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\exp(x)\big) = \exp(x)$: la fonction exponentielle est sa propre dérivée.

- Dérivée des fonctions circulaires

Par composition des dérivées, on a aussi $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\exp(ax)\big) = a\exp(ax)$. Si on applique ce résultat avec $a = i$, on en déduit les dérivées des fonctions circulaires : $\cos'(x) = -\sin(x)$ et $\sin'(x) = \cos(x)$.

- Dérivation de la fonction réciproque

On se donne une fonction $y = f(x)$ définie sur un intervalle. On suppose f bijective : pour tout y, il existe un unique x de sorte que $f(x) = y$. L'application qui à y associe cet unique x est appelée fonction réciproque de f ; elle est notée $x = \big(f^{-1}\big)(y)$. On suppose de plus la fonction f dérivable, avec $f'(x)$ qui ne s'annule jamais. Alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable et on a
$\big(f^{-1}\big)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1})(y)} = \frac{1}{f'(x)}$. On écrit aussi cette relation sous la forme : $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$.
La fonction réciproque de la fonction exponentielle s'appelle le logarithme. Nous le notons log. On a alors $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\log(x)\big) = \frac{1}{x}$ si x est un nombre réel strictement positif.

- Théorème fondamental de l'Analyse

On se donne une fonction f continue sur $\mathbb{R}$. Alors la fonction qui, à tout nombre réel x, associe l'intégrale $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable et on a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\big) = f(x)$.
On déduit de cette relation le calcul de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une primitive F de f. Avec $F' \equiv f$, on a
$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$. En particulier, $\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$.

- Intégration par parties

On utilise la relation précédente avec $f(x) \equiv u(x)\,v(x)$. La règle de Leiniz de dérivation d'un produit s'écrit
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(u(x)\,v(x)\big) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,v(x) + u(x)\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$.
On en déduit la formule d'intégration par parties :
$\int_a^b \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,v(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b u(x)\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a)$.

- Une propriété des intervalles.

On se donne un intervalle I non vide de $\mathbb{R}$. Typiquement, $I =]a, b[$ avec $a < b$ et éventuellement $a = -\infty$ ou $b = +\infty$. On considère une fonction f définie sur I et dérivable en tout point de l'intervalle I. On suppose de plus que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$. Alors la fonction f est constante : $\exists C \in \mathbb{R}, \ \forall x \in I, \ f(x) = C$.
On note que si f est définie sur un ensemble plus compliqué qu'un intervalle, comme par exemple la réunion de deux intervalles disjoints, alors l'annulation de la dérivée de f en tout point n'entraîne pas le fait que la fonction f est une constante ; elle est simplement constante dans chaque intervalle qui compose l'ensemble où elle est définie.

- Intégrales impropres classiques

On se donne un nombre réel α. L'intégrale impropre $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ peut être définie comme la limite de l'intégrale $\int_1^A \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ si A tend vers l'infini si et seulement si $\alpha > 1$. On dit dans ce cas que l'intégrale impropre converge et on a $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$. Si $\alpha \leq 1$, la limite de $\int_1^A \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ vaut $+\infty$ si A tend vers l'infini et on dit que l'intégrale impropre diverge.
De façon analogue, l'intégrale impropre $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ peut être définie comme la limite de l'intégrale $\int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ si ε tend vers zéro. Cette limite existe et est un nombre réel si et seulement si $\alpha < 1$ et dans ce cas, l'intégrale converge et $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$. Dans le cas $\alpha \geq 1$, $\int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ tend vers $+\infty$ si le paramètre ε tend vers zéro et l'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ diverge.

- Equation différentielle linéaire homogène

On se donne deux nombres réels a et u_0. On cherche une fonction u définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle qu'on a d'une part l'équation d'évolution $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + a\,u(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et d'autre part la condition initiale $u(0) = u_0$. Alors la fonction u existe, est unique et est donnée par l'expression $u(t) = \exp(-a\,t)\,u_0$.

• Formule de Duhamel

Toutes choses égales par ailleurs, on se donne aussi une fonction f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose maintenant que la fonction u satisfait une équation d'évolution avec une source égale à la fonction f : $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + a\,u(t) = f(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors la fonction u existe, est unique et peut se calculer avec la formule de Duhamel : $u(t) = \exp(-at)\,u_0 + \int_0^t \exp\big(-a(t-\theta)\big)\,f(\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

Exercices

• Exponentielle

A partir de la relation générale $\exp(x+y) = (\exp x)\,(\exp y)$, montrer qu'on a $\exp(0) = 1$ et $\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$.

• Trigonométrie

Etablir les relations suivantes

a) $\sin p + \sin q = \ 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$,

b) $\sin p - \sin q = \ 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$,

c) $\cos p + \cos q = \ 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$,

d) $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$.

• Logarithme

A partir de la dérivée d'une fonction réciproque, montrer que l'on a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log x = \frac{1}{x}$.

• Fonction réciproque de la fonction cosinus

Montrer la relation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{Arccos}\,x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

• Intégration par parties

On désigne par k un entier supérieur ou égal à 1. Etablir les relations $\int_0^1 \theta\cos\big(2k\pi\,\theta\big)\mathrm{d}\theta = 0$ et $\int_0^1 \theta\sin\big(2k\pi\,\theta\big)\mathrm{d}\theta = -\frac{1}{2k\pi}$.

• Changement de variables dans une intégrale

Montrer qu'on a les égalités suivantes
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \, \cos t \, \mathrm{d}t \, = \, \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{y} \, \mathrm{d}y = \int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x \, = \, \frac{1}{3} \, .$

• Intégrale généralisée

Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ est convergente et que le nombre qu'elle représente est égal à π.

• Formule de Taylor avec reste intégral

On se donne une fonction deux fois dérivable $\varphi\colon\, [0,\, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$.

a) Montrer à l'aide d'une intégration par parties qu'on a la relation
$\varphi(1) - \varphi(0) \, = \, \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t) \, \varphi''(t) \, \mathrm{d}t.$

b) Montrer à l'aide d'une nouvelle intégration par parties à partir de la relation de la question a) que l'on a
$\varphi(1) - \varphi(0) \, = \, \varphi'(0) + \frac{1}{2} \, \varphi''(0) \, + \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t)^2 \, \varphi'''(t) \, \mathrm{d}t \, .$

On se donne maintenant deux réels $a < b$ et une fonction trois fois dérivable $f \, : \, [a,\, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On pose $h \equiv b - a$ et pour $0 \leq t \leq 1$, $\varphi(t) = f(a + t\, h)$.

c) Calculer $\varphi'(t)$, $\varphi''(t)$ et $\varphi'''(t)$ en fonction de la fonction f et de ses dérivées.

d) Que valent en particulier $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$?

e) Etablir une formule de Taylor pour f avec reste intégral :
$f(b) \, = \, f(a) + f'(a) \, h + \frac{1}{2} f''(a) \, h^2 \, + \, \frac{h^3}{2} R(a, b\, ;\, f).$

f) Donner une expression exacte du terme $R(a, b\, ;\, f)$ présent dans le "reste" de la relation établie à la question e) en fonction de la dérivée troisième de la fonction f.

• Equation différentielle

On désigne par a un nombre réel. Montrer que l'équation d'évolution $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + a\, u(t) \, = \, 0$ jointe à la condition initiale $u(0) \, = \, u_0$ entraîne que l'on a nécessairement $u(t) \, = \, \exp(-at) \, u_0$ pour tout réel t.

• Equations différentielles

a) Calculer la solution $u(t)$ de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u(t) = t$ qui satisfait à la condition initiale $u(0) = 1$.

b) Reprendre la question a) si on change le second membre de l'équation différentielle : la fonction $v(t)$ est maintenant solution de $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v(t) = \exp(-t)$ associée à la même condition initiale $v(0) = 1$.

• Equation différentielle ordinaire [novembre 2012]

Calculer (pour $t > 0$) les valeurs $y(t)$ de la solution de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{y(t)}{2} = t$ avec la condition initiale $y(0) = 1$.

• Equations différentielles [février 2013]

Dans tout l'exercice, on désigne par τ une constante réelle strictement positive.

a) Montrer que si la fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est telle que $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\varphi(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors il existe une constante C telle que $\varphi(t) = C \exp\big(-\frac{t}{\tau}\big)$.

b) En déduire que si la fonction φ est solution de l'équation différentielle introduite à la question a), avec la condition initiale $\varphi(0) = 0$, alors elle est nulle.

c) Proposer une expression pour la solution $\psi(t)$ de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\psi(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, avec la condition initiale $\psi(0) = 0$.

d) On désigne par H la fonction de Heaviside : $H(t) = 1$ si $t > 0$ et $H(t) = 0$ si $t \leq 0$. Quelle est la solution de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}f(t) = H(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, avec la condition initiale $f(0) = 0$? On pourra utiliser les questions précédentes ou bien la formule de Duhamel.

• Equations différentielles [avril 2013]

Dans tout l'exercice, on désigne par a une constante réelle strictement positive.

a) Montrer que si la fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est telle que

$\frac{d\varphi}{dt} - a\,\varphi(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, alors il existe une constante C telle que $\varphi(t) = C \exp(at)$.

b) En déduire si la fonction φ est solution de l'équation introduite en a) avec la condition initiale $\varphi(0) = 0$, alors elle est nulle.

c) Proposer une expression pour la solution $\psi(t)$ de l'équation différentielle $\frac{d\psi}{dt} - a\,\psi(t) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, avec la condition initiale $\psi(0) = 0$.

On désigne par H la fonction de Heaviside : $H(t) = 1$ si $t > 0$ et $H(t) = 0$ si $t \leq 0$.

d) Quelle est la solution de l'équation différentielle $\frac{df}{dt} - a\,f(t) = t\,H(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, avec la condition initiale $f(0) = 0$? On pourra utiliser les questions précédentes ou bien la formule de Duhamel.

- Equation différentielle [février 2014]

a) Calculer la fonction solution φ_1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ solution de l'équation différentielle $\frac{d\varphi_1}{dt} + \varphi_1(t) = 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et de la condition initiale $\varphi_1(0) = 1$.

b) Calculer la fonction solution φ_2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ solution de l'équation différentielle avec le second membre $\frac{d\varphi_2}{dt} + \varphi_2(t) = \sin t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et avec la même condition initiale $\varphi_2(0) = 1$.

c) On désigne par H la fonction de Heaviside : $H(t) = 1$ si $t > 0$ et $H(t) = 0$ si $t \leq 0$. Proposer une expression $\varphi_3(t)$ pour la solution de l'équation différentielle $\frac{d\varphi_3}{dt} + \varphi_3(t) = H(t)\sin t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ avec toujours la même condition initiale : $\varphi_3(0) = 1$.

- Equation différentielle [février 2015]

a) Calculer les valeurs $u_1(t)$ de la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ solution de l'équation différentielle $\frac{d^2u_1}{dt^2} + u_1(t) = 0$ pour tout nombre réel t et satisfaisant aux conditions initiales $u_1(0) = 0$ et $\frac{du_1}{dt}(0) = 1$.

b) Même question avec u_2 solution de l'équation différentielle $\frac{d^2u_2}{dt^2} + u_2(t) = 1$ associée aux conditions initiales de la question a).

On pourra remarquer que l'équation proposée à cette question admet une solution particulière constante.

c) Montrer que la fonction u_3 définie par $u_3(t) = u_1(t)$ si t est strictement négatif et par $u_3(t) = u_2(t)$ si t est positif ou nul, est solution d'une équation différentielle que l'on précisera.

d) La fonction u_3 est-elle continue ?

e) Est-elle dérivable au point $t = 0$?

- Equation différentielle [avril 2015]

On se propose de déterminer la solution $y(t)$ de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2y(t) = t^2$ avec la condition initiale $y(0) = 1$.

a) Quelle est l'expression de la solution générale de l'équation précédente sans second membre ?

b) Chercher une solution particulière de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2y(t) = t^2$ sous la forme d'une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à deux.

c) Proposer une solution analytique de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2y(t) = t^2$ avec la condition initiale $y(0) = 1$.

d) Vérifier que la relation proposée à la question précédente est effectivement solution du problème posé à la question c).

- Equation différentielle [février 2016]

a) Calculer la solution $u(t)$ de l'équation différentielle homogène $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u(t) = 0$ avec la condition initiale $u(0) = 1$.

b) Même question pour l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + u_1(t) = 1$ avec la condition initiale $u_1(0) = 1$.

c) On se donne la fonction de Heaviside H. Reprendre la même question pour l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} + u_2(t) = H(t)$, avec la condition initiale $u_2(0) = 1$.

d) Même question pour l'équation $\frac{\mathrm{d}u_3}{\mathrm{d}t} + u_3(t) = 1 - H(t)$, tout en conservant avec la condition initiale $u_3(0) = 1$.

-2- Séries de Fourier

- Polynôme trigonométrique

Dans tout ce chapitre, on se fixe la période $T > 0$ du phénomène à étudier. On se donne aussi un entier $N \geq 1$, une famille de $2N+1$ réels (ou de complexes) α_k pour $0 \leq k \leq N$ et β_k pour $1 \leq k \leq N$. Un polynome trigonométrique est une fonction g périodique et de période T de la forme
$g(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{N} \left(\alpha_k \cos\left(\frac{2k\pi}{T} t\right) + \beta_k \sin\left(\frac{2k\pi}{T} t\right)\right)$.

- Calcul des coefficients

On a $\alpha_0 = \frac{1}{T} \int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t$ et si $k \geq 1$, $\alpha_k = \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \cos(kt)\,\mathrm{d}t$ et $\beta_k = \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \sin(kt)\,\mathrm{d}t$.
Ce calcul, assez long, demande l'évaluation des intégrales
$I_{k\ell}^{\mathrm{cc}} \equiv \int_0^T \cos\left(\frac{2k\pi}{T} t\right) \cos\left(\frac{2\ell\pi}{T} t\right) \mathrm{d}t$, $I_{k\ell}^{\mathrm{sc}} \equiv \int_0^T \sin\left(\frac{2k\pi}{T} t\right) \cos\left(\frac{2\ell\pi}{T} t\right) \mathrm{d}t$ et $I_{k\ell}^{\mathrm{ss}} \equiv \int_0^T \sin\left(\frac{2k\pi}{T} t\right) \sin\left(\frac{2\ell\pi}{T} t\right) \mathrm{d}t$. On a $I_{k\ell}^{\mathrm{cc}} = I_{k\ell}^{\mathrm{sc}} = I_{k\ell}^{\mathrm{ss}} = 0$ si $k \neq \ell$. De plus, on a $I_{kk}^{\mathrm{cc}} = I_{kk}^{\mathrm{ss}} = \frac{T}{2}$ et $I_{kk}^{\mathrm{sc}} = 0$ si $k \geq 1$.
Notons que, dans les expressions précédentes, on peut remplacer toutes les intégrales entre 0 et T par des intégrales entre $-\frac{T}{2}$ et $\frac{T}{2}$ puisque la fonction g est périodique de période T.

- Parité

Un polynôme trigonométrique pair n'a que des termes en cosinus et un polynôme trigonométrique impair n'a que des termes en sinus. Le polynôme trigonométrique $g(t)$ est une fonction paire [respectivement impaire] de la variable t si et seulement si $\beta_k = 0$ [respectivement $\alpha_k = 0$] pour tout k.

• Ecriture complexe d'un polynôme trigonométrique

On introduit une notation spécifique pour l'exponentielle complexe : $\mathrm{e}_k(t) \equiv \exp\left(\frac{2ik\pi}{T}\,t\right)$. Un polynôme trigonométrique g peut aussi s'écrire $g(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k\, \mathrm{e}_k(t)$.

On a les relations suivantes entre les coefficients : $a_0 = \alpha_0$ et si $k \geq 1$, $a_k = \frac{1}{2}(\alpha_k - i\,\beta_k)$, $a_{-k} = \frac{1}{2}(\alpha_k + i\,\beta_k)$. Les coefficients a_k pour k entier tel que $-N \leq k \leq N$ s'obtiennent *via* la relation $a_k = \frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,\exp(-ikt)\,\mathrm{d}t$.

• Coefficients de Fourier d'une fonction périodique

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, périodique de période T : $f(t+T) = f(t)$ pour tout nombre réel t. Les coefficients $\alpha_k(f)$ et $\beta_k(f)$, introduits par le mathématicien Joseph Fourier (1768–1830), sont définis par $\alpha_0(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$ et si $k \geq 1$, $\alpha_k(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\cos\left(\frac{2k\pi}{T}\,t\right)\big)\,\mathrm{d}t$ et $\beta_k(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,\sin\left(\frac{2k\pi}{T}\,t\right)\big)\,\mathrm{d}t$.

• Série de Fourier d'une fonction périodique

Avec les hypothèses précédentes, on se donne un entier $N \geq 1$. On définit la somme partielle de la série de Fourier de f grâce au polynôme trigonométrique $g_N(t) = \alpha_0(f) + \sum_{k=1}^{N}\left(\alpha_k(f)\,\cos\left(\frac{2k\pi}{T}\,t\right) + \beta_k(f)\,\sin\left(\frac{2k\pi}{T}\,t\right)\right)$.

• Fonctions périodiques de carré intégrable sur leur période

On se donne un nombre réel T strictement positif. Une fonction f périodique et de période T est dite de carré intégrable si et seulement si l'intégrale $\int_0^T |f(t)|^2\,\mathrm{d}t$ est finie. On note alors $f \in \mathrm{L}^2(0,T)$.

• Espace des fonctions de carré intégrable

L'espace $\mathrm{L}^2(0,T)$ des fonctions de carré intégrable est un espace vectoriel. La somme de deux fonctions de carré intégrable est de carré intégrable et le produit d'une fonction de carré intégrable par un scalaire est encore de carré intégrable : si f et g appartiennent à $\mathrm{L}^2(0,T)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors $(f+g) \in \mathrm{L}^2(0,T)$ et $\lambda\, f \in \mathrm{L}^2(0,T)$.

- Produit scalaire

Si f et g appartiennent à $\mathrm{L}^2(0, T)$, le nombre complexe $\int_0^T f(t)\,\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$ est toujours bien défini et on pose $(f\,,g) = \int_0^T f(t)\,\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t\,.$

On remarque que la base des exponentielles complexes définit une famille orthogonale : $(\mathrm{e}_k\,, \mathrm{e}_\ell) = 0$ si $k \neq \ell$. De plus, $(\mathrm{e}_k\,, \mathrm{e}_k) = T$.

- Quelques propriétés du produit scalaire

Pour f, g, h appartenant à $\mathrm{L}^2(0, T)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a
$(f+g\,,h) = (f\,,h) + (g\,,h)$, $(f\,,g+h) = (f\,,g) + (f\,,h)$,
$(\lambda\, f\,,g) = \lambda\,(f\,,g)$, $(f\,,\lambda\, g) = \overline{\lambda}\,(f\,,g)$, $(g\,,f) = \overline{(f\,,g)}$. De plus, $(f\,,f) \geq 0$ et si $(f\,,f) = 0$, alors la fonction f est (essentiellement) nulle.

- Norme

Pour $f \in \mathrm{L}^2(0, T)$, on pose $\| f \| = \sqrt{(f\,,f)} = \sqrt{\int_0^T |f(t)|^2\,\mathrm{d}t}$. L'application de $\mathrm{L}^2(0, T)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par
$\mathrm{L}^2(0, T) \ni f \longmapsto \| f \| \in \mathbb{R}$ est une norme sur l'espace $\mathrm{L}^2(0, T)$. La norme est positive : $\| f \| \geq 0$. Si $\| f \| = 0$, alors $f = 0$. Si λ est un nombre complexe et si $f \in \mathrm{L}^2(0, T)$, alors $\| \lambda\, f \| = |\lambda|\; \| f \|$. Enfin, pour f et g dans l'espace $\mathrm{L}^2(0, T)$, on a l'inégalité triangulaire $\| f+g \| \leq \| f \| + \| g \|$.

- Inégalité de Cauchy-Schwarz

Pour f et g dans l'espace $\mathrm{L}^2(0, T)$, on a $|(f\,,g)| \leq \| f \|\, \| g \|$. De plus, si on est dans le cas d'égalité, c'est à dire si
$|(f\,,g)| = \| f \|\, \| g \|$, alors les deux fonctions f et g sont proportionnelles : il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ de sorte que pour tout $t \in [0, T]$, on a
$f(t) = \lambda\, g(t)$.

- Théorème de Pythagore

Si $(f\,,g) = 0$, alors $\| f+g \|^2 = \| f \|^2 + \| g \|^2$.

• Sous-espace des polynômes trigonométriques

Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 0. On note E_N le sous-espace de $\mathrm{L}^2(0,T)$ des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à N. Une fonction $g_N(t)$ qui appartient à E_N s'écrit de façon unique sous la forme
$g_N(t) = \sum_{k=-N}^{k=N} a_k\, \mathrm{e}_k(t) = \sum_{k=-N}^{k=N} a_k \exp\left(\frac{2ik\pi t}{T}\right)$, où les coefficients a_k ($-N \leq k \leq N$) forment une famille de $(2N+1)$ nombres complexes indépendants.

• Projecteur sur les polynômes trigonométriques

Si $f \in \mathrm{L}^2(0,T)$, il existe un unique polynôme trigonométrique $S_N(f) \in E_N$ de sorte que pour tout $g \in E_N$, $(f - S_N(f)\,,g) = 0$. On a $S_N(f) = \sum_{k=-N}^{k=N} a_k(f)\, \mathrm{e}_k$ où les nombres $a_k(f)$ sont les coefficients de Fourier de la fonction f :
$a_k(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) \exp\left(-\frac{2ik\pi t}{T}\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{T}(f\,,\mathrm{e}_k)$.
On remarque que les coefficients de Fourier $a_k(f)$ ne dépendent pas de l'indice N de l'espace E_N.

• Inégalité de Bessel-Parseval

Pour $f \in \mathrm{L}^2(0,T)$ et $S_N(f) \in E_N$ défini au point précédent, on a l'inégalité $\| S_N(f) \| \leq \| f \|$, c'est à dire $\sum_{|k|\leq N} |a_k|^2 \leq \frac{1}{T}\int_0^T |f|^2\, \mathrm{d}t$.
La série de terme général $|a_k|^2$ (indexée par $k \in \mathbb{Z}$) converge et on a en passant à la limite dans l'inégalité précédente :
$\sum_{|k|\in\mathbb{Z}} |a_k|^2 \leq \frac{1}{T}\int_0^T |f|^2\, \mathrm{d}t$.

• Théorème de Parseval

Soit $T > 0$ et $f \in \mathrm{L}^2(0,T)$. La suite de fonctions $S_N(f)$ converge vers f dans l'espace $\mathrm{L}^2(0,T)$: $\| S_N(f) - f \|$ tend vers 0 si l'entier N tend vers l'infini. On peut alors écrire : $f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(f)\, \mathrm{e}_k$ qui signifie que la norme de la différence $\left(f - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(f)\, \mathrm{e}_k\right)$ est nulle. En pratique, on peut écrire, pour toute fonction $g \in \mathrm{L}^2(0,T)$, l'égalité des produits scalaires : $(f\,,g) = (\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(f)\, \mathrm{e}_k\,,g)$.

En particulier, les deux fonctions f et $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(f)\,\mathrm{e}_k$ ont même norme et on a l'égalité de Bessel-Parseval : $\sum_{|k|\in\mathbb{Z}} |a_k|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |f|^2\,\mathrm{d}t$. Dans le cas où on utilise la base réelle de $\mathrm{L}^2(0,T)$ des fonctions sinus et cosinus et les coefficients $\alpha_k(f)$ et $\beta_k(f)$ introduits plus hauts, l'égalité de Bessel-Parseval prend la forme
$|\alpha_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\big(|\alpha_k(f)|^2 + |\beta_k(f)|^2\big) = \frac{1}{T}\int_0^T |f|^2\,\mathrm{d}t$.

Exercices

- Coefficients de Fourier

Soit g un polynome trigonométrique de la forme
$g(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{N}\left[\alpha_k \cos\left(2k\pi\frac{t}{T}\right) + \beta_k \sin\left(2k\pi\frac{t}{T}\right)\right]$. Montrer que le coefficient de Fourier β_k est donné par la relation
$\beta_k = \frac{2}{T}\int_0^T g(t)\,\sin\left(2k\pi\frac{t}{T}\right)\mathrm{d}t$.

- Dent de scie pour une série classique

On se donne $T > 0$. La “dent de scie” est une fonction f périodique de période T, discontinue pour les valeurs de la forme kT avec k entier, affine sur l'intervalle $]0, T[$ où l'on a $f(t) = \frac{t}{T}$.

a) Dessiner le graphe de la fonction f.

b) Montrer que le développement en série de Fourier de f s'exprime sous la forme $f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\sin\left(2k\pi\frac{t}{T}\right)$.

- Transformée de Fourier de la corde pincée

Soit β un réel non nul.

a) Montrer qu'on a la relation suivante

$$\int_0^1 \theta\,\exp(i\beta\,\theta)\,\mathrm{d}\theta = \left[\frac{1}{\beta^2}(\cos\beta - 1) + \frac{1}{\beta}\sin\beta\right] + i\left[\frac{1}{\beta^2}\sin\beta - \frac{1}{\beta}\cos\beta\right].$$

On se donne α de sorte que $0 < \alpha < 1$. On définit la “corde pincée” comme la fonction c périodique de période 1, continue sur $\mathbb{R}$, affine sur les intervalles $[0, \alpha]$ et $[\alpha, 1]$ de sorte que $c(0) = c(1) = 0$ et $c(\alpha) = 1$.

b) Vérifier que $c(\theta) = \min\left(\frac{\theta}{\alpha}, \frac{1-\theta}{1-\alpha}\right)$.

c) En déduire de la relation proposée en a) que le développement en série de Fourier de la corde pincée est donné par la relation

$$c(\theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\,\alpha\,(1-\alpha)\,\pi^2} \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2} \Big[\big(\cos(2k\pi\alpha) - 1\big)\cos(2k\pi\theta) + \sin(2k\pi\alpha)\sin(2k\pi\theta)\Big].$$

• Théorème de Parseval

On approche un signal f périodique de période T et d'énergie finie, c'est à dire une fonction $f \in \mathrm{L}^2(0, T)$ de carré intégrable, par une série de Fourier à l'aide d'une relation de la forme

$$f(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\alpha_k \cos\left(2\,k\,\pi\frac{t}{T}\right) + \beta_k \sin\left(2\,k\,\pi\frac{t}{T}\right)\right].$$

Montrer qu'on a l'égalité suivante, dite de Parseval :

$$\alpha_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k\geq 1}\left(\alpha_k^2 + \beta_k^2\right) = \frac{1}{T}\int_0^T |\,f\,|^2 \,\mathrm{d}t.$$

• Encore la dent de scie

On se donne un réel positif T. Soit u la fonction périodique de période T définie sur l'intervalle $]0, T[$ par la relation $u(t) = \frac{t}{T}$.

a) Montrer qu'on peut développer u en série de Fourier faisant intervenir essentiellement la fonction sinus.

b) Que peut-on dire de la convergence ponctuelle de la série de Fourier ainsi obtenue ?

c) En utilisant l'égalité de Parseval, établir la somme classique $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

• Convergence d'une série de Fourier

On se donne une suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que la série associée $\sum_{k\in\mathbb{N}} |\,\alpha_k\,|$ converge.

a) Montrer à l'aide du critère de Cauchy que la suite de fonctions $S_N(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right)$ converge uniformément vers une fonction qu'on notera f.

b) En déduire que dans ce cas, la somme f de la série de Fourier est une fonction continue du temps.

- Série de Fourier [novembre 2012]

a) Soit ℓ un nombre entier. Montrer que l'on a
$\int_0^{\pi} \big(\sin t\big) \big(\cos(2\ell+1)t\big)\ \mathrm{d}t = 0.$
On se donne la fonction périodique f de période π égale à $\sin t$ sur l'intervalle $[0, \pi]$.

b) Démontrer que $f(t) = |\sin t\,|$ pour tout réel t.

c) En déduire que f est paire.

d) Déduire des questions précédentes que le développement en série de Fourier de f est de la forme $f(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} \alpha_k \cos(2kt)$.

e) Calculer les coefficients de Fourier α_k introduits à la question précédente.

- Séries de Fourier [février 2014]

On se donne T réel strictement positif, ε tel que $0 < \varepsilon < T$ et a et b deux nombres réels quelconques. On définit une fonction f périodique de période T de la façon suivante : $f(t) = a$ si $0 \leq t < \varepsilon$, $f(t) = b$ si $\varepsilon \leq t < T$.

a) Dessiner le graphe de la fonction f dans le cas particulier où $T = 2$, $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $a = 1$ et $b = -1$.

b) Si $a = b$, que peut-on dire de la fonction f ?

c) Quel est le développement de la fonction f en série de Fourier si $a = b$?

d) Dans le cas général où $a \neq b$, calculer le développement en série de Fourier de la fonction f ; on explicitera les coefficients a_k et b_k de sorte que $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos\big(\frac{2k\pi t}{T}\big) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\big(\frac{2k\pi t}{T}\big)$.

e) Que valent les coefficients a_k et b_k si $a = b$?

f) Pouvait-on prévoir le résultat ?

- Série de Fourier [novembre 2014]

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(t) = |\cos t\,|$.

a) Montrer que f est périodique et que $f(t+\pi) = f(t)$ pour tout nombre réel t.

b) Calculer l'intégrale $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t) \mathrm{d}t$.

c) On se donne un entier naturel k supérieur ou égal à 1. Calculer l'intégrale $J_k = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t) \cos\big(2kt\big) \, \mathrm{d}t$.

d) Pourquoi les intégrales $L_k = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(t) \sin\big(2kt\big) \, \mathrm{d}t$ sont-elles nulles pour tout entier k ?

e) Déduire des questions précédentes le développement en série de Fourier de la fonction f.

f) Appliquer le thérorème de Parseval pour calculer exactement la somme $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2 \, (2k-1)^2}$.

- Série de Fourier [avril 2015]

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ périodique et de période 2π définie par $f(t) = |t|$ si $-\pi \leq t \leq \pi$.

a) Dessiner le graphe de la fonction f.

b) La fonction f est-elle paire ?

c) Est-elle impaire ?

d) Est-elle continue comme fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

e) Calculer les intégrales $I = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, \mathrm{d}t$ et $K = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 \, \mathrm{d}t$.

f) Si k désigne un entier différent de zéro, montrer que toutes les intégrales $J_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos\big(2kt\big) \, \mathrm{d}t$ sont nulles.

g) On se donne un entier naturel k supérieur ou égal à 0. Calculer l'intégrale $L_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos\big((2k+1)t\big) \, \mathrm{d}t$.

h) Déduire des questions précédentes le développement en série de Fourier de f.

i) Appliquer le thérorème de Parseval pour calculer exactement la somme de la série $S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$.

- Calcul d'une intégrale et série de Fourier [novembre 2015]

a) Quelle est la valeur de l'intégrale $\int_0^1 4\, \theta \, (1-\theta) \, \mathrm{d}\theta$?

On se donne un entier k non nul.

b) Calculer la dérivée par rapport à la variable θ de la fonction $g_k(\theta) = \big[\frac{2}{ik\pi}\,\theta^2 + \big(\frac{2i}{k\pi} - \frac{2}{k^2\pi^2}\big)\,\theta + \big(\frac{i}{k^3\pi^3} + \frac{1}{k^2\pi^2}\big)\big]\,\exp(-2\,i\,k\,\pi\,\theta)$.

c) En déduire que l'on a $\int_0^1 4\,\theta\,(1-\theta)\,\exp(-2\,i\,k\,\pi\,\theta)\,\mathrm{d}\theta = -\frac{2}{k^2\pi^2}$ si l'entier k est différent de zéro.

On se donne un nombre T stritement positif et on note f la fonction périodique de période T telle que $f(t) = 4\,\frac{t\,(T-t)}{T^2}$ si $0 \leq t \leq T$.

d) Dessiner le graphe de la fonction f.

e) La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

f) Pour k entier positif, négatif ou nul, calculer le coefficient de Fourier $a_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\exp(-2\,i\,k\,\pi\,t/T)\,\mathrm{d}t$ de la fonction f.

g) A l'aide du calcul précédent et de l'égalité de Bessel-Parseval, montrer que l'on a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

- Série de Fourier [novembre 2016]

On considère la fonction périodique f de période $2\,\pi$, paire, qui satisfait à la relation $f(x) = x$ si $x \in [0,\,\pi]$.

a) Dessiner le graphe de la fonction $y = f(x)$.

b) Déterminer la série de Fourier trigonométrique $S(f)$ de la fonction f et montrer que $S(f)(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{\ell \geq 0} \frac{1}{(2\,\ell+1)^2}\cos\big((2\,\ell+1)\,x\big)$.

c) Déduire de ce qui précède la somme $S = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\,\ell+1)^2}$.

d) En déduire un calcul de la somme $\Sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

e) A l'aide de la relation de Bessel-Parseval, montrer que l'on a $\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(2\,\ell+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$.

-3- Espaces de fonctions

- Signaux analogiques et signaux numériques

Un signal analogique modélise le temps par un continuum. Si on se donne un intervalle I de $\mathbb{R}$, un signal analogique est une fonction f définie sur I et à valeurs réelles ou complexes.
Un signal numérique considère le temps comme discret, multiple entier d'un pas de temps de référence $\Delta t > 0$. Un signal numérique peut se réduire à une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n \in \mathbb{R}$ ou $u_n \in \mathbb{C}$.

- Signaux bornés

Un signal borné a des valeurs qui ne peuvent pas sortir d'un intervalle donné. Il existe $M \geq 0$ tel que, pour un signal analogique,
$|f(t)| \leq M$ pour tout $t \in I$ et pour un signal numérique, $|u_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Les signaux $t \longmapsto \sin(\omega t)$ et $t \longmapsto \cos(\omega t)$ sont bornés sur $\mathbb{R}$. Les signaux $t \longmapsto \exp(t)$ et $t \longmapsto \log(t)$ sont non bornés sur $\mathbb{R}$ et $]0, +\infty[$ respectivement.

- Espaces $\mathrm{L}^\infty(I)$ et $\ell^\infty(\mathbb{N})$ des signaux bornés

On regroupe tous les signaux bornés sur un intervalle I dans l'espace $\mathrm{L}^\infty(I)$ défini par
$\mathrm{L}^\infty(I) \equiv \{f : I \longrightarrow \mathbb{R}\,(\mathrm{ou}\,\mathbb{C}),\, \exists M \geq 0, \forall t \in I, |f(t)| \leq M\}$ et l'ensemble des signaux numériques bornés dans l'espace
$\ell^\infty(\mathbb{N}) \equiv \{\text{suites } u_n\,, \exists M \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M\}$.

- Les ensembles $\mathrm{L}^\infty(I)$ et $\ell^\infty(\mathbb{N})$ sont des espaces vectoriels

La somme $f+g$ de deux fonctions de $\mathrm{L}^\infty(I)$ appartient encore à $\mathrm{L}^\infty(I)$. Le produit λf du nombre λ par la fonction $f \in \mathrm{L}^\infty(I)$ appartient encore à $\mathrm{L}^\infty(I)$. De même, la somme $u+v$ de deux suites de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ appartient à $\ell^\infty(\mathbb{N})$ et le produit $\lambda\, u$ du nombre λ par la suite $u \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ appartient à $\ell^\infty(\mathbb{N})$.

- Signaux intégrables

On peut faire “la somme” des valeurs prises par un signal intégrable. Dans le cas analogique, l’intégrale $\int_I |f(t)| \mathrm{d}t$ est “convergente”, ou finie ; c’est un nombre réel. On écrit $\int_I |f(t)| \mathrm{d}t < \infty$ pour exprimer cette propriété. Notons aussi que si $f(t)$ est un nombre complexe, $|f(t)|$ est le module du nombre $f(t)$.
Pour un signal numérique intégrable, la série de terme général u_n est absolument convergente : la somme $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ est finie, ce qu’on exprime *via* l’inégalité stricte $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n| < \infty$: le symbole $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ n’est pas égal à l’infini, donc c’est un nombre positif fini et la série de terme général $|u_n|$ converge.
Par exemple, la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur l’intervalle $]1, +\infty[$ alors que la fonction $t \longmapsto 1$ ne l’est pas. Attention, si on change l’intervalle pour $]0, 1[$, les propriétés s’inversent. En effet, la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t^2}$ n’est pas intégrable sur l’intervalle $]0, 1[$ alors que la fonction $t \longmapsto 1$ l’est.

- Espaces $\mathrm{L}^1(I)$ et $\ell^1(\mathbb{N})$ des signaux intégrables

On suit la même méthodologie que pour les signaux bornés. On pose $\mathrm{L}^1(I) \equiv \{f : I \longrightarrow \mathbb{R}\,(\mathrm{ou}\,\mathbb{C}), \int_I |f(t)| \mathrm{d}t < \infty\}$ et $\ell^1(\mathbb{N}) \equiv \{\text{suites } u_n\,, \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n| < \infty\}$. Ce sont aussi des espaces vectoriels : La somme $f+g$ de deux fonctions intégrables est encore intégrable et la somme $u+v$ de deux séries absolument convergentes est encore absolument convergente. Nous laissons au lecteur le soin de préciser ce qui se passe quand on multiplie un signal intégrable par une constante.

- Une inclusion entre espaces fonctionnels : $\mathrm{L}^\infty(0, T) \subset \mathrm{L}^1(0, T)$

On se donne un réel $T > 0$. Alors toute fonction bornée sur l’intervalle $]0, T[$ est intégrable sur cet intervalle.

Attention, l'hypothese $T < \infty$ est essentielle. Ainsi, les espaces $\mathrm{L}^\infty(0,+\infty)$ et $\mathrm{L}^1(0,+\infty)$ n'ont aucune relation d'inclusion entre eux. Il existe des fonctions bornées qui ne sont pas intégrables à l'infini. De plus, on ne peut même pas affirmer que si une fonction est intégrable sur $]0,+\infty[$, alors elle tend vers zéro à l'infini ou est bornée [exercice !].

• Une autre inclusion entre espaces fonctionnels : $\ell^1(\mathbb{N}) \subset \ell^\infty(\mathbb{N})$
En effet, toute série absolument convergente tend vers zéro à l'infini, donc elle est bornée.

• Signaux et espaces d'énergie finie
Un signal est d'énergie finie si son carré (ou le carré de son module dans le cas d'un signal à valeurs complexes) est lui-même intégrable. L'ensemble de tous les signaux analogiques d'énergie finie sur l'intervalle I est noté $\mathrm{L}^2(I)$ et l'ensemble de tous les signaux numériques d'énergie finie $\ell^2(\mathbb{N})$. On a
$\mathrm{L}^2(I) \equiv \{f : I \longrightarrow \mathbb{R}\,(\mathrm{ou}\,\mathbb{C}), \int_I |f(t)|^2 \mathrm{d}t < \infty\}$ et
$\ell^2(\mathbb{N}) \equiv \{\text{suites } u_n\,, \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^2 < \infty\}$. On dit pour cette raison qu'un signal d'énergie finie est de carré intégrable. Les ensembles de fonctions $\mathrm{L}^2(I)$ et $\ell^2(\mathbb{N})$ sont des espaces vectoriels pour l'addition des fonctions et leur multiplication par une constante.

• Deux doubles inclusions entre espaces fonctionnels
On a d'une part, si T est un paramètre fixé strictement positif,
$\mathrm{L}^\infty(0,T) \subset \mathrm{L}^2(0,T) \subset \mathrm{L}^1(0,T)$ et d'autre part
$\ell^1(\mathbb{N}) \subset \ell^2(\mathbb{N}) \subset \ell^\infty(\mathbb{N})$.

• Signaux analogiques continus
On se donne un point t_0 de l'intervalle non vide et non réduit à un point I. Un signal analogique $f : I \longrightarrow \mathbb{R}\,(\mathrm{ou}\,\mathbb{C})$ est continu en t_0 si et seulement si, une barre d'erreur ε étant donnée de façon arbitraire, on peut toujours trouver un voisinage de t_0 sous la forme d'un intervalle centré $]t_0-\eta, t_0+\eta[$ (avec $\eta > 0$) de sorte que l'erreur

commise sur $f(t)$ si on l'approche par $f(t_0)$ est inférieure à ε lorsque l'argument t est suffisamment proche de t_0. Avec des quntificateurs logiques :
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall t \in I,\ |t - t_0| < \eta \implies |f(t) - f(t_0)| < \varepsilon.$
Lorsque la fonction f est continue en tout point de l'intervalle I, on dit que'elle est continue sur I et on note $f \in \mathscr{C}(I)$.
Toutes les fonctions "usuelles" comme l'exponentielle ou les fonctions circulaires sont continues en tout point où elles sont définies.

- Les fonctions continues sur un intervalle fermé borné $[0, T]$ sont bornées

Avec les notations introduites plus haut, on peut écrire $\mathscr{C}([0, T]) \subset \mathrm{L}^\infty(0, T)$. Il est important de remarquer que l'hypothèse de considérer un intervalle fermé est essentielle pour conclure. Ainsi, la fonction $]0, 1] \ni t \longmapsto \frac{1}{t}$ est continue sur l'intervalle $]0, 1]$ mais elle n'y est pas bornée.

- Fonction de Heaviside

Pour modéliser le comportement du courant électrique dans un interrupteur au début du 20e siècle, l'ingénieur Oliver Heaviside (1850–1925) a introduit une fonction discontinue H telle que $H(t) = 0$ si $t < 0$ et $H(t) = 1$ si $t > 0$. En $t = 0$, on peut compléter cette définition de façon arbitraire. Ce qui importe est que la fonction de Heaviside est (toujours) discontinue en $t = 0$.

- Espace vectoriel normé

Tous les espaces de fonctions vus plus haut entrent dans la catégorie très générale des espaces vectoriels normés. Par définition, un tel espace est la donnée $(E, \|\ \|)$ d'un espace vectoriel E muni d'une norme $\|\ \|$. Pour tout $f \in E$, le nombre $\|f\|$ est bien défini. De plus, on a les quatre propriétés suivantes.
Positivité : $\|f\| \geq 0$ pour tout $f \in E$.
Inégalité triangulaire : $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

Homogénéité : $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$.
Hypothèse de séparation : $\|f\| = 0$ implique $f = 0$.
L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ (respectivement complexes $\mathbb{C}$) est normé avec comme norme associée la valeur absolue (respectivement le module).
Une norme peut être interprétée comme une longueur. Elle permet aussi de définir une distance par $d(f, g) = \|f - g\|$.

- Normes des espaces usuels de fonctions

Les normes dans les espaces $\mathrm{L}^1(I)$, $\ell^1(\mathbb{N})$, $\mathrm{L}^2(I)$ et $\ell^2(\mathbb{N})$ se définissent naturellement : $\|f\|_1 \equiv \int_I |f(t)| \mathrm{d}t$, $\|u\|_1 \equiv \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$,
$\|f\|_2 \equiv \sqrt{\int_I |f(t)|^2 \mathrm{d}t}$ et $\|u\|_2 \equiv \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2}$.
Les normes dans $\mathscr{C}([0, T])$ et $\ell^\infty(\mathbb{N})$ utilisent la borne supérieure : $\|f\|_\infty \equiv \sup_{0 \le t \le T} |f(t)|$ et $\|u\|_\infty \equiv \sup_{n \ge 0} |u_n|$.
La norme dans l'espace $\mathrm{L}^\infty(I)$ est peu plus délicate à définir. On peut considérer dans une première approche que la relation
$\|f\|_\infty \equiv \sup_{0 \le t \le T} |f(t)|$ est essentiellement valable dans $\mathrm{L}^\infty(I)$.
Munis de ces définitions, les sept espaces de fonctions $(\mathrm{L}^\infty(I), \| \|_\infty)$, $(\ell^\infty(\mathbb{N}), \| \|_\infty)$, $(\mathrm{L}^1(I), \| \|_1)$, $(\ell^1(\mathbb{N}), \| \|_1)$, $(\mathrm{L}^2(I), \| \|_2)$, $(\ell^2(\mathbb{N}), \| \|_2)$ et $\mathscr{C}([0, T]), \| \|_\infty)$ sont des espaces vectoriels normés.

- Convergence d'une suite de fonctions dans un espace vectoriel normé

Une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (de fonctions) d'un espace vectoriel normé $(E, \| \|)$ converge vers un point (une fonction, un vecteur) $\varphi \in E$ si et seulement si la suite de nombres positifs $\|\varphi_n - \varphi\|$ tend vers zéro si l'entier n tend vers l'infini.
Exemple. On se donne $T > 0$. La suite de fonctions $\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$ converge vers $\varphi(t) = \exp(t)$ dans l'espace $\mathscr{C}([0, T])$ si n tend vers l'infini.

- Suite de Cauchy (de fonctions) dans un espace vectoriel normé

Une suite de Cauchy est une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont tous les termes sont arbitrairement proches les uns des autres, à condition d'aller assez loin dans la numérotation de la suite :
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p, q \geq N,\ |\varphi_p - \varphi_q| < \varepsilon.$

- Toute suite convergente est de Cauchy

La preuve est un exercice qui utilise simplement la définition de la convergence d'une suite de fonctions.

- Espace complet

Un espace normé est complet par définition si pour toute suite de Cauchy $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$, il existe $\varphi \in E$ telle que la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le vecteur φ si n tend vers l'infini.
De façon plus intuitive, un tel espace "n'a pas de trou". C'est le cas pour l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels et de l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Mais ce n'est pas vrai pour l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.
Dans un espace complet, les suites de Cauchy convergent vers un point de l'espace ; on peut prouver qu'une suite (de fonctions pour fixer les idées) a une limite sans avoir à l'expliciter.
Nous allons voir que la notion naïve de convergence "point par point" ou ponctuelle n'est pas toujours suffisante pour avoir une véritable convergence au sens des espaces de fonctions.

- Convergence ponctuelle

Pour fixer les idées, on se donne un intervalle I de $\mathbb{R}$ et une suite φ_n de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On dit que la suite de fonctions φ_n converge ponctuellement (ou converge simplement) vers la fonction φ de I dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout nombre $t \in I$, la suite numérique $\varphi_n(t)$ converge vers le nombre $\varphi(t)$.
Avec des quantificateurs logiques :
$\forall \varepsilon > 0,\ \forall t \in I,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |\varphi_n(t) - \varphi(t)| < \varepsilon.$

Un exemple très intéressant est le cas où $I = [0, 1]$ et $\varphi_n(t) = t^n$. La limite simple de cette suite de fonctions s'explicite sans difficulté et on trouve la fonction $\varphi(t) = 0$ pour $0 \leq t < 1$ et $\varphi(1) = 1$. Nous constatons avec cet exemple que la limite ponctuelle d'une suite de fonctions continues peut être une fonction discontinue !

- Convergence uniforme

On se donne un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que la suite de fonctions φ_n converge uniformément vers la fonction φ de I dans $\mathbb{R}$ si et seulement si lorsqu'on se donne une marge d'erreur $\varepsilon > 0$, tous les écarts $|\varphi_n(t) - \varphi(t)|$ pour $t \in I$ sont inférieurs à ε dès que l'on est assez loin dans la numérotation de la suite :
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \forall t \in I,\ |\varphi_n(t) - \varphi(t)| < \varepsilon.$
Par rapport à la convergence simple, on a juste déplacé la suite de symboles "$\forall t \in I$" dans la définition sous forme de phrase logique. Ainsi, dans le cas de la convergence ponctuelle, l'entier N de la séquence "$\exists N \in \mathbb{N}$" dépend de l'argument t dans l'intervalle I, alors qu'il n'en dépend pas dans le cas de la convergence uniforme.
La convergence uniforme est essentiellement une autre façon de nommer la convergence dans l'espace $\mathrm{L}^\infty(I)$ ou dans l'espace des fonctions continues.

- La limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue

On se donne un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et une suite de fonctions φ_n continues de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que la suite φ_n converge uniformément vers une fonction φ sur l'intervalle I. Alors la fonction φ est continue de I dans $\mathbb{R}$.

- Théoreme essentiel : les espaces de fonctions présentés ci-dessus sont complets

On se donne un nombre réel $T > 0$. Les sept espaces de fonctions $(\mathrm{L}^\infty(I), \|\ \|_\infty)$, $(\ell^\infty(\mathbb{N}), \|\ \|_\infty)$, $(\mathrm{L}^1(I), \|\ \|_1)$, $(\ell^1(\mathbb{N}), \|\ \|_1)$,

$(\mathrm{L}^2(I), \| \ \|_2)$, $(\ell^2(\mathbb{N}), \| \ \|_2)$ et $\mathscr{C}([0,T]), \| \ \|_\infty)$ sont des espaces vectoriels normés complets.
Ces espaces ont une structure saine du point de vue du passage à la limite, même si c'est parfois au prix d'une définition qui peut ne pas être élémentaire.

Exercices

• Signaux non bornés

a) Démontrer que le signal $t \longmapsto \frac{1}{t}$ est un signal non borné sur l'intervalle $\mathrm{I} =]0,1]$.

b) Même question pour le signal $t \longmapsto \log t$.

• Signaux bornés et d'énergie finie

Soit $T > 0$ un réel stritement positif.

a) Montrer qu'un signal analogique borné sur $[0,T]$ est nécessairement d'énergie finie.

b) Montrer que la question précédente peut se reformuler de la façon suivante : si $f \in \mathrm{L}^\infty(0,T)$, alors $f \in \mathrm{L}^2(0,T)$. En d'autres termes, $\mathrm{L}^\infty(0,T) \subset \mathrm{L}^2(0,T)$.

c) Montrer qu'un signal numérique d'énergie finie $u \in \ell^2(\mathbb{N})$ est nécessairement borné : $\ell^2(\mathbb{N}) \subset \ell^\infty(\mathbb{N})$.

• Fonction "porte"

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. La fonction "porte" $P_{ab}(t)$ est définie par $P_{ab}(t) = 1$ pour $a < t \leq b$ et $P_{ab}(t) = 0$ sinon.
On note H la fonction de Heaviside (ou "créneau") : $H(t) = 1$ pour $t > 0$ et $H(t) = 0$ pour $t \leq 0$.
Montrer qu'on a la relation $P_{ab}(t) = H(t-a) - H(t-b)$ pour tout nombre réel t appartenant à $\mathbb{R}$.

• Un exemple classique

Dans cet exercice, on suppose que α est un réel strictement positif fixé. Pour t non nul, on pose $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$. Pour quelles valeurs de α a-t-on la relation

a) $f \in \mathrm{L}^1(0, 1)$?
b) $f \in \mathrm{L}^2(0, 1)$?
c) $f \in \mathrm{L}^\infty(0, 1)$?
d) $f \in \mathrm{L}^1(1, +\infty)$?
e) $f \in \mathrm{L}^2(1, +\infty)$?
f) $f \in \mathrm{L}^\infty(1, +\infty)$?

• Bosse glissante

Pour k entier naturel et $t \in \mathbb{R}$, on pose $f_k(t) = \frac{1}{1+(t-k)^2}$.

a) Montrer que $f_k(t)$ converge simplement vers la fonction nulle.
b) Montrer aussi que la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite dans l'espace $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$, c'est à dire que la convergence n'est pas uniforme.
c) Si on se donne en revanche un réel $T > 0$, montrer que la suite $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers zéro dans l'espace $\mathrm{L}^\infty(0, T)$.

• Espaces de fonctions [avril 2015]

On rappelle que l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions f intégrables sur $\mathbb{R}$; l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \mid f(t) \mid \mathrm{d}t$ est finie et c'est un nombre réel positif. On pose $f_1(t) = \frac{\sin t}{|t|^{3/2}}$.

a) La fonction f_1 appartient-elle à l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$?
b) Justifier avec soin votre réponse.
c) Mêmes questions avec f_2 définie par la relation $f_2(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.
d) Mêmes questions avec f_3 définie par la relation $f_3(t) = \frac{1}{t^2-1}$.
e) Mêmes questions avec f_4 définie par la relation $f_4(t) = \frac{1-\cos t}{t^2}$.

• Espaces fonctionnels [novembre 2015]

On désigne par I l'intervalle $]1, +\infty[$ et par f la fontion $f(t) = \frac{1}{t}$. Cette fonction appartient-elle

a) à l'espace $L^1(I)$?
b) à l'espace $L^2(I)$?
c) à l'espace $L^\infty(I)$?
d) Reprendre les trois questions précédentes avec la même fonction f et $I =]0,\,1[$.

• Espaces de fonctions [février 2016]

On rappelle que l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions f intégrables sur $\mathbb{R}$, l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ celui des fonctions f de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ et que les fonctions de l'espace $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$ sont bornées. On pose $f_1(t) = \frac{1}{1+t^2}$.
a) La fonction f_1 appartient-elle à l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$?
b) La fonction f_1 appartient-elle à l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$?
c) La fonction f_1 appartient-elle à l'espace $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$?
d) Justifier avec soin votre réponse.
e) Mêmes questions avec f_2 définie par la relation
$f_2(t) = \frac{1}{\sqrt{|t|}\,(1+t^4)}$.
f) Mêmes questions avec f_3 définie par la relation $f_3(t) = \frac{\sin t}{t}$.
On pose $f_4(t) = \frac{1-\cos\, t}{t}$.
g) Cette fonction appartient-elle à l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$?
h) La fonction f_4 appartient-elle à l'espace $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$?

• Espaces de fonctions [février 2017]

On rappelle que l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$, l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ celui des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ et que les fonctions de l'espace $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$ sont bornées. On se donne un nombre réel α et on pose $f_\alpha(t) = \left(\frac{1}{1+t^2}\right)^\alpha$.
a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f_α ?
b) Préciser pour quelles valeurs du paramètre α la fonction f_α appartient à l'espace $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$.

c) Préciser pour quelles valeurs du paramètre α la fonction f_α appartient à l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.
d) Préciser pour quelles valeurs du paramètre α la fonction f_α appartient à l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

- Espaces de fonctions [avril 2017]

On rappelle que l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$, l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ celui des fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}$ et que les fonctions de l'espace $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$ sont bornées. On se donne un nombre réel α et on pose $f_\alpha(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ si $t \geq 1$ et $f_\alpha(t) = 0$ si $t < 1$.
a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f_α ?
b) Préciser pour quelles valeurs du paramètre α la fonction f_α appartient à l'espace $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$.
c) Préciser pour quelles valeurs du paramètre α la fonction f_α appartient à l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.
d) Préciser pour quelles valeurs du paramètre α la fonction f_α appartient à l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$.

-4- Filtrage linéaire

- Circuit électrique “RC”

On se donne une résistance $R > 0$ et une capacité $C > 0$. On les monte en série. On désigne par $u(t)$ la tension d'entrée aux bornes extrêmes du circuit et par $v(t)$ la tension de sortie aux bornes de la capacité. Sachant que l'on branche le circuit à l'instant initial $t = 0$, comment calculer les valeurs du signal $v(t)$ en fonction du signal d'entrée $u(t)$?

On fait appel à ses connaissances d'électricité générale. On peut introduire le courant $i(t)$ dans le circuit. On a alors grâce à la loi d'Ohm $u(t) = R\,i(t) + v(t)$. D'autre part, on peut relier la charge $q(t)$ aux variables précédentes puisque $i(t) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ et $q(t) = C\,v(t)$. On en déduit une relation différentielle qui permet de calculer l'évolution de la tension de sortie $v(t)$ en fonction de la tension d'entrée $u(t)$: $RC\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v(t) = u(t)$. Il ne reste plus qu'à préciser les conditions initiales.

- Signal causal

Un signal analogique $u(t)$ défini comme fonction de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est appelé causal si les valeurs $u(t)$ sont nulles pour $t < 0$.

- Condition initiale pour le circuit “RC”

On suppose que l'on branche le circuit à l'instant initial $t = 0$. Du point de vue du modèle mathématique, on peut supposer la tension d'entrée nulle pour tous les instants t négatifs. En d'autres termes, le signal d'entrée u est causal.

D'autre part, si le signal d'entrée est nul avant le branchement, il est naturel de supposer le signal de sortie nul également pour les $t < 0$. On suppose de plus le signal de sortie v fonction continue du temps. On déduit la condition initiale $v(0) = 0$.

- Système dynamique

La résolution de la dynamique $RC\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v(t) = u(t)$ avec la condition initiale $v(0) = 0$ n'offre alors pas de difficulté. On part de la solution générale de l'équation homogène qui peut s'écrire $v(t) = \varphi \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$. Puis on fait varier la constante $\varphi = \varphi(t)$. On déduit de l'équation d'évolution la relation $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{RC}u(t)\exp\left(\frac{t}{RC}\right)$. De plus $\varphi(0) = 0$ car $v(0) = 0$. Donc $\varphi(t) = \frac{1}{RC}\int_0^t \exp\left(\frac{\theta}{RC}\right)u(\theta)\,\mathrm{d}\theta$ et $v(t) = \frac{1}{RC}\int_0^t \exp\left(\frac{-(t-\theta)}{RC}\right)u(\theta)\,\mathrm{d}\theta$. On a exprimé la sortie du circuit électrique en fonction de l'entrée avec une intégrale.

- Filtre linéaire

Le circuit électrique est un cas particulier de filtre linéaire. Par définiion, un filtre linéaire T est une fonctionnelle qui à un signal d'entrée u associe un signal de sortie $v \equiv T(u)$ [noté aussi $v = Tu$ quand il n'y a pas ambiguité sur la notation] de sorte que la réponse $v = T(u)$ est une fonction linéaire de u. On a donc $T(u+v) = Tu + Tv$ pour tous les signaux d'entrée u et v. De plus, si α est un nombre fixé, on a $T(\alpha u) = \alpha T(u)$.

Remarquer ici qu'un filtre est d'un ordre de grandeur plus complexe qu'une fonction ou un signal. En effet, une fonction f associe à un argument t, qui est en général un nombre, un nouveau nombre $f(t)$. Un filtre T associe à une fonction u ou "signal d'entrée" une nouvelle fonction v ou "signal de sortie". Un filtre est une application (on dit aussi une fonctionnelle) où les éléments de départ et d'arrivée ne sont plus des nombres mais des fonctions !

- Réponse impulsionelle du filtre "RC"

Le circuit électrique "RC" constitue un exemple de filtre linéaire,

appelé parfois “filtre RC”. On introduit la fonction de Heaviside H et la fonction h, appelée réponse impulsionelle du filtre “RC”, définie par la relation $h(t) = \frac{H(t)}{RC} \exp\big(-\frac{t}{RC}\big)$. Compte tenu du fait que l’entrée u et la réponse impulsionnelle h sont toutes deux des fonctions causales, la sortie v du filtre “RC” peut s’écrire
$v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\theta)\, u(\theta)\, \mathrm{d}\theta$.

- Convolution

Si on se donne deux fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, le produit de convolution $f * g$ est une nouvelle fonction définie par la relation $(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta)\, g(t-\theta)\, \mathrm{d}\theta$.
Si on se donne un signal h, l’application $u \longmapsto v = h * u$ définit un filtre linéaire. Un cas particulier important est le filtre “RC” introduit plus haut.

- Commutativité de la convolution

On a $f * g = g * f$ dès que l’un des deux produits est bien défini.

- Une convolution classique

On définit la porte $\chi(t)$ par la relation $\chi(t) = 1$ si $0 < t < 1$ et $\chi(t) = 0$ sinon. C’est une fonction discontinue en $t = 0$ et $t = 1$. Le “carré de convolution” $\chi * \chi$ permet d’expliciter une fonction continue sur $\mathbb{R}$ de type “chapeau chinois”. On a $\chi * \chi(t) = 0$ si $t \leq 0$, $\chi * \chi(t) = t$ si $0 \leq t \leq 1$, $\chi * \chi(t) = 2 - t$ pour $1 \leq t \leq 2$ et $\chi * \chi(t) = 0$ lorsque $t \geq 2$.

- Filtre à entrée bornée et sortie bornée

Un filtre linéaire T est à entrée bornée et sortie bornée si pour tout signal borné ($u \in \mathrm{L}^\infty$), la sortie $v = Tu$ est encore bornée : $v \in \mathrm{L}^\infty$. De plus, le filtre T est stable ; la norme de la sortie est contrôlée par la norme de l’entrée et il existe une constante $C \geq 0$ qui ne dépend pas du signal d’entrée telle que pour tout signal borné $u \in \mathrm{L}^\infty$, $\|Tu\|_\infty \leq C\, \|u\|_\infty$.

- Convolution par un signal intégrable

On se donne un signal $h \in \mathrm{L}^1$ intégrable : $\|h\|_1 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$. Alors le filtre T défini par la convolution $Tu \equiv h * u$ est linéaire. De plus, il est à entrée bornée et sortie bornée et on a $\|Tu\|_\infty \leq \|h\|_1 \, \|u\|_\infty$. La constante de stabilité C peut être précisée : $C = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\,\mathrm{d}t$.

- Filtre causal

Un filtre causal T transforme par définition un signal causal u en un autre signal causal. Si le filtre T est causal et le signal d'entrée u causal, alors le signal de sortie $v = Tu$ est encore causal.

- Convolution causale

Si le filtre T est défini par la convolution $Tu \equiv h * u$ et si le signal h est causal, alors le filtre T est causal. Nous retenons aussi que le produit de convolution de deux fonctions causales est une fonction causale.

- Notion de réponse impulsionelle

On se donne un filtre défini par convolution : $Tu \equiv h * u$ et une famille de signaux d'entrée u_ε de type "percussion", ou "coup de marteau", paramétrée par $\varepsilon > 0$. On pose $u_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}$ si $0 < t < \varepsilon$ et $u_\varepsilon = 0$ dans les autres cas. On remarque que $\int_{-\infty}^{+\infty} u_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Alors $(Tu_\varepsilon)(t)$ est exactement la valeur moyenne de la réponse impulsionnelle sur l'intervalle $]t-\varepsilon, t[$. Si ε tend vers zéro, $(Tu_\varepsilon)(t)$ converge vers $h(t)$.

Si $\varepsilon \longrightarrow 0$, u_ε se rapproche de plus en plus d'une "impulsion" : signal d'entrée dont l'intégrale vaut 1 tel que l'ensemble des points où le signal est non nul est de plus en plus réduit. La réponse à un signal de plus en plus voisin de cette impulsion se rapproche de plus en plus de la réponse à cette impulsion, appelée pour cette raison "réponse impulsionnelle".

- Dérivation sous le symbole d'intégration

On se donne une fonction de deux variables $\psi(t,\,\theta)$ définie pour t et θ réels. On suppose que la fonction partielle relativement à θ est intégrable sur $\mathbb{R}$: $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t,\,\theta)|\,\mathrm{d}\theta < \infty$, que la fonction ψ est dérivable par rapport à la première variable et que la dérivée partielle est dominée, c'est à dire qu'il existe une fonction positive $g(\theta)$ indépendante de t et intégrable (on a $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(\theta)|\,\mathrm{d}\theta < \infty$) de sorte que $|\frac{\partial\psi}{\partial t}(t,\,\theta)| \le g(\theta)$ pour tout t et essentiellement pour tout θ. Alors la fonction de t définie en intégrant ψ par rapport à θ est fonction dérivable de t et on a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t,\,\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\psi}{\partial t}(t,\,\theta)\,\mathrm{d}\theta$. On a pu échanger le symbole de dérivation par rapport à t et le symbole d'intégration par rapport à θ.

- Dérivation d'un produit de convolution

Si le produit de convolution $f*g$ est tel que la fonction g est une fonction dérivable et qu'on peut appliquer la règle de dérivation précédente à la fonction $\psi(t,\,\theta) = f(\theta)\,g(t-\theta)$, alors le produit de convolution $f*g$ est une fonction dérivable et on a $(f*g)' = f*g'$. Dans le cas où la fonction f est dérivable, on a $(f*g)' = f'*g$. Pour dériver un produit de convolution, on dérive l'un ou l'autre facteur. On remarque que cette règle de dérivation est encore plus simple que la règle de Leibniz de dérivation d'un produit ordinaire de deux fonctions !

Exercices

- Signal intégrable

On note H la fonction de Heaviside : $H(t) = 1$ pour $t > 0$ et $H(t) = 0$ pour $t \le 0$. Montrer que le signal défini pour t réel par $h(t) = \frac{1}{RC}\exp\big(-\frac{t}{RC}\big)\,H(t)$ est un signal intégrable :
$\int_{\mathbb{R}} |\,h(t)\,|\;\mathrm{d}t < \infty$.

• Causalité

On se donne une fonction h et le filtre T défini par son action sur un signal analogique u : $Tu = h * u$. Montrer que si la réponse impulsionnelle h est causale, c'est à dire $h(t) = 0$ dès que $t < 0$, il en est de même du filtre T.

• Parité

Soit f une fonction paire et g une fonction impaire. On suppose que le produit de convolution $f * g$ est bien défini.

a) Montrer que le produit de convolution $f * g$ est une fonction impaire.

b) Reprendre la question lorsque f et g sont toutes deux paires.

c) Même question si f et g sont toutes deux impaires.

• Dérivation

Soient f et g deux signaux tels que le produit de convolution $f * g$ est bien défini. On suppose f dérivable et le produit de convolution $f' * g$ défini. Quelle relation proposez-vous pour calculer $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(f * g\big)$?

• Calcul d'un produit de convolution

On se donne $a > 0$ et la porte χ par les conditions $\chi(t) = 1$ pour $-a < t < a$ et $\chi(t) = 0$ sinon.

a) Calculer le produit de convolution $f = \chi * \sin$.

b) Montrer que c'est une fonction impaire.

c) Pouvait-on prévoir le résultat ?

d) Calculer d'une part la dérivée f' et d'autre part la convolée $g = \chi * \cos$.

e) Pouvait-on prévoir le résultat ?

• Un autre produit de convolution

Si χ désigne la porte introduite à l'exercice précédent et sgn la fonction "signe" définie par $\operatorname{sgn}(t) = 1$ pour $t > 0$ et $\operatorname{sgn}(t) = -1$ pour $t \leq 0$.

a) Calculer le produit de convolution $\chi * \mathrm{sgn}$.

b) Est-il continu ?

c) Est-il dérivable ?

d) Quelle est la valeur de la fonction dérivée $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\chi * \mathrm{sgn}\big)$ lorsqu'elle est définie ?

e) Les fonction χ et sgn sont-elles continues ?

f) Sont-elles dérivables ?

On note χ' et sgn' les fonctions dérivées lorsqu'elles sont définies,

g) Calculer les produits de convolution $\chi' * \mathrm{sgn}$ et $\chi * \mathrm{sgn}'$.

h) Que constatez-vous ?

- Produit de convolution et équation différentielle

On se donne deux réels $0 < a < b$. On pose $f(t) = \exp(-t\,a)\,H(t)$ où H est la fonction de Heaviside définie au premier exercice de ce chapitre. On pose aussi $g(t) = \exp(-t\,b)\,H(t)$.

a) Calculer le procuit de convolution $f*g$ et représenter graphiquement cette fonction.

b) Même question lorsque $b = a$.

c) En déduire la solution de l'équation différentielle
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a\,y = 5\exp(-t\,a)$ avec la condition initiale $y(0) = 11$.

- Convolution [novembre 2013]

On se donne deux nombres réels a et ω et on désigne par H la fonction de Heaviside. On pose $f(t) = H(t)\,\exp(a\,t)$ et
$g(t) = H(t)\,\exp(i\,\omega\,t)$.

a) La fonction convolée $f*g$ de f et de g est-elle définie ? Est-elle causale ?

b) Calculer pour tout nombre réel t l'expression $\big(f*g\big)(t)$.

c) Pour $a = \omega = 1$ calculer les parties réelle et imaginaire de la fonction $f*g$.

d) En déduire l'expression de la convolée $\big(H(t)\,\mathrm{e}^t\big) * \big(H(t)\,\sin t\big)$.

-5- Intégrale double

- Introduction

On se donne une partie bornée Ω du plan $\mathbb{R}^2$ et une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. L'intégrale double de la fonction f dans le domaine Ω est un nombre réel qui, quand il existe, se note $\int_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ ou parfois $\iint_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ et souvent plus simplement $\int_\Omega f\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ ou même $\int_\Omega f$.

- Intégrale double de la fonction “un”

Si on prend le rectangle $]a, b[\times]c, d[$ du plan $\mathbb{R}^2$ (avec $a < b$ et $c < d$), l'intégrale double de la fonction $f(x, y) \equiv 1$ est simplement la surface $(b-a)\,(d-c)$ du rectangle :
$\int_{]a,b[\times]c,d[} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = (b-a)\,(d-c)$.
De façon générale, si Ω désigne une partie bornée du plan, l'intégrale double sur Ω de la fonction $f(x, y) \equiv 1$ est la surface $|\Omega|$ du domaine : $\int_\Omega \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = |\Omega|$.

- Linéarité

On suppose connue l'intégrale double $\int_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ et on se donne un nombre λ. Alors $\int_\Omega (\lambda f)(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \lambda \int_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$. Si on se donne aussi l'intégrale double $\int_\Omega g(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ de la fonction g, alors $\int_\Omega (f+g)(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y + \int_\Omega g(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$.

- Positivité

On suppose la fonction f positive sur Ω: $f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in \Omega$. Alors $\int_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \geq 0$.
Si $f \leq g$ sur Ω c'est à dire $f(x, y) \leq g(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \Omega$, alors $\int_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \leq \int_\Omega g(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ [exercice].

- Additivité par rapport au domaine

On suppose l'ensemble Ω décomposé en une réunion finie de parties Ω_i "plus simples", $\Omega = \cup_{i=1}^N \Omega_i$ de sorte que l'intersection $\Omega_i \cap \Omega_j$ est de surface nulle si $i \neq j$: $|\Omega_i \cap \Omega_j| = 0$. Alors l'intégrale sur Ω est la somme des intégrales sur chacun des morceaux Ω_i :
$\int_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$.

- Intégrale d'une fonction étagée

On se donne une décomposition de Ω comme ci-dessus et une fonction f "étagée" sur Ω, c'est à dire constante sur chacune des parties Ω_i : $\forall i,\ \exists \lambda_i,\ \forall (x, y) \in \Omega_i,\ f(x, y) = \lambda_i$. Le calcul de l'intégrale de f sur Ω est explicite : $\int_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \sum_{i=1}^N \lambda_i\, |\Omega_i|$.

- Intégrale d'une fonction continue

On désigne toujours par Ω une partie bornée de $\mathbb{R}^2$ et par
$f \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$ une fonction continue sur Ω et jusqu'au bord inclus :
$\forall X \in \Omega,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall Y \in \Omega,$
$|X - Y| < \eta \Longrightarrow |f(X) - f(Y)| < \varepsilon$. Alors l'intégrale de f sur Ω est bien définie ; c'est un nombre réel ou éventuellement complexe. Pour établir ce résultat, on utilise l'uniforme continuité de f et on l'approche par des fonctions étagées. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe f_ε étagée sur Ω de sorte que $f_\varepsilon - \varepsilon \leq f \leq f_\varepsilon + \varepsilon$ sur Ω. Alors le nombre $\int_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ satisfait nécessairement aux inégalités
$\int_\Omega f_\varepsilon(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y - \varepsilon\, |\Omega| \leq \int_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \leq \int_\Omega f_\varepsilon(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y + \varepsilon\, |\Omega|$.
On montre alors d'une part que le nombre $\int_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ est bien défini et d'autre part qu'on peut l'approcher en calculant l'intégrale d'une fonction en escalier qui approche la fonction f.

- Intégrale d'une fonction positive

On se donne $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et f fonction positive $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$: $f(x, y) \geq 0$ pour $(x, y) \in \Omega$. L'intégrale $\int_\Omega f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ est dans ce cas toujours bien définie, quitte à accepter la valeur $+\infty$. Par exemple pour $f(x, y) \equiv 1$ et $\Omega = \mathbb{R}^2$, on a $\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = +\infty$. Si l'intégrale n'est pas infinie, si c'est un nombre réel positif, on écrit cette propriété sous la forme $\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < \infty$.

- Théorème de Tonnelli

On se donne une fonction positive f définie dans $\mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles. Notons qu'on peut toujours se ramener à ce cas si f est définie de Ω dans $\mathbb{R}$ en supposant f nulle hors de Ω. Pour x réel fixé on note $F(x) = \int_\mathbb{R} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ le nombre positif éventuellement égal à $+\infty$ obtenu en intégrant la fonction f par raport à la seconde variable y, en laissant la première fixée.
De même, on note $G(y) = \int_\mathbb{R} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ le nombre positif au besoin égal à $+\infty$ si l'intégrale diverge, résultat de l'intégrale de la fonction f par raport à la première variable x en laissant la deuxième fixe.
Alors les intégrales de F et G sont égales et permettent de calculer l'intégrale double de la fonction f sur $\mathbb{R}^2$:
$\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_\mathbb{R} F(x)\,\mathrm{d}x = \int_\mathbb{R} G(y)\,\mathrm{d}y$.
En explicitant les valeurs des fonctions F et G, la conclusion du théorème de Tonnelli s'écrit souvent sous la forme
$\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_\mathbb{R} \mathrm{d}x\big[\int_\mathbb{R} f(x,y)\mathrm{d}y\big] = \int_\mathbb{R} \mathrm{d}y\big[\int_\mathbb{R} f(x,y)\mathrm{d}x\big]$.
On peut toujours intégrer une fonction positive de deux variables dans l'ordre que l'on veut.
La relation précédente montre que si l'une des deux intégrales simples $\int_\mathbb{R} F(x)\,\mathrm{d}x$ ou $\int_\mathbb{R} G(y)\,\mathrm{d}y$ est infinie, il en est de même de l'intégrale double qui est alors infinie. Si l'une des intégrales $\int_\mathbb{R} F(x)\,\mathrm{d}x$ ou $\int_\mathbb{R} G(y)\,\mathrm{d}y$ est finie, alors c'est aussi le cas pour l'intégrale double $\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. On écrit alors $0 \le \iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < \infty$.

- Exemple d'utilisation du théorème de Tonnelli

On peut par exemple vérifier la conclusion du thérème de Tonnelli en considérant la fonction f égale à 1 dans le demi-disque
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \ge 0, x^2 + y^2 \le 1\}$ et égale à 0 ailleurs. Les deux calculs précédents de l'intégrale double de f sur $\mathbb{R}^2$ redonnent la

surface $|D|$ du demi-disque D, à savoir $\frac{\pi}{2}$.

- Théorème de Fubini

On se donne maintenant une fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles ou éventuellement complexes. On suppose que l'intégrale double de la fonction positive $|f|$ est finie :
$\iint_\Omega |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < \infty$. Alors l'intégrale double de f sur $\mathbb{R}^2$ est bien définie ; c'est un nombre réel ou complexe que l'on peut calculer à l'aide d'une des relations suivantes :
$\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_\mathbb{R} \mathrm{d}x \big[\int_\mathbb{R} \mathrm{d}y\, f(x,y) \big]$ ou
$\iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_\mathbb{R} \mathrm{d}y \big[\int_\mathbb{R} \mathrm{d}x\, f(x,y) \big]$. Si l'intégrale double est bien définie, c'est à dire si $\iint_\Omega |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ est finie, on peut toujours intégrer une fonction de deux variables dans l'ordre que l'on veut.

- Exemple d'utilisation du théorème de Fubini

On se donne deux réels a et b strictement positifs et le triangle
$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 1\}$. On pose
$f(x,y) = x - y$. On vérifie d'abord que l'intégrale de la fonction $|f|$ sur le triangle T est finie puisque $|f(x,y)| \leq a + b$ si $(x,y) \in T$. Donc $\int_T |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq (a+b)\,|T| = (a+b)\,\frac{ab}{2} < \infty$ et on on est dans le cadre des hypothèses du théorème de Fubini. On peut vérifier sur cet exemple [exercice !] que les deux intégrales simples successives $\int_0^a \mathrm{d}x \big[\int_0^{b(1-x/a)} \mathrm{d}y\,(x-y) \big]$ et $\int_0^b \mathrm{d}y \big[\int_0^{a(1-y/b)} \mathrm{d}x\,(x-y) \big]$ sont égales et valent $\frac{ab}{6}\,(b-a)$.

- Changement de variable dans une intégrale double

On se donne une tranformation régulière et bijective F d'une partie $\widehat{\Omega}$ "assez simple géométriquement" vers le domaine d'intégration Ω :
$\widehat{\Omega} \ni (\widehat{x}, \widehat{y}) \longmapsto F(\widehat{x}, \widehat{y}) \equiv (x = X(\widehat{x}, \widehat{y}), y = Y(\widehat{x}, \widehat{y})) \in \Omega$. La régularité des fonctions X et Y permet de considérer les dérivées partielles $\frac{\partial X}{\partial \widehat{x}}(\widehat{x}, \widehat{y})$, $\frac{\partial X}{\partial \widehat{y}}(\widehat{x}, \widehat{y})$, $\frac{\partial Y}{\partial \widehat{x}}(\widehat{x}, \widehat{y})$ et $\frac{\partial Y}{\partial \widehat{y}}(\widehat{x}, \widehat{y})$ qui sont aussi des fonctions définies sur $\widehat{\Omega}$. On forme la matrice jacobienne

$J(F)(\widehat{x},\widehat{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial \widehat{x}} & \frac{\partial X}{\partial \widehat{y}} \\ \frac{\partial Y}{\partial \widehat{x}} & \frac{\partial Y}{\partial \widehat{y}} \end{pmatrix}$,
son déterminant $\det(J(F)) = \frac{\partial X}{\partial \widehat{x}}\frac{\partial Y}{\partial \widehat{y}} - \frac{\partial Y}{\partial \widehat{x}}\frac{\partial X}{\partial \widehat{y}}$ et la valeur absolue $|\det(J(F))|(\widehat{x},\widehat{y})$ de ce déterminant. Alors l'intégrale d'une fonction f sur Ω peut se calculer à l'aide d'une intégrale sur le domaine des paramètres :
$\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\widehat{\Omega}} f(X(\widehat{x},\widehat{y}), Y(\widehat{x},\widehat{y}))\;|\det(J(F))|(\widehat{x},\widehat{y})\;\mathrm{d}\widehat{x}\mathrm{d}\widehat{y}.$
Dans la relation précédente, il est essentiel de ne pas oublier la valeur absolue du déterminant jacobien, c'est à dire le facteur
$|\det(J(F))|(\widehat{x},\widehat{y})$.

- Coordonnées polaires du plan

Dans ce cas, le domaine $\widehat{\Omega}$ est noté classiquement avec les variables (r,θ) et le changement de coordonnées F s'écrit simplement
$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$. Après transformation de $\widehat{\Omega}$ en Ω par ce passage en coordonnées polaires, on forme le déterminant jocobien
$J(r,\theta) \equiv \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \theta} - \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \theta} = r$ et on a
$\int_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\widehat{\Omega}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$

- Introduction à l'intégration par parties

La question est de généraliser aux intégrales doubles la relation
$\int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$ toujours vraie pour les intégrales simples dès que f est dérivable et en particulier pour $a < b$. Il faut voir cette relation comme une intégrale sur le bord $\partial(]a,b[) = \{a,b\}$ de l'intervalle $]a,b[$. On peut noter $n_b \equiv +1$ la "normale extérieure" à l'intervalle $]a,b[$ au point b et $n_a \equiv -1$ la normale extérieure à cet intervalle au point a. La relation précédente s'écrit aussi
$\int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = n_a f(a) + n_b f(b).$

- Frontière

Si Ω est un domaine borné du plan $\mathbb{R}^2$, on suppose sa frontière $\partial\Omega$ assez régulière. La notion de bord, de frontière est assez intuitive.

Par exemple, si Ω est le disque de centre l'origine et de rayon R, sa frontière est le cercle de centre O et de même rayon. On paramètre cette courbe $\partial\Omega$ avec des coordonnées cartésiennes : $x = X(t)$, $y = Y(t)$, avec $0 \leq t \leq 1$ pour fixer les idées.

- Normale extérieure

La normale extérieure à un domaine borné Ω du plan est un vecteur unitaire $n(x, y)$ défini, si le bord $\partial\Omega$ est assez régulier, pour tout point $(x, y) \in \partial\Omega$. Ce vecteur $n(x, y) \equiv (n_x(x, y), n_y(x, y))$ est perpendiculaire à la direction tangente à la courbe. Avec un paramétrage $x = X(t)$, $y = Y(t)$ de $\partial\Omega$ comme plus haut, on a $n_x \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} + n_y \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = 0$ en tout point du contour. De plus, la normale $n(x, y)$ est unitaire : $n_x(x, y)^2 + n_y(x, y)^2 \equiv 1$, pour tout $(x, y) \in \partial\Omega$. Enfin, elle pointe vers l'extérieur de Ω.

Dans le cas du disque de centre l'origine et de rayon R, la normale $n(x, y)$ au point $(x, y) = (R\cos\theta, R\sin\theta) \in \partial\Omega$ sur le bord s'écrit $n(x, y) = (\cos\theta, \sin\theta)$.

- Intégrale de contour

On peut intégrer une fonction f définie sur une courbe Γ. Afin de garantir que l'intégrale de la fonction "un" sur la courbe Γ est égale à la longueur $|\Gamma|$ de cette courbe, on introduit l'abscisse curviligne γ telle que $\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$ et on pose

$$\int_\Gamma f(x, y)\,\mathrm{d}\gamma = \int_0^1 f(X(t), Y(t)) \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Dans le cas du cercle de centre O et de rayon R, si θ désigne l'angle polaire, on a $\mathrm{d}\gamma = R\,\mathrm{d}\theta$ et on peut finalement écrire $\int_\Gamma f(x, y)\,\mathrm{d}\gamma = \int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\, R\,\mathrm{d}\theta$. On retrouve bien que si $f \equiv 1$, son intégrale sur Γ est la longueur du cercle.

- Intégration par parties

L'intégrale double dans le domaine Ω de la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_j}$

d'une fonction f est égale à une intégrale sur le bord $\partial\Omega$ du domaine. De façon précise, on désigne par $n_j(x,y)$ la composante numéro j de la normale extérieure en un point (x,y) de la frontière. On a $\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} f(x,y)\, n_j(x,y)\,\mathrm{d}\gamma$. On peut détailler cette relation pour chacune des deux composantes :
$\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} f(x,y)\, n_x(x,y)\,\mathrm{d}\gamma$ et
$\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} f(x,y)\, n_y(x,y)\,\mathrm{d}\gamma$. Ces relations sont fondamentales. Entre autres pour de nombreuses applications en ingénierie.

Exercices

- Intégrale simple et intégrale double

La plupart des propriétés de l'intégrale double ont leur équivalent pour l'intégrale simple. A partir des notes de cours, énoncer en regard de chaque propriété de l'intégrale double la propriété équivalente de l'intégrale simple.

- Utilisation du théorème de Tonnelli

Soit D le demi-disque $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$.
Calculer sa surface en utilisant les deux façons de faire que suggère le théorème de Tonnelli.

- Utilisation du théorème de Fubini

Soit T le triangle $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq y \leq x \leq 1\}$.
a) Montrer que l'on peut appliquer le théorème de Fubini à l'intégrale $\int_T \left(x + y - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.
b) Calculer cette intégrale de deux façons différentes.

- Convolution dans l'espace L^1

On se donne f et g deux fonctions intégrables c'est à dire telles que les intégrales $\int_\mathbb{R} |f(x)|\,\mathrm{d}x \equiv \|f\|_1$ et $\int_\mathbb{R} |g(x)|\,\mathrm{d}x \equiv \|g\|_1$ sont finies. On note cette propriété $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Montrer qu'alors le produit de convolution $f * g$ appartient aussi à l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et qu'on a l'inégalité $\| f * g \|_1 \leq \| f \|_1 \, \| g \|_1$.

- Changement de l'ordre d'intégration

On se donne une fonction f bornée sur $]0,\, 1[^2$.

a) Ecrire l'intégrale double $\int_0^1 \mathrm{d}y \left[\int_y^{\sqrt{y}} \mathrm{d}x \, f(x,\, y) \right]$ à l'aide d'une intégrale de la forme $\int_0^1 F(x)\, \mathrm{d}x$, où F est une fonction qu'on précisera.

b) Achever le calcul pour $f(x,\, y) \equiv 1$.

- Intégrale de Gauss

On se propose de calculer l'intégrale de Gauss $G = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}x$.

a) Montrer que cette intégrale G définit bien un nombre réel positif.

b) Relier sa valeur à celle de l'intégrale double

$I = \iint_{]0,\infty[\,\times\,]0,\infty[} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

c) Calculer ensuite I en passant en coordonnées polaires.

d) En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss G.

- Aire contenue par une ellipse

On se donne $a > 0$, $b > 0$ et on note E le disque elliptique bordé par l'ellipse d'équation $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$. Grâce au changement de variables $x = a\, r \cos\theta$, $y = b\, r \sin\theta$, calculer l'aire de E.

- Intégrale double [novembre 2012]

Soit D le disque de centre l'origine et de rayon 1 :

$D = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2,\, x^2 + y^2 \leq 1\}$. On pose $g(x,\, y) = \left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)^{3/4}$.

a) L'intégrale double $I = \iint_D g(x,\, y)\, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ est-elle un nombre réel ?

b) Justifier avec soin votre réponse.

c) Si la réponse à la question a) est "oui", calculer la valeur de l'intégrale I.

• Intégrale double [novembre 2013]

Soit D le domaine du plan défini par
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \geq 1\}$. On pose
$f(x, y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha}$. On cherche à déterminer les valeurs du paramètre α pour lesquelles l'intégrale double $I = \iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ est un nombre réel puis à calculer cette intégrale.

a) Dessiner le domaine D.

On passe en coordonnées polaires et on pose $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ avec $r \geq 0$.

b) Montrer que, pour tout $(x, y) \in D$, on a
$|\, f(x,y)\,| \leq g(r,\theta) \equiv r^{2-2\alpha}$.

c) Après avoir remarqué que la fonction g est positive, établir pour quelles valeurs du paramètre α l'intégrale
$\iint_{r\geq 1, 0\leq\theta\leq\pi/2} g(r,\theta)\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ obtenue après passage en coordonnées polaires est bien un nombre réel.

d) Dans le cas où $\iint_{r\geq 1, 0\leq\theta\leq\pi/2} g(r,\theta)\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ est un nombre réel, calculer l'intégrale I en fonction de α.

• Intégrales doubles [novembre 2014]

Soit T le triangle décrit algébriquement à l'aide de la relation
$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.

a) Dessiner le triangle T.

Calculer les cinq intégrales doubles suivantes :

b) $I_1 = \iint_T \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

c) $I_2 = \iint_T x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

d) $I_3 = \iint_T y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

e) $I_4 = \iint_T x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

f) $I_5 = \iint_T xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

• Intégrale double [février 2015]

On se donne un nombre réel β.

a) Pour quelles valeurs de β l'intégrale $I(\beta) = \int_0^1 \frac{1}{t^\beta}\,\mathrm{d}t$ définit-elle un nombre réel ?

b) Calculer le nombre $I(\beta)$ dans un tel cas.

Dans la suite de l'exercice, on considère le disque $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ et on se donne un nombre α. On pose aussi $f(x,y) = \frac{x^2 y^2}{(x^2+y^2)^\alpha}$.

c) En passant en coordonnées polaires ($x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$), montrer qu'on a la majoration $|\, f(x, y)\,| \leq g(r)$, avec $g(r) = \frac{1}{r^{2\alpha-4}}$.

d) A l'aide du théorème de Tonnelli et en passant en coordonnées polaires, montrer que l'intégrale double de la fonction g sur le disque D est finie si et seulement si $\alpha < 3$.

e) Démontrer que $\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\ \cos^2\theta\ \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}$.

f) Si $\alpha < 3$, calculer l'intégrale double $\int\!\!\int_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

• Intégrales doubles [novembre 2016]

Soit T le triangle décrit algébriquement à l'aide de la relation $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2\}$.

a) Dessiner le triangle T.

Calculer les cinq intégrales doubles suivantes :

b) $I_1 = \int\!\!\int_T \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

c) $I_2 = \int\!\!\int_T x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

d) $I_3 = \int\!\!\int_T y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

e) $I_4 = \int\!\!\int_T x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

f) $I_5 = \int\!\!\int_T x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

-6- Transformée de Laplace

- Définition

On se donne une fonction causale à valeurs réeles ou complexes : $f(t)=0$ si $t<0$. La transformée de Laplace $(\mathscr{L}f)(p)$ de la fonction f pour l'argument p est définie par l'intégrale $(\mathscr{L}f)(p)=\int_0^\infty f(t)\exp(-pt)\,\mathrm{d}t$. Le nombre p est *a priori* un nombre complexe mais l'expression $(\mathscr{L}f)(p)$ n'est définie que pour les valeurs de l'argument p pour lesquelles l'intégrale $\int_0^\infty |f(t)|\,|\exp(-pt)|\,\mathrm{d}t$ est finie.

- Transformée de Laplace de la fonction de Heaviside

On rappelle que la fonction de Heaviside H est définie par $H(t)=1$ si $t>0$ et $H(t)=0$ si $t<0$. Comme $|\exp(-pt)|=\exp(-(\mathrm{Re}p)t)$ où $\mathrm{Re}p$ est la partie réelle du nombre complexe p, l'intégrale $\int_0^\infty |H(t)|\,|\exp(-pt)|\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \exp(-(\mathrm{Re}p)t)\,\mathrm{d}t$ converge pour $\mathrm{Re}p>0$. On a alors $\int_0^\infty H(t)\exp(-pt)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{p}$ et $(\mathscr{L}H)(p)=\frac{1}{p}$ si $\mathrm{Re}p>0$.

- Fonction à croissance au plus exponentielle

On dit que la fonction causale f est à croissance au plus exponentielle si il existe $\alpha\geq 0$ et $M\geq 0$ de sorte que pour tout $t\geq 0$, $|f(t)|\leq M\exp(\alpha t)$. C'est le bon cadre pour définir la transformée de Laplace.

Si f est à croissance au plus exponentielle et $\mathrm{Re}p>\alpha$, alors le nombre $(\mathscr{L}f)(p)$ est bien défini.

- Transformée de Laplace de l'exponentielle causale

On se donne $a\in\mathbb{C}$. L'exponentielle causale est définie par

$\varphi_a(t) = H(t)\exp(at)$. Sa transformée de Laplace est définie pour $\mathrm{Re}\,p > \mathrm{Re}\,a$ et on a $(\mathscr{L}\varphi_a)(p) = \frac{1}{p-a}$.

- Transformée de Laplace des fonctions circulaires

Le cas particulier $a = i\omega$ de l'exponentielle causale montre que $(\mathscr{L}\cos(\omega t))(p) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$ et $(\mathscr{L}\sin(\omega t))(p) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$.

- Linéarité de la transformée de Laplace

Si $(\mathscr{L}f)(p)$ et $(\mathscr{L}g)(p)$ sont bien définis, il en est de même de $(\mathscr{L}(f+g))(p)$ et $(\mathscr{L}(f+g))(p) = (\mathscr{L}f)(p) + (\mathscr{L}g)(p)$. De façon analogue, si λ est un nombre complexe arbitraire,
$(\mathscr{L}(\lambda f))(p) = \lambda\,(\mathscr{L}f)(p)$.

- Retard

On se donne f causale et $a > 0$. Alors
$(\mathscr{L}(H(t-a)\,f(t-a)))(p) = \exp(-pa)\,(\mathscr{L}f)(p)$.

- Retard de la transformée de Laplace

On se donne f causale et $a \in \mathbb{C}$. Si les deux nombres
$(\mathscr{L}f)(p-a)$ et $(\mathscr{L}(\exp(at)\,f(t)))(p)$ sont bien définis, alors ils sont égaux : $(\mathscr{L}f)(p-a) = (\mathscr{L}(\exp(at)\,f(t)))(p)$.

- Changement d'échelle

On se donne f causale et $a > 0$. On a $(\mathscr{L}(f(at)))(p) = \frac{1}{a}\,(\mathscr{L}f)(\frac{p}{a})$.

- Transformée de Laplace d'une dérivée

On se donne une fonction causale f dérivable pour tout $t \geq 0$ telle que les fonctions f et f' sont à croissance au plus exponentielle. On note $f(0^+)$ la limite de $f(t)$ si t tend vers zéro par valeurs supérieures : $f(0^+) = \lim_{t\to 0, t>0} f(t)$. Alors
$(\mathscr{L}(f'(t)))(p) = p\,(\mathscr{L}f)(p) - f(0^+)$.
On peut itérer cette relation :
$(\mathscr{L}(f''(t)))(p) = p^2\,(\mathscr{L}f)(p) - p\,f(0^+) - f'(0^+)$, *etc.*

- Dérivée de la transformée de Laplace

On se donne une fonction causale f à croissance au plus exponentielle : $|f(t)| \leq M \exp(\alpha t)$ pour tout $t \geq 0$ pour une certaine valeur de $M \geq 0$ et une certaine valeur de $\alpha \geq 0$. Alors pour $p > \alpha$, la transformée de Laplace $(\mathscr{L} f)(p)$ est une fonction dérivable de p et on a $\frac{\mathrm{d}(\mathscr{L} f)}{\mathrm{d}p} = (\mathscr{L}(-t\, f(t)))(p)$.

On peut itérer cette relation pour les dérivées d'ordre supérieur et $\frac{\mathrm{d}^n(\mathscr{L} f)}{\mathrm{d}p^n} = (-1)^n\, (\mathscr{L}(t^n\, f(t)))(p)$. En particulier, si on dérive n fois la transformée de Laplace de la fonction de Heaviside, on obtient : $(\mathscr{L}(t^n H(t)))(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$.

- Transformée de Laplace d'un produit de convolution

Si on se donne deux fonctions causales f et g, on sait que le produit de convolution $f * g$ est encore une fonction causale ; pour $t > 0$ on a $(f * g)(t) = \int_0^t f(\theta)\, g(t-\theta)\, \mathrm{d}\theta$. Si f et g sont de plus à croissance au plus exponentielle, il en est de même du produit de convolution $f * g$ et si $\mathrm{Re}\, p$ est assez grand, on a $(\mathscr{L}(f * g))(p) = (\mathscr{L} f)(p)\, (\mathscr{L} g)(p)$. La transformée de Laplace transforme le produit de convolution en un produit ordinaire.

- Valeur initiale

On se donne une fonction causale f à croissance au plus exponentielle. Alors $p\, (\mathscr{L} f)(p)$ tend vers $f(0^+)$ si $p \in \mathbb{R}$ tend vers $+\infty$.

- Valeur finale

On se donne une fonction causale f telle que $\lim_{t \to +\infty} f(t)$ existe. Alors $(\mathscr{L} f)(p)$ est bien défini pour tout $p > 0$ et $p\, (\mathscr{L} f)(p)$ tend vers $\lim_{t \to +\infty} f(t)$ si $p \in \mathbb{R}$ tend vers zéro par valeurs supérieures.

- Injectivité de la transformation de Laplace

On se donne un nombre réel $\alpha \geq 0$. Si deux fonctions causales ont même transformée de Laplace $F(p)$ pour tout nombre complexe p tel que $\mathrm{Re}\, p > \alpha$, alors les fonction f et g sont égales. En d'autres termes, la transformation de Laplace est injective. La fonction f telle que $\mathscr{L} f = F$ est appelée “originale” de la donnée F.

- Résolution analytique d’une équation différentielle modèle

On se donne $\alpha \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. On cherche $y(t)$ solution du système dynamique suivant : $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \alpha\, y(t) = 0$ pour $t > 0$ avec la condition initiale $y(0) = y_0$. On réécrit ce probleme avec la transformation de Laplace. On multiple l’équation différentielle pour la fonction de Heaviside, on prend la transformée de Laplace de l’ensemble et on pose $Y(p) = (\mathscr{L}(H(t)\,y(t)))(p)$. On obtient alors
$p\,Y(p) - y_0 + \alpha\, Y(p) = 0$ et la transformée de Laplace de la solution pour $t > 0$ est complètement explicitée : $Y(p) = \frac{y_0}{p+\alpha}$. Compte tenu de la valeur de la transformée de Laplace de l’exponentielle causale, on en déduit que $y(t) = \exp(-\alpha\, t)\, y_0$ pour $t > 0$.

- Résolution d’équations différentielles à l’aide de la transformée de Laplace

Dans le cas très général d’équations différentielles linéaires, la méthode précédente permet d’exprimer la transformée de Laplace de la solution sous la forme d’une fraction rationnelle : $Y(p) = \frac{P(p)}{Q(p}$, où P et Q sont des polynômes de la variable p. On doit ensuite décomposer cette fraction sous la forme d’une somme d’“éléments simples”. Pour cela, on cherche d’abord les valeurs α_j qui annulent le dénominateur $Q(p)$ (ce sont les “pôles” de la fraction rationnelle), avec leur ordre de multiplicité n_j. On en trouve un nombre k pour fixer les idées. On peut alors écrire la fraction $Y(p)$ sous la forme $Y(p) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{m=1}^{n_j} \frac{\beta_{j,m}}{(p-\alpha_j)^m}$ et la valeur de la fonction $y(t)$ originale s’obtient pour $t > 0$ en explicitant les originales des fonctions $\frac{1}{(p-\alpha_j)^m}$ [exercice !].

Exercices

- Calcul d'une transformée de Laplace

Soit ω un nombre réel fixé et H la fonction de Heaviside : $H(t) = 1$ pour $t > 0$ et $H(t) = 0$ pour $t \leq 0$. On pose $\varphi(t) = \exp(i\,\omega\,t)\,H(t)$. Calculer la transformée de Laplace $\mathscr{L}\varphi$ de la fonction φ.

- Changement d'échelle

Soit a un nombre réel strictement positif fixé.

a) Etablir la relation de changement d'échelle $[\mathscr{L}(f(t\,a))](p) = \frac{1}{a}\,(\mathscr{L}f)\big(\frac{p}{a}\big)$.

b) L'appliquer à la fonction sinus et retrouver l'expression de $\mathscr{L}(H(t)\,\sin(\omega t))$ à partir de la relation $[\mathscr{L}(H(t)\,\sin(t))](p) = \frac{1}{1+p^2}$.

b) De façon analogue, retrouver l'expression de $\mathscr{L}(H(t)\,\cos(\omega t))$ à partir de la relation $[\mathscr{L}(H(t)\,\cos(t))](p) = \frac{p}{1+p^2}$.

- Dérivation et transformée de Laplace

Etablir par récurrence les relations générales

a) $$[\mathscr{L}f^{(n)}(t)](p) = p^n\,(\mathscr{L}f)(p) - p^{n-1}\,f(0^+) - p^{n-2}\,f'(0^+)\,\ldots - f^{(n-1)}(0^+)$$

b) $$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n}(\mathscr{L}f)(p) = (-1)^n\,[\mathscr{L}(t^n\,f(t))](p)\,.$$

- Calcul de quelques transformées de Laplace

Avec les notations introduites au premier exercice sur la transformation de Laplace, calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes :

a) $f_1(t) = H(t)\,\exp(2t)\,\cos(\omega\,t)$,

b) $f_2(t) = H\big(t - \frac{\pi}{3}\big)\,\cos\big(t - \frac{\pi}{3}\big)$,

c) $f_3(t) = H(t)\,\cos\big(t - \frac{\pi}{3}\big)$

d) $f_4(t) = H(t)\,t\,\cos(3\,t)$.

- Calcul de quelques originales

Calculer les fonctions $f_j(t)$ dont la transformée de Laplace est donnée par les fonctions $F_j(p)$ suivantes :

a) $F_1(p) = \frac{1}{(p-2)(p-3)}$,
b) $F_2(p) = \frac{1}{(p-1)^2(p-3)}$,
c) $F_3(p) = \frac{p+1}{p^2+2p+5}$,
d) $F_4(p) = \frac{p^2-9}{(p^2+9)^2}$, après avoir décomposé la fraction $F_4(p)$ en éléments simples sous la forme
$\frac{p^2-9}{(p^2+9)^2} \equiv \frac{\alpha}{p+3i} + \frac{\beta}{p-3i} + \frac{\gamma}{(p+3i)^2} + \frac{\delta}{(p-3i)^2}$.

- Equations différentielles

Calculer pour $t > 0$ les solutions $y_j(t)$ des équations différentielles suivantes :
a) $\frac{dy_1}{dt} + 4y_1(t) = t+2,\ y_1(0) = 3$,
b) $\frac{d^2y_2}{dt^2} + y_2(t) = t,\ y_2(0) = 1,\ \frac{dy_2}{dt}(0) = 0$,
c) $\frac{dy_3}{dt} + y_3(t) = \sin t,\ y_3(0) = 0$.
d) Calculer pour $t > 0$ la solution $(x(t), y(t))$ du système différentiel $\frac{dx}{dt} = x(t) + 5y(t)$, $\frac{dy}{dt} = x(t) - 3y(t)$, $x(0) = 1$, $y(0) = 2$.

- Transformée de Laplace [novembre 2012]

a) Calculer les trois nombres réels α, β et γ de sorte que la relation $\frac{p^2+1}{p^2(p+\frac{1}{2})} = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p^2} + \frac{\gamma}{p+\frac{1}{2}}$ soit vraie pour tout réel p.
b) Expliciter la fonction causale $x(t)$ telle que sa transformée de Laplace est égale à la fraction de la question a) :
$[\mathscr{L}(x(t))](p) = \frac{p^2+1}{p^2(p+\frac{1}{2})}$.

- Transformée de Laplace [novembre 2013]

a) Calculer les trois nombres réels α, β et γ de sorte que la relation $\frac{1}{(p-1)(p^2+1)} = \frac{\alpha p+\beta}{p^2+1} + \frac{\gamma}{p-1}$ soit vraie pour tout nombre réel ou complexe p différent de $+1$, $+i$ ou $-i$.
b) Expliciter la fonction causale $x(t)$ telle que sa transformée de Laplace est égale à la fraction de la question a) :
$[\mathscr{L}(x(t))](p) = \frac{1}{(p-1)(p^2+1)}$.
c) En déduire l'expression de la convolée $\big(H(t)\,e^t\big) * \big(H(t)\,\sin t\big)$.

- Transformée de Laplace [novembre 2014]

On désigne par $H(t)$ la fonction de Heaviside : $H(t) = 1$ si $t \geq 0$ et $H(t) = 0$ si $t < 0$ et par $[\mathscr{L}(x(t))](p)$ la transformée de Laplace d'une fonction x.

Expliciter l'expression des transformées de Laplace suivantes :

a) $[\mathscr{L}(H(t))](p)$,

b) $[\mathscr{L}(t\,H(t))](p)$,

c) $[\mathscr{L}(t^2\,H(t))](p)$,

d) $[\mathscr{L}(\cos t\,H(t))](p)$,

e) $[\mathscr{L}(\sin t\,H(t))](p)$.

On se donne la fraction rationnelle $F(p) \equiv \frac{2}{p^3\,(p^2+1)}$.

f) Décomposer cette fraction en éléments simples. On cherchera des nombres réels α, β, γ, δ et ε de sorte que $F(p) = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p^2} + \frac{\gamma}{p^3} + \frac{\delta\,p+\varepsilon}{p^2+1}$. On pourra utiliser les valeurs particulières suivantes de p : i, 0, ∞ et 1.

g) En déduire l'expression d'une fonction $f(t)$ de sorte que $[\mathscr{L}(f(t))](p) = F(p)$, où F est la fraction rationnelle introduite plus haut.

On se propose maintenant de calculer la solution $y(t)$ de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + y(t) = t^2$ avec la condition initiale $y(0) = 1$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = 1$. On utilise la notation $Y(p) = [\mathscr{L}(H(t)\,y(t))](p)$ pour la transformée de Laplace de cette foncion.

h) Quelle est la relation satisfaite par la transformée de Laplace $Y(p)$ de la solution $y(t)$ de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + y(t) = t^2$ avec la condition initiale $y(0) = 1$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = 1$?

i) A l'aide des questions précédentes, calculer la solution $y(t)$ de cette équation différentielle soumise à la condition initiale rappelée à la question h).

• Transformée de Laplace [novembre 2015]

Calculer les originales $f_j(t)$ des fonctions dont la transformée de laplace est donnée par

a) $F_1(p) = \frac{1}{p}$

b) $F_2(p) = \frac{1}{p^2}$

c) $F_3(p) = \frac{1}{p\,(p+1)}$

d) $F_4(p) = \frac{1}{p^2\,(p+1)}$.

• Transformée de Laplace [novembre 2016]

a) Calculer les trois nombres réels α, β et γ de sorte que la relation $\frac{p^2+1}{p^2\,(p+2)} = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p^2} + \frac{\gamma}{p+2}$ soit vraie pour tout réel p différent de 0 et 2.

b) Expliciter la fonction causale $x(t)$ telle que sa transformée de Laplace est égale à la fraction de la question a) :

$[\mathscr{L}(x(t))](p) = \frac{p^2+1}{p^2\,(p+2)}$.

-7- Introduction à la transformation de Fourier

- Définition

On se donne une fonction intégrable, c'est à dire telle que $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$. On écrit cette propriété sous la forme $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Notons que sauf exception, on suppose la fonction f à valeurs complexes : $f(t) \in \mathbb{C}$. Pour $\omega \in \mathbb{R}$, le nombre complexe $\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\,\omega t)\, f(t)\,\mathrm{d}t$ est bien défini puisque $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. La fonction $\mathbb{R} \ni \omega \longmapsto \widehat{f}(\omega) \in \mathbb{C}$ s'appelle la transformée de Fourier de la fonction f. On la note aussi $\mathscr{F} f$ et on a $(\mathscr{F} f)(\omega) = \widehat{f}(\omega)$.

- Exemples fondamentaux

On se donne $a > 0$. L'exponentielle causale φ_a est définie par $\varphi_a(t) = H(t)\exp(-at)$. C'est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$: $\varphi_a \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. On a $\widehat{\varphi}_a(\omega) = \frac{1}{a+i\,\omega}$.
Pour $a > 0$, l'exponentielle causale symétrisée ψ_a s'écrit : $\psi_a(t) = \exp(-|a|\,t)$. C'est une fonction paire qui est identique à φ_a si $t \geq 0$. On a $\widehat{\psi}_a(\omega) = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$. Nous retenons que $(\mathscr{F}(\exp(-a|t|)))(\omega) = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$.
Pour $T > 0$, la porte P_T de largeur T satisfait aux contraintes suivantes : $P_T(t) = 1$ si $|t| \leq T/2$ et $P_T(t) = 0$ lorsque $t < -T/2$ ou $t > -T/2$. Son intégrale sur $\mathbb{R}$ est bien entendu finie ($P_T \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$) et on a $\widehat{P_T}(\omega) = \frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)$.

- Sinus cardinal

Pour $\theta \in \mathbb{R}$ nombre réel différent de zéro, on pose $\operatorname{sinc}\theta = \frac{\sin\theta}{\theta}$. On prolonge cette fonction par continuité en $\theta = 0$: $\operatorname{sinc} 0 = 1$. Alors $\widehat{P_T}(\omega) = T\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$.

- Parité

On remarque que si f est paire, sa transformée de Fourier $\mathscr{F} f$ est paire également [exercice].

- Linéarité

Si les fonctions f et g sont intégrables, leur somme est aussi intégrable et on a $\mathscr{F}(f+g) = \mathscr{F} f + \mathscr{F} g$. Si λ est un nombre complexe arbitraire et $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, on a $\mathscr{F}(\lambda f) = \lambda \mathscr{F} f$.

- Transformée de Fourier d'un retard

On se donne $a \in \mathbb{R}$. Alors
$(\mathscr{F}(f(t-a)))(\omega) = \exp(-i a \omega)(\mathscr{F} f)(\omega)$.

- Retard de la transformée de Fourier

De façon analogue, si ω_0 est un réel arbitraire,
$(\mathscr{F} f)(\omega - \omega_0) = (\mathscr{F}(\exp(i \omega_0 t) f(t)))(\omega)$.

- Changement d'échelle

On se donne $a > 0$. Alors $(\mathscr{F}(f(at)))(\omega) = \frac{1}{a}(\mathscr{F} f)\big(\frac{\omega}{a}\big)$.

- Une condition suffisante de limite nulle à l'infini

On se donne une fonction f dérivable de sorte que f et sa fonction dérivée f' appartiennent toutes deux à l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$:
$\int_{-\infty}^{\infty}(|f(t)| + |f'(t)|)\,\mathrm{d}t < \infty$. Alors la fonction f tend vers zéro à l'infini : $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$ et $\lim_{t \to -\infty} f(t) = 0$.

- Transformée de Fourier de la dérivée

Si la fonction f et sa dérivée f' sont intégrables sur $\mathbb{R}$, alors
$(\mathscr{F}(f'))(\omega) = i \omega (\mathscr{F} f)(\omega)$.

- Dérivée de la transformée de Fourier

On suppose que les fonctions f et $\mathbb{R} \ni t \longmapsto t f(t) \in \mathbb{C}$ appartiennent à l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, c'est à dire que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}(1+|t|)\,|f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge. Alors la transformée de Fourier $\mathbb{R} \ni \omega \longmapsto \widehat{f}(\omega) \in \mathbb{C}$ est une fonction dérivable et on a $\frac{\mathrm{d}\widehat{f}}{\mathrm{d}\omega} = -i(\mathscr{F}(t f(t)))(\omega)$.

- Transformée de Fourier d'un produit de convolution

On suppose que les fonctions f et g sont toutes deux intégrables sur $\mathbb{R}$. Alors leur produit de convolution $f*g$ appartient également à l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et on a $\mathscr{F}(f*g) = (\mathscr{F}f)\,(\mathscr{F}g)$. La transformée de Fourier transforme le produit de convolution en un produit ordinaire.

- A suivre !

Nous avons vu dans ce chapitre les propriétés essentielles où la transformation de Fourier ressemble à la transfomée de Laplace. Nous aborderons au chapitre suivant les propriétés spécifiques de la transformation de Fourier qui n'ont pas leur analogue avec la transfomée de Laplace.

Exercices

- Convolution de la porte et transformation de Fourier

Soit T un réel strictement positif et P_T la fonction "porte" définie par $P_T(t) = 1$ pour $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$ et $P_T(t) = 0$ sinon.

a) Montrer que le produit de convolution $P_T * P_T$ est une fonction φ_T définie par $\varphi_T(t) = t + T$ pour $-T \leq t \leq 0$, $\varphi_T(t) = T - t$ pour $0 \leq t \leq T$ et $\varphi_T(t) = 0$ sinon.

b) En déduire la transformée de Fourier de la fonction φ_T.

- Transformation de Fourier de la Gaussienne

On admet que $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2/2)\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\,\pi}$. En déduire la transformée de Fourier $\widehat{f}(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\,\omega\,t)\,f(t)\,\mathrm{d}t$ de la Gaussienne $f(t) \equiv \exp(-t^2/2)$.

-8- Transformation de Fourier

• Transformation de Fourier dans l'espace des fonctions intégrables

On se donne une fonction intégrable à valeurs complexes : $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, c'est à dire $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$. On a vu au chapitre précédent que pour $\omega \in \mathbb{R}$, le nombre complexe $\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\,\omega\,t)\, f(t)\,\mathrm{d}t$ est bien défini puisque $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. De plus, la transformée de Fourier $\mathscr{F} f(\omega) = \widehat{f}(\omega)$ de la fonction f est définie par la fonction $\mathbb{R} \ni \omega \longmapsto \widehat{f}(\omega) \in \mathbb{C}$.

• La transformée de Fourier d'une fonction intégrable est bornée

Pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, on a $|\widehat{f}(\omega)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,\mathrm{d}t$. En d'autres termes, $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

• La transformée de Fourier d'une fonction intégrable tend vers zéro à l'infini

Si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, sa transformée de Fourier $\widehat{f}(\omega)$ tend vers zéro lorsque ω tend vers $+\infty$ ou ω tend vers $-\infty$.

Nous constatons que la propriété est vraie pour les trois exemples fondamentaux introduits lors du chapitre précédent, à savoir l'exponentielle causale $\varphi_a(t) = H(t)\exp(-a\,t)$, l'exponentielle causale symétrisée $\psi_a(t) = \exp(-a\,|t|)$ et la porte P_T égale à 1 si $|t| \leq \frac{T}{2}$ et à zéro sinon [avec $a > 0$ et $T > 0$]. On a en effet $\widehat{\varphi}_a(\omega) = \frac{1}{a+i\,\omega}$, $\widehat{\psi}_a(\omega) = \frac{2\,a}{a^2+\omega^2}$ et $\widehat{P}_T(\omega) = T\,\mathrm{sinc}\big(\frac{\omega T}{2}\big)$; ces trois fonctions tendent bien vers zéro si $|\omega|$ tend vers l'infini.

• La transformée de Fourier d'une fonction intégrable est une fonction continue

Si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, la transformée de Fourier $\mathbb{R} \ni \omega \longmapsto \widehat{f}(\omega) \in \mathbb{C}$ est une fonction continue de l'argument ω. On a dans ce cas $\widehat{f} \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$.

On laisse le lecteur vérifier cette propriété pour les trois exemples fondamentaux rappelés ci-dessus.

- Opérateur de Fourier conjugué

Pour $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, on définit l'opérateur de Fourier conjugué $\overline{\mathscr{F}}$ par l'expression $(\overline{\mathscr{F}} f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\,\omega\,t)\, f(t)\,\mathrm{d}t$. Seul le signe de ω dans l'exponentielle complexe a changé.
On a la relation $(\overline{\mathscr{F}} f)(\omega) = (\mathscr{F} f)(-\omega)$.

- Théorème d'inversion de Fourier (première formulation)

Si d'une part la fonction f est intégrable ($f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$) et si de plus sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ est également intégrable ($\widehat{f} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$), alors on peut représenter la fonction f à l'aide de l'opérateur de Fourier conjugué : $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\,\omega\,t)\, \widehat{f}(\omega)\,\mathrm{d}\omega$. Cette égalité a lieu "pour presque tout" $t \in \mathbb{R}$ (pour tout réel t dans les applications en ingénierie). On peut écrire aussi
$f(t) = \frac{1}{2\pi}\,(\overline{\mathscr{F}}\widehat{f})(t)$ ou $f(t) = \frac{1}{2\pi}\,(\overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F} f))(t)$.
Seul le second exemple fondamental permet de tester ce théorème d'inversion de Fourier puisque les fonctions $\widehat{\varphi}_a$ et $\widehat{P}_T$ n'appartiennent pas à $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ [exercice !]. On a par contre $\widehat{\psi}_a \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ [exercice] et le théorème d'inversion de Fourier s'écrit dans ce cas particulier
$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\,\omega\,t)\, \frac{\mathrm{d}\omega}{a^2+\omega^2} = \frac{\pi}{a} \exp(-a\,|t|)$. On constate qu'on a calculé avec des fonctions élémentaires l'intégrale de la fonction
$\mathbb{R} \ni \omega \longmapsto \frac{1}{a^2+\omega^2} \exp(i\,\omega\,t) \in \mathbb{C}$ dont la primitive ne peut pas s'exprimer en termes de fonctions élémentaires.
L'égalité ponctuelle $f(t) = \frac{1}{2\pi}\,(\overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F} f))(t)$ peut s'écrire aussi
$f(t) = \frac{1}{2\pi}\big((\overline{\mathscr{F}}\circ\mathscr{F})f\big)(t)$ pour tout réel t, c'est à dire
$\big((\overline{\mathscr{F}}\circ\mathscr{F})f\big)(t) = 2\pi\, f(t)$. On en déduit donc une égalité entre fonctions $(\overline{\mathscr{F}}\circ\mathscr{F})f = 2\pi\, f$ pour toute fonction intégrable dont la transformée de Fourier $\widehat{f}$ est également intégrable.

- Inverse de l'opérateur de Fourier

On note dans ce paragraphe $\mathscr{E}$ l'espace des fonctions intégrables dont la transformée de Fourier $\widehat{f}$ est également intégrable. Alors l'égalité précédente $(\overline{\mathscr{F}}{}_{\circ}\mathscr{F})f = 2\pi f$ est vraie pour toute fonction $f \in \mathscr{E}$. On en déduit que l'opérateur $\overline{\mathscr{F}}{}_{\circ}\mathscr{F}$ transforme la fonction f en elle même, à un facteur 2π près. Si on appelle "identité" l'opérateur $\mathscr{E} \ni f \longmapsto \mathrm{id} f = f \in \mathscr{E}$, la relation $(\overline{\mathscr{F}}{}_{\circ}\mathscr{F})f = 2\pi\,\mathrm{id} f$ valable pour toute fonction $f \in \mathscr{E}$ peut aussi s'écrire comme une relation entre opérateurs de l'espace $\mathscr{E}$: $\overline{\mathscr{F}}{}_{\circ}\mathscr{F} = 2\pi\,\mathrm{id}$. Quand on compose les opérateurs $\mathscr{F}$ et $\frac{1}{2\pi}\overline{\mathscr{F}}$, on trouve l'identité :
$\left(\frac{1}{2\pi}\overline{\mathscr{F}}\right)_{\circ}\mathscr{F} = \mathrm{id}$. On peut montrer [exercice !] qu'on a aussi
$\mathscr{F}_{\circ}\left(\frac{1}{2\pi}\overline{\mathscr{F}}\right) = \mathrm{id}$. En d'autres termes, $\mathscr{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi}\overline{\mathscr{F}}$. A un facteur 2π près, l'inverse de la transformée de Fourier est égal à l'opérateur de Fourier conjugué !

- Approximation des fonctions dans l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$

Si on se donne une fonction de carré intégrable ($f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$), elle n'est pas en général intégrable sur $\mathbb{R}$. Mais si on la tronque à l'aide d'une fonction porte en posant pour k entier positif, $f_k = P_{2k}\,f$, c'est à dire $f_k(t) = f(t)$ si $|t| \leq k$ et $f_k = 0$ sinon, on obtient une suite de fonctions dans l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Cette suite f_k converge vers f dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$: $\|f - f_k\|_2$ tend vers zéro si k tend vers l'infini.

- Transformée de Fourier dans l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$

Comme la suite f_k appartient à $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, sa transformée de Fourier $\widehat{f_k}$ est bien définie *via* la relation $\widehat{f_k}(\omega) = \int_{-k}^{k} \exp(-i\,\omega\,t)\,f(t)\,\mathrm{d}t$. On peut montrer que cette suite $\widehat{f_k}$ appartient à l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et converge dans cet espace vers une fonction notée $\widehat{f}$ ou $\mathscr{F}f$ qui définit la transformation de Fourier dans l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. De plus, on a pour "presque tout" $\omega \in \mathbb{R}$,
$(\mathscr{F}f)(\omega) = \widehat{f}(\omega) = \lim_{k\to+\infty} \int_{-k}^{k} \exp(-i\,\omega\,t)\,f(t)\,\mathrm{d}t$.
On constate que la définition de la transformée de Fourier dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$

n'est pas aussi immédiate que dans l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Elle a de toutefois de nombreuses propriétés, très simples à énoncer.

- Conservation, à un facteur 2π près, du produit scalaire

On rappelle que pour deux fonctions f et g de carré intégrables, le produit scalaire $(f,g) \equiv \int_{\mathbb{R}} f(t)\,\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$ est bien défini. On a la relation de Bessel-Parseval : $(\widehat{f},\widehat{g}) = 2\pi\,(f,g)$. A un facteur 2π près, la transformation de Fourier conserve le produit scalaire. Dans le cas où $f = g$, cette conservation du produit scalaire s'écrit comme une conservation des normes : $(\widehat{f},\widehat{f}) = \|\mathscr{F} f\|_2^2 = 2\pi\,\|f\|_2^2 = 2\pi\,(f,f)$.

- Opérateur de Fourier conjugué dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$

On étend comme dans le cas précédent la transformée de Fourier conjuguée à l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$:
$(\overline{\mathscr{F}} f)(\omega) = \widehat{f}(\omega) = \lim_{k\to+\infty} \int_{-k}^{k} \exp(i\,\omega\,t)\,f(t)\,\mathrm{d}t$. On a également, pour $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, $(\overline{\mathscr{F}} f)(\omega) = (\mathscr{F} f)(-\omega)$.

- Théorème d'inversion de Fourier (seconde formulation)

On a dans l'espace $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ les relations suivantes entre l'opérateur de Fourier $\mathscr{F}$ et l'opérateur de Fourier conjugué $\overline{\mathscr{F}}$:
$\overline{\mathscr{F}}\circ\mathscr{F} = \mathscr{F}\circ\overline{\mathscr{F}} = 2\pi\,\mathrm{id}$. On peut aussi écrire ces relations sous la forme $\mathscr{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi}\overline{\mathscr{F}}$. A un facteur 2π près, l'inverse de la transformée de Fourier dans l'espace des fonctions de carré intégrable est égal à l'opérateur de Fourier conjugué.

On en déduit que pour toute fonction f de carré intégrable, on a $f = \frac{1}{2\pi}(\mathscr{F}\circ\overline{\mathscr{F}})(f)$ et on a aussi $f = \frac{1}{2\pi}(\overline{\mathscr{F}}\circ\mathscr{F})(f)$. En particulier pour (presque) tout nombre réel t, on a les égalités
$f(t) = \frac{1}{2\pi}\big(\mathscr{F}(\overline{\mathscr{F}} f)\big)(t)$ et $f(t) = \frac{1}{2\pi}\big(\overline{\mathscr{F}}(\mathscr{F} f)\big)(t)$. On ne peut ensuite écrire ces égalités avec des intégrales que si les fonctions f et $\mathscr{F} f$ sont intégrables.

- Calcul d'une transformée de Fourier à l'aide du théorème d'inversion de Fourier

Pour la fonction porte, on se donne $T > 0$. On déduit [exercice !] des égalités précédentes la relation $\mathscr{F}\big(\mathrm{sinc}\big(\frac{\omega T}{2}\big)\big)(t) = \frac{2\pi}{T} P_T(t)$. En particulier pour $T = 2$, $(\mathscr{F}\mathrm{sinc})(t) = \pi$ si $|t| < 1$ et $(\mathscr{F}\mathrm{sinc})(t) = 0$ si $|t| > 1$. Grâce au théorème d'inversion de Fourier, on a calculé la transformée de Fourier du sinus cardinal sans jamais écrire une seule intégrale !

Exercices

- Transformation de Fourier du sinus cardinal

On se donne $T > 0$ et on note P_T la fonction porte : $P_T(t) = 1$ si $|t| \leq \frac{T}{2}$, $P_T(t) = 0$ si $|t| > \frac{T}{2}$.

a) Quelle est sa transformée de Fourier ?

Pour t réel, on définit le sinus cardinal $\mathrm{sinc}(t)$ par la relation $\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin t}{t}$.

b) En choisissant bien le paramètre T, calculer la transformée de Fourier du sinus cardinal.

- Autour de la transformée de Fourier d'une loi de Cauchy

Pour t réel, une loi de Cauchy est une fonction de la forme $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

a) A l'aide de la transformée de Fourier de la fonction $\exp(-a\,|t\,|)$ et de la formule d'inversion de Fourier, calculer la transformée de Fourier $\widehat{f}(\omega)$.

b) En déduire la transformée de Fourier de la fonction $g(t) = \frac{1}{10+6t+t^2}$.

c) Calculer la transformée de Fourier de la fonction $h(t) = \frac{t}{1+t^2}$.

• Quelques intégrales

a) A partir des résultats du premier exercice sur la transformation de Fourier, expliciter la transformée de Fourier du carré du sinus cardinal, c'est à dire de la fonction f définie par $f(t) = \frac{\sin^2 t}{t^2}$.

b) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} \, \mathrm{d}t$.

c) Même question pour l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 t}{t^4} \, \mathrm{d}t$.

d) Préciser, selon les valeurs du paramètre $\omega \in \mathbb{R}$, les valeurs prises par l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} \cos(\omega t) \, \mathrm{d}t$.

• Transformation de Fourier [février 2014]

On se donne un réel a strictement positif et la fonction f définie par $f(t) = \exp(-a\,|t|)$.

a) Quelle est l'expression de $(\mathscr{F} f)(\omega)$?

b) Rappeler pourquoi la fonction $(\mathscr{F} f)(\omega)$ est à la fois paire et réelle.

c) Expliquer pourquoi la fonction $g(\omega) = \frac{1}{a^2+\omega^2}$ appartient à l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.

d) Pour t réel arbitraire, montrer que l'expression $\Phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) \exp(i\,\omega t) \, \mathrm{d}\omega$ est bien définie.

e) A l'aide de quel opérateur est-elle reliée à la fonction g ?

f) Calculer une expresion analytique de $\Phi(t)$ pour tout nombre réel t.

• Transformation de Fourier [février 2015]

On note P_T la fonction porte : $P_T(t) = 1$ si $|t| \leq \frac{T}{2}$, $P_T(t) = 0$ si $|t| > \frac{T}{2}$. On note f le produit de convolution $f = P_T * P_T$.

a) Rappeler l'expression de la transformée de Fourier $\widehat{P_T}(\omega)$ de la porte P_T.

b) Montrer que la fonction f admet l'expression suivante : $f(t) = T - |t|$ si $|t| \leq T$, $f(t) = 0$ si $|t| > T$.

c) Représenter graphiquement la fonction f.

d) Calculer la transformée de Fourier $\widehat{f}(\omega)$ de la fonction f. Appartient-elle à l'espace $L^1(\mathbb{R})$ des fonctions intégrables ?
On désigne par sinc la fonction sinus cardinal : $\operatorname{sinc}(\theta) = \frac{\sin\theta}{\theta}$.
e) Calculer en fonction de t les valeurs de l'intégrale
$I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right)^2 \exp(i\,\omega\, t)\,\mathrm{d}\omega$.
f) En déduire une expression analytique de l'intégrale
$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\operatorname{sinc}(\theta)\right)^2 \mathrm{d}\theta$.

• Convolution et transformation de Fourier [avril 2016]

On se donne un nombre réel τ strictement positif et la fonction f définie par $f(t) = \exp(-\mid t\mid/\tau)$. On remarque que $f(t) = \exp(t/\tau)$ si $t \leq 0$ et $f(t) = \exp(-t/\tau)$ si $t \geq 0$.
a) Calculer la transformée de Fourier $\widehat{f}(\omega)$ de la fonction f.
b) En déduire la valeur de l'intégrale
$I(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) \exp(i\,\omega\, t)\,\mathrm{d}\omega$.
c) Que vaut $I(0)$?
d) Pouvait-on prévoir le résultat par une autre méthode ?
e) Montrer que le produit de convolution $\varphi(t) \equiv (f * f)(t)$ est une fonction paire de l'argument t.
f) Si t est positif ou nul, calculer le produit de convolution $\varphi(t) = (f * f)(t)$.
g) Quelle est l'expression de $\varphi(t)$ si t est un réel quelconque ?
h) Que vaut $\varphi'(0)$?
i) Calculer l'expression de la transformée de Fourier $\widehat{\varphi}(\omega)$ de la fonction φ.
j) En déduire la valeur de l'intégrale $J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+\omega^2)^2}\,\mathrm{d}\omega$.

• Transformation de Fourier [février 2017]

On pose $\varphi(t) = \exp(-|t|)$.
a) Rappeler pourquoi la fonction φ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
b) Calculer les valeurs $\widehat{\varphi}(\omega)$ de la transformée de Fourier $\widehat{\varphi}$ de cette fonction.

c) Montrer que le produit de convolution $f = \varphi * \varphi$ est une fonction paire.
d) Calculer les valeurs $f(t)$ de ce produit de convolution pour tout nombre réel t.
e) Calculer les valeurs $\widehat{f}(\omega)$ de la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de ce produit de convolution.
f) En déduire les valeurs des intégrales $I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\omega t)}{(1+\omega^2)^2} \, \mathrm{d}\omega$ pour tout nombre réel t.

- Transformation de Fourier [avril 2017]

On pose $\varphi(t) = \exp(-t)$ si $t > 0$ et $\varphi(t) = 0$ si $t \leq 0$.
a) Rappeler pourquoi la fonction φ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
b) Calculer les valeurs $\widehat{\varphi}(\omega)$ de la transformée de Fourier $\widehat{\varphi}$ de cette fonction.
c) Montrer que le produit de convolution $f = \varphi * \varphi$ est une fonction causale, c'est à dire que $f(t) = 0$ si $t < 0$.
d) Calculer les valeurs $f(t)$ de ce produit de convolution pour tout nombre réel t.
e) Calculer les valeurs $\widehat{f}(\omega)$ de la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de ce produit de convolution.
f) En déduire les valeurs des intégrales $I(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(i\omega t)}{(1+i\omega)^2} \, \mathrm{d}\omega$ pour tout nombre réel$t$.

-9- Introduction aux distributions

- Dérivation de la fonction valeur absolue

On pose $v(t) = |t|$. On sait que pour t non nul, cette fonction est dérivable et sa dérivée $v'(t)$ est égale a la fonction "signe" définie par $\operatorname{sgn} t = 1$ si $t > 0$ et $\operatorname{sgn} t = -1$ si $t < 0$. On peut constater [exercice !] que, même si la valeur absolue n'est pas dérivable en zéro, la relation fondamentale du calcul différentiel :
$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$ reste valable pour cette fonction ; en particulier, $v(t) = v(0) + \int_0^t \operatorname{sgn}\theta\,\mathrm{d}\theta$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

- Dérivation de la fonction de Heaviside

La fonction de Heaviside H satisfait aux relations $H(t) = 0$ si $t < 0$ et $H(t) = 1$ si $t > 0$. Elle n'est pas dérivable en zéro mais elle l'est en tout autre point $t \neq 0$ et $H'(t) = 0$ si $t \neq 0$. Pourtant, si on calcule l'expression $\int_0^t H'(\theta)\,\mathrm{d}\theta$, on ne retrouve pas $H(t)$ pour tout t ! Il manque "quelque chose" à la dérivée de la fonction de Heaviside.

- Valeur ponctuelle ou fonction test ?

On se donne (pour fixer les idées) une fonction bornée $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$. Si φ est une fonction intégrable ($\varphi \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$), l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est un nombre réel bien défini. La question posée est la suivante : à partir de toutes les intégrales $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ pour une certaine famille de fonctions de test, peut-on caractériser complètement la fonction f ? Au lieu de voir une fonction f comme une famille de nombres réels $f(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$, on la considère comme une famille de nombres $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ pour une famille de "fonctions test" φ.

- Fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide

Le mathématicien Laurent Schwartz (1915–2002) a proposé un espace de fonctions test $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ qui a permis de donner un bon cadre mathématique pour généraliser la notion de fonction. Une fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ appartient à l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites. D'une part, la fonction φ est indéfiniment dérivable et on note $\varphi^{(k)}$ la dérivée k^{o} de la fonction φ. D'autre part la fonction φ est à décroissance rapide : la fonction φ et toutes ses dérivées $\varphi^{(k)}$ tendent vers zéro à l'infini plus vite que tout polynôme ; pour tout entier k et tout entier ℓ, l'expression $t^\ell \varphi^{(k)}(t)$ tend vers zéro si $|t|$ tend vers l'infini.

- Fonctions gaussiennes

On se donne $\theta \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. La fonction gaussienne $\varphi_{\theta,\sigma}$ centrée au point θ et d'écart type σ (ou de variance σ^2) est définie par $\varphi_{\theta,\sigma}(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\big(-\frac{(t-\theta)^2}{2\sigma^2}\big)$. Elle appartient à l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide. Et c'est encore vrai de toutes ses dérivées $\varphi_{\theta,\sigma}^{(k)}$. Toutes les fonctions $\varphi_{\theta,\sigma}^{(k)}$ sont des fonctions test que nous utilisons dans la suite de cette leçon. On remarque aussi [exercice !] que l'on a $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\theta,\sigma}(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

- L'espace des fonctions infiniment dérivables à décroissance rapide est stable par dérivation

C'est une propriété fondamentale qui est conséquence immédiate de la définition de l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R})$: si $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, alors sa dérivée φ' appartient également à l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. En d'autres termes,
$\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \implies \varphi' \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

- Convergence dans l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide

La notion de convergence dans l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ est délicate et nous n'entrerons pas dans le cadre de ce cours dans les difficultés mathématiques liées à cette question. Afin d'être complets, notons simplement qu'une suite de fonctions $\varphi_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ converge vers la fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ si et seulement si pour tout k et ℓ entiers, les fonctions $t \longmapsto t^\ell\, \varphi_n^{(k)}(t)$ convergent uniformément vers la fonction $t \longmapsto t^\ell\, \varphi^{(k)}(t)$. En d'autres termes, pour tout k et ℓ entiers, $\|t^\ell\, \varphi_n^{(k)}(t) - t^\ell\, \varphi^{(k)}(t)\|_\infty$ tend vers zéro si n tend vers l'infini.

- Action d'une fonction contre une fonction test

Comme toute fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ décroît plus vite vers zéro à l'infini que la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t^2}$ dont l'intégrale converge à l'infini, l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|\, \mathrm{d}t$ est bien définie et $\varphi \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$: $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \subset \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Donc pour $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t$ est bien définie. On l'appelle "action de la fonction f contre la fonction test φ" et on la note $< T_f, \varphi >$. Par définition, $< T_f, \varphi >= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t$; c'est une simple intégrale convergente.

- Les actions contre toutes les fonctions test permettent de déterminer les valeurs ponctuelles

On se donne une fonction f bornée "inconnue" pour laquelle on se donne toutes les actions $< T_f, \varphi >$ pour toutes les fonctions $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Alors la fonction f est parfaitement connue ; les valeurs $f(t)$ sont connues pour (presque) tout $t \in \mathbb{R}$.

On peut se convaincre de cette propriété pour une fonction continue au point θ. Dans ce cas, la valeur numérique $f(\theta)$ apparaît comme la limite des intégrales $< T_f, \varphi_{\theta,\sigma} >$ pour σ tendant vers zéro.

- Distribution

Une distribution T généralise l'opération d'intégration proposée avec l'intégration T_f. Une distribution $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ associe à toute fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ le nombre $< T, \varphi >$. Deux conditions doivent être satisfaites : la linéarité et la continuité. De façon précise, l'application $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \ni \varphi \longmapsto < T, \varphi > \in \mathbb{R}$ est linéaire :
$< T, \varphi + \psi > = < T, \varphi > + < T, \psi >$ si φ et ψ sont deux fonctions test et $< T, \lambda\, \varphi >= \lambda\, < T, \varphi >$ si λ est un nombre réel. De plus,

si la suite $\varphi_n \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ converge vers la fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ alors la suite numérique $< T, \varphi_n >$ converge vers $< T, \varphi >$ lorsque n tend vers l'infini.
Deux distributions T et U sont égales si et seulement si pour toute fonction test $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a égalité des nombres $< T, \varphi >$ et $< U, \varphi >$: $< T, \varphi >=< U, \varphi >$, $\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.
Bien entendu, si f est une fonction bornée, l'opération T_f définit une distribution avec la relation $< T_f, \varphi >= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t$ [exercice !]. Mais il existe aussi des distributions qui ne se réduisent pas à des intégrales fonctionnelles de la forme $< T_f, \varphi >$.

- Dérivée d'une fonction au sens des distributions

Si f est une fonction bornée dérivable dont la dérivée f' est également bornée, on peut calculer $< T_{f'}, \varphi >$ à l'aide d'une intégration par parties. Il vient alors
$< T_{f'}, \varphi >= -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \varphi'(t)\, \mathrm{d}t = - < T_f, \varphi' >$, ce pour toute fonction test. On constate que même si la fonction f n'est pas dérivable, le nombre $- < T_f, \varphi' >$ a un sens pour toute fonction test. Cette relation définit la dérivée $(T_f)'$ au sens des distributions. Par définition, la distribution $(T_f)'$ "dérivée de f au sens des distributions" agit sur une fonction test φ *via* la relation
$< (T_f)', \varphi >= - < T_f, \varphi' >$.
Dans le cas ou la fonction f est dérivable, une intégration par parties montre que l'on a [exercice !] $(T_f)' = T_{f'}$ et la dérivée au sens des distribution est alors simplement l'intégration de la dérivée contre une fonction test.

- Dérivée de la fonction de Heaviside au sens des distributions

Si on applique la définition précédente à la fonction de Heaviside, on obtient [exercice !] $< (T_H)', \varphi >= \varphi(0)$ pour toute fonction test.

• Masse de Dirac δ.

On peut vérifier que l'application $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \ni \varphi \longmapsto \varphi(0) \in \mathbb{R}$ est bien une distribution. C'est par définition la "masse de Dirac" δ, proposée par le physicien Paul Dirac (1902–1984). On a

$< \delta, \varphi >= \varphi(0)$.

La dérivée de la fonction de Heaviside au sens des distributions peut maintenant s'écrire $(T_H)' = \delta$ dans l'espace $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ des distributions. Cette égalité signifie simplement que pour toute fonction test $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a $< (T_H)', \varphi >= \varphi(0)$.

• Approximation de la masse de Dirac par une famille de fonctions

On définit, pour tout $\varepsilon > 0$ la fonction δ_ε par la relation $\delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}$ si $|t| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $\delta_\varepsilon(t) = 0$ si $|t| > \frac{\varepsilon}{2}$. Alors $< T_{\delta_\varepsilon}, \varphi >= \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est exactement la valeur moyenne de la fonction φ sur l'intervalle $]-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}[$. Comme la fonction test φ est continue en zéro, la valeur moyenne converge vers $\varphi(0)$ si ε tend vers zéro [exercice !]. Les (distributions associées aux) fonctions δ_ε approchent la masse de Dirac.

• La masse de Dirac n'est pas une fonction

Il n'existe pas de fonction f de sorte que $T_f = \delta$, c'est à dire telle que pour toute fonction test $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on ait $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(0)$. Si une telle fonction existe, elle est nécessairement nulle. Mais alors l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est nulle pour toute fonction test φ et ne peut donc valoir $\varphi(0)$ si l'"ordonnée à l'origine" de la fonction φ est non nulle.

Les distributions généralisent véritablement la notion de fonction. Toute fonction définit une distribution. De plus, il existe des distributions qui ne se réduisent pas à des fonctions !

• Dérivée d'une distribution

Nous avons vu que si la distribution $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ est de la forme $T = T_f$ pour une certaine fonction f, on a la relation

$< T', \varphi >= - < T, \varphi' >$ pour toute fonction test $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Si maintenant T est une distribution quelconque, le nombre $- < T, \varphi' >$ peut être calculé pour toute fonction test. Par définition, il est égal à l'action de la distribution dérivée T' contre la fonction test φ: $< T', \varphi >= - < T, \varphi' >$.
Toute distribution est indéfiniment dérivable au sens de cette définition. En conséquence, toute fonction est indéfiniment dérivable au sens des distributions !

- Dérivée au sens des distributions d'une fonction qui a un point de discontinuité

On se donne une fonction f bornée très régulière sauf au point $\theta \in \mathbb{R}$. En ce point, la fonction f est discontinue mais elle a une limite à gauche y_- et une limite à droite y_+. On note $[f]_\theta \equiv y_+ - y_-$ le saut de la fonction f au point θ. On définit aussi la masse de Dirac δ_θ au point θ par la relation $< \delta_\theta, \varphi >= \varphi(\theta)$. En particulier, $\delta_0 = \delta$, masse de Dirac en zéro. De plus, on note f' la dérivée de f, définie partout sauf au point θ. On a $< T_{f'}, \varphi >= \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t$. Alors la dérivée de la fonction f au sens des distributions $(T_f)'$ peut s'exprimer en fonction de la dérivée classique f' et de la masse de Dirac au point θ: $(T_f)' = T_{f'} + [f]_\theta\, \delta_\theta$.

- Epilogue sur la valeur absolue et la fonction de Heaviside

Pour l'exemple de la valeur absolue, la fonction $v(t)$ est continue à l'origine et seule la dérivée classique (la fonction signe) contribue pour construire la dérivée au sens des distributions. Dans la cas de la fonction de Heaviside au contraire, la dérivée classique est nulle, le saut de la fonction au point de discontinuité est égal à 1 et on a $(T_H)' = \delta_0$.

Exercices

• Dérivées de la valeur absolue

Soit v la fonction "valeur absolue" : $v(t) = -t$ pour $t \leq 0$ et $v(t) = t$ pour $t \geq 0$.

a) Calculer la dérivée de v au sens des distributions et montrer qu'elle coïncide avec la dérivée usuelle.

b) Poursuivre la question précédente avec l'évaluation de la dérivée seconde de la fonction v au sens des distributions.

• Equation différentielle du premier ordre

Soit λ un nombre réel (ou complexe !) et H la fonction de Heaviside.

a) Calculer au sens des distributions l'expression
$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \lambda\right)\left(H(t) \exp(-\lambda t)\right)$.

b) Comparer avec la solution $u(t)$ (qu'on précisera !) de l'équation différentielle du premier ordre $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \lambda\right)\left(u(t)\right) = 0$, associée à la condition initiale $u(0) = 1$.

• Dérivée de la masse de Dirac

On rappelle que la masse de Dirac δ est définie par son action sur les fonctions-test : $< \delta , \varphi > = \varphi(0)$. On introduit un nombre réel strictement positif ε "petit" et on approche la masse de Dirac par la fonction χ_ε égale à la fonction porte P_ε multipliée par $\frac{1}{\varepsilon}$:
$\chi_\varepsilon(t) = 1/\varepsilon$ pour $|t| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $\chi_\varepsilon(t) = 0$ sinon.

a) Calculer la dérivée de χ_ε au sens des distributions.

b) Montrer que pour une fonction test φ assez régulière fixée, le nombre $< \chi'_\varepsilon , \varphi >$ converge si ε tend vers zéro vers un nombre qui ne dépend que de la fonction φ.

c) Vérifier, en revenant à la définition de la dérivée d'une distribution, que cette limite est égale au nombre $< \delta' , \varphi >$.

- Equation différentielle du second ordre

Soit ω un nombre réel et H la fonction de Heaviside.

a) Calculer au sens des distributions l'expression $\big(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2\big)\big(H(t)\,\frac{\sin\omega t}{\omega}\big)$.

b) Comparer avec la solution $\sigma(t)$ de l'équation différentielle du second ordre $\big(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2\big)\big(\sigma(t)\big) = 0$, associée aux conditions initiales $\sigma(0)=0,\ \sigma'(0)=1$,

- Dérivation au sens des distributions [février 2013]

Soit $f(t)$ la fonction définie par $f(t)=-t^2$ si $t\leq 0$ et $f(t)=t^2$ si $t>0$.

a) Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa fonction dérivée $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ pour tout $t\in\mathbb{R}$.

b) Montrer que $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sauf pour $t=0$. Calculer la fonction dérivée seconde $\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}t^2}$ au sens des distributions.

c) Montrer que $\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}t^2}$ n'est pas une fonction continue en tout point de $\mathbb{R}$.

d) Calculer la dérivée troisième $\frac{\mathrm{d}^3f}{\mathrm{d}t^3}$ au sens des distributions.

- Equation différentielle avec second membre distribution [février 2013]

On pose $f(t)=\exp\big(-\,|\,t\,|\,\big)$ pour $t\in\mathbb{R}$.

a) Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sauf en $t=0$. Calculer la fonction dérivée $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$.

b) Monter en dérivant la dérivée première au sens des distributions que la fonction f vérifie $\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}t^2}-f(t) = -2\,\delta$, où δ désigne la masse de Dirac en zéro.

- Dérivation au sens des distributions [avril 2013]

Soit $f(t)$ la fonction définie par $f(t)=0$ si $t\leq 0$, $f(t)=\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}$ si $0<t<1$ et $f(t)=\frac{1}{6}$ si $t\geq 1$.

a) Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa fonction dérivée $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On regardera en particulier le cas des points $t = 0$ et $t = 1$.

b) Montrer que $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sauf pour $t = 0$ et $t = 1$.

c) Calculer la fonction dérivée seconde $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}$ au sens des distributions.

d) Montrer que $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}t^2}$ n'est pas une fonction continue en tout point de $\mathbb{R}$.

e) Calculer la dérivée troisième $\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}t^3}$ au sens des distributions.

• Dérivation au sens des distributions [février 2015]

Soit $f(t)$ la fonction définie par $f(t) = 0$ si $t < 0$, $f(t) = 3t^2 - 2t^3$ si $0 \leq t \leq 1$ et $f(t) = 1$ si $t > 1$.

a) Dessiner rapidement le graphe de la fonction f.

b) Montrer qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

c) Calculer la fonction dérivée $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On regardera en particulier le cas des points $t = 0$ et $t = 1$.

d) Reprendre les trois questions précédente en s'intéressant cette fois à la fonction dérivée $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$. En particulier, on répondra avec précision à la question de savoir si $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ est dérivable en $t = 0$ et en $t = 1$.

e) Quelle est la dérivée f'' au sens des distributions de la fonction dérivée $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$?

f) Montrer que c'est une fonction discontinue en deux points que l'on précisera.

g) Calculer la dérivée troisième f''' de la fonction f au sens des distributions. Expliquer pourquoi ce n'est pas une fonction.

• Dérivation au sens des distributions [avril 2015]

Soit $f(t)$ la fonction périodique de période 2π définie par $f(t) = |t|$ si $-\pi \leq t \leq \pi$.

a) Calculer sa dérivée f' première au sens des distributions.

b) La distribution f' est-elle une fonction ?

c) Justifier votre réponse.

d) Calculer la dérivée seconde f'' de la fonction f au sens des distributions.

On désigne par H la fonction de Heaviside : $H(t) = 1$ si $t \geq 0$ et $H(t) = 0$ si $t < 0$. On pose $g(t) = H(t)\exp(-2t)$.

e) La fonction g est-elle continue ?

f) Est-elle causale ?

g) Expliciter, en justifiant vos calculs, la distribution $K = g' + 2g(t)$.

- Dérivation au sens des distributions [février 2016]

Soit $f(t)$ la fonction définie par $f(t) = -1$ si $t < -\frac{\pi}{2}$, $f(t) = \sin t$ si $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ et $f(t) = +1$ si $t > \frac{\pi}{2}$.

a) Dessiner le graphe de la fonction f.

b) Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

c) Préciser sa fonction dérivée f' et

d) Dessiner le graphe de la fonction f'.

e) La fonction f' est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

f) Justifier avec soin votre réponse.

g) Calculer la dérivée seconde f'' (c'est à dire la dérivée de la fonction f') de la fonction f au sens des distributions.

h) Justifier avec soin votre réponse.

- Dérivation au sens des distributions [février 2017]

Soit $f(t)$ la fonction définie par $f(t) = 0$ si $t < 0$, $f(t) = t\,(1-t)$ si $0 \leq t \leq 1$ et $f(t) = 0$ si $t > 1$.

a) Dessiner le graphe de la fonction f.

b) Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, sauf en certains points que l'on précisera.

d) Calculer la dérivée de f au sens des distributions.

e) Calculer la dérivée seconde de f au sens des distributions.

f) Est-ce une fonction ?

-10- Transformée de Fourier des distributions

- Multiplication d'une distribution par une fonction régulière "à croissance lente"

Une fonction régulière à croissance lente est par définition une fonction ψ indéfiniment dérivable dont toutes les dérivées sont au plus à croissance polynomiale : pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, il existe une constante C_k et un entier $\ell_k \in \mathbb{N}$ de sorte que pour tout t de valeur absolue assez grande, $|\psi^{(k)}(t)| \leq C_k\,|t|^{\ell_k}$. Alors pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, le produit $\psi\,\varphi$ appartient à l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ [exercice !]. On définit le produit de la distribution $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ par la fonction à croissance lente ψ *via* son action sur une fonction test $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$: $< \psi T, \varphi >=< T, \psi\,\varphi >$.

- Transformée de Fourier des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide

Toute fonction indéfiniment dérivable à décroissance rapide est intégrable : $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \subset \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. Donc toute fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ a une transformée de Fourier $\widehat{\varphi}$ qu'on peut calculer avec la relation $\widehat{\varphi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\,\omega\,t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t$. On dispose aussi de la transformée de Fourier conjuguée : $\overline{\mathscr{F}}\varphi(\omega) = \widehat{\varphi}(-\omega)$.

- L'espace des fonctions à décroissance rapide est stable par transformation de Fourier

Si $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, alors sa transformée de Fourier $\mathscr{F}\varphi \equiv \widehat{\varphi}$ appartient également à l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R})$: $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \Longrightarrow \mathscr{F}\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

- Inversion de Fourier dans l'espace des fonctions à décroissance rapide

Si $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, alors on a aussi $\mathscr{F}\varphi \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et on peut écrire la formule de réciprocité de Fourier : $\varphi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\,\omega\,t)\,\widehat{\varphi}(\omega)\,\mathrm{d}\omega$. Donc $(\overline{\mathscr{F}}\circ\mathscr{F})(\varphi) = (\mathscr{F}\circ\overline{\mathscr{F}}(\varphi) = 2\pi\,\varphi$ pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. On définit l'opérateur identité id de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ par la relation $\mathrm{id}(\varphi) = \varphi$. On a alors une égalité entre opérateurs : $\overline{\mathscr{F}}\circ\mathscr{F} = \mathscr{F}\circ\overline{\mathscr{F}} = 2\pi\,\mathrm{id}$. Par suite, dans l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide, l'opérateur inverse de la transformée de Fourier est, à un facteur 2π près, l'opérateur de Fourier conjugué : $\mathscr{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi}\overline{\mathscr{F}}$.

- Dualité de la transformation de Fourier

Pour $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a la relation suivante entre nombres réels : $\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\widehat{\varphi}(t)\,\mathrm{d}t$. La preuve demande simplement une utilisation soignée du théorème de Fubini.

- Transformée de Fourier des distributions

On se donne une distribution $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$. Par définition, sa transformée de Fourier $\mathscr{F}T \equiv \widehat{T}$ agit sur une fonction test $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ selon la relation $< \widehat{T}, \varphi >=< T, \widehat{\varphi} >$. On peut bien sûr écrire aussi $< \mathscr{F}T, \varphi >=< T, \mathscr{F}\varphi >$.

- Cohérence de la définition de la transformée de Fourier des distributions

Pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$, on a vu lors de la leçon précédente qu'elle définit une distribution que nous notons encore pour quelques lignes T_f : $< T_f, \varphi >= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t$. Si de plus $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, la relation de dualité $\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\widehat{\varphi}(t)\,\mathrm{d}t$ peut maintenant s'écrire $< T_{\widehat{f}}, \varphi > =< T_f, \varphi >$ qui par définition est égal à $< \widehat{T_f}, \varphi >$, ce pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. On en déduit une égalité dans l'espace des distributions : $\widehat{T_f} = T_{\widehat{f}}$ pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. La définition de la transformée de Fourier des distributions est cohérente avec la définition de la transformée de Fourier des fonctions.

• Notation

On se donne une fonction $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$. Dans la suite du cours, nous notons simplement f la distribution T_f: $< f, \varphi >= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t$. Alors la notation f' désigne (sauf mention contraire) la dérivée au sens des distributions de la fonction f: $< f', \varphi >= -< f, \varphi' >$ pour $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. De plus, la transformée de Fourier $\mathscr{F} f$ de la fonction f est, elle aussi, toujours définie au sens des distributions et on a simplement $< \mathscr{F} f, \varphi >= < f, \mathscr{F} \varphi >$.

• Transformée de Fourier de la masse de Dirac

On rappelle que $< \delta, \varphi >= \varphi(0)$ pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. On a alors en utilisant la définition de la transformée des distributions $\widehat{\delta} = 1$: pour toute fonction test $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $< \widehat{\delta}, \varphi >= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, \mathrm{d}t$. On peut illustrer cette propriété avec ce que l'on sait de la tranformée de Fourier des fonctions et de l'approximation de la masse de Dirac par des fonctions simples. Si on approche δ par la famille de fonctions δ_ε définies par $\delta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}$ si $|t| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $\delta_\varepsilon(t) = 0$ sinon, on a par un calcul classique vu à la leçon d'introduction de la transformée de Fourier, $\widehat{\delta_\varepsilon}(\omega) = \operatorname{sinc}\big(\frac{\varepsilon\,\omega}{2}\big)$. Cette fonction converge simplement vers la fonction “un” si ε tend vers zéro.

• Transformée de Fourier de la masse de Dirac au point a

On rappelle que si $a \in \mathbb{R}$, $< \delta_a, \varphi >= \varphi(a)$. Alors la distribution $\mathscr{F} \delta_a$ est en fait une fonction et $(\mathscr{F} \delta_a)(t) = \exp(-i a t)$. On a aussi $(\overline{\mathscr{F}} \delta_a)(t) = \exp(i a t)$. Avec cette définition, les polynômes prennent un sens dans l'espace $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ des distributions.

• Inversion de Fourier dans l'espace des distributions

On se donne l'opérateur identité id de $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ par la relation $\mathrm{id}\, T = T$ pour toute distribution T. La transformation de

Fourier des distributions $\mathscr{F}$ satisfait aux relations entre opérateurs : $\overline{\mathscr{F}}\circ\mathscr{F} = \mathscr{F}\circ\overline{\mathscr{F}} = 2\pi\,\mathrm{id}$. Dans l'espace $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ des distributions, l'opérateur inverse de la transformée de Fourier est, à un facteur 2π près, l'opérateur de Fourier conjugué : $\mathscr{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi}\overline{\mathscr{F}}$.
On a alors $\mathscr{F}(\exp(iat)) = 2\pi\,\delta_a$, $\mathscr{F}(\cos(at)) = \pi\,(\delta_a + \delta_{-a})$ et $\mathscr{F}(\sin(at)) = \frac{\pi}{i}\,(\delta_a - \delta_{-a})$.

- Peigne de Dirac

On se donne $a > 0$ et on définit le peigne de Dirac de pas a à l'aide de la relation $\Delta_a = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{ka}$. En action contre une fonction test $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a $< \Delta_a, \varphi >= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(ka)$. On laisse au lecteur [exercice !] le soin de vérifier que la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(ka)$ est absolument convergente si φ est à décroissance rapide.

- Formule sommatoire de Poisson

Pour $T > 0$ et $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(kT) = \frac{1}{T}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}\big(\frac{2\ell\pi}{T}\big)$. En termes de distributions, $\Delta_T = \frac{1}{T}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \exp\big(\frac{2i\pi\ell}{T}\big)$.

- Convolution des distributions

Si f et g sont deux fonctions de $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, leur produit de convolution $f*g$ est défini (presque partout) par la relation
$(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\,g(t-\theta)\,\mathrm{d}\theta$. On le teste contre une fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, c'est à dire qu'on évalue l'intégrale
$< f*g, \varphi >= \int_{-\infty}^{\infty}(f*g)(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t$. On a en appliquant le théorème de Fubini : $< f*g, \varphi >= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\theta\, f(\theta)\ \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\, g(t)\,\varphi(t+\theta)$. On pose $\psi(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,\varphi(t+\theta)\,\mathrm{d}t$ et on a :
$< f*g, \varphi >= \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\,\psi(\theta)\,\mathrm{d}\theta$.
Pour passer aux distributions, les fonctions f et g sont remplacées par des distribution T et U. La relation précédente se généralise en $< T*U, \varphi >=< T, \psi >$ avec une fonction ψ telle que
$\psi(\theta) =< U, \varphi_\theta >$ et $\varphi_\theta(t) = \varphi(t+\theta)$.
Attention ! La convolution $T*U$ des distributions T et U n'est pas toujours définie. Pour calculer $< T*U, \varphi >$, on suit l'algorithme

suivant :
(i) définir une nouvelle fonction $\varphi_\theta \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ par la relation $\varphi_\theta(t) = \varphi(t+\theta)$
(ii) faire agir U sur cette fonction : $\psi(\theta) = < U, \varphi_\theta >$
(iii) si la fonction ψ appartient à l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ (ce qui n'est pas toujours vrai !) alors il suffit de faire agir T sur la fonction ψ et $< T*U, \varphi > = < T, \psi >$. Si la fonction ψ n'appartient pas à l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, le processus s'arrête et le produit de convolution $T*U$ n'est pas défini.

• La masse de Dirac est un élément neutre pour la convolution
Si $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$, les produits de convolution $T*\delta$ et $\delta*T$ sont bien définis et on a $T*\delta = \delta*T = T$.

Exercices

• Inversion de Fourier pour les distributions
Soit $\mathscr{F}$ l'opérateur de Fourier et $\overline{\mathscr{F}}$ l'opérateur de Fourier conjugué.
a) Rappeler leurs définitions lorsqu'ils opèrent sur des fonctions intégrables. Rappeler ce que valent les composées $\mathscr{F}\circ\overline{\mathscr{F}}$ et $\overline{\mathscr{F}}\circ\mathscr{F}$ lorsque l'on travaille dans l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ des fonctions très régulières à décroissance rapide.
b) Sachant que pour une distribution T et une fonction test φ on a $< \mathscr{F}T, \varphi > \equiv < T, \mathscr{F}\varphi >$ et $< \overline{\mathscr{F}}T, \varphi > \equiv < T, \overline{\mathscr{F}}\varphi >$, montrer que pour toute distribution T, on a l'identité $\overline{\mathscr{F}}\left(\mathscr{F}T\right) = 2\pi T$.
c) En déduire que $\overline{\mathscr{F}}\circ\mathscr{F}$ est proportionnel à la transformation identité dans l'espace $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ des distributions.

• Transformée de Fourier des fonctions circulaires
Soit a un nombre réel.
a) Rappeler le raisonnement qui permet de calculer les transformées de Fourier de l'exponentielle complexe et des fontions sinus et

cosinus.

b) Montrer que $\mathscr{F}\big(\exp(iat)\big) = 2\pi\,\delta_a$.

c) Montrer que $\mathscr{F}\big(\cos(at)\big) = \pi\,\big(\delta_a + \delta_{-a}\big)$.

d) Montrer enfin que $\mathscr{F}\big(\sin(at)\big) = \frac{\pi}{i}\,\big(\delta_a - \delta_{-a}\big)$.

- Valeur principale de Cauchy

Pour une fonction test $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ on pose
$< \mathrm{vp}\,\frac{1}{x}\,, \varphi > \equiv \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{d}t \, + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que cette limite existe bien et que l'on a
$< \mathrm{vp}\,\frac{1}{x}\,, \varphi > = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(t)-\varphi(-t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

b) Montrer que l'on a la relation $x\,\mathrm{vp}\,\frac{1}{x} = 1$ au sens des distributions en la testant sur $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, sachant que
$< x\,\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}\,, \varphi > \equiv < \mathrm{vp}\,\frac{1}{x}\,, \psi >$ avec $\psi(t) = t\,\varphi(t)$.

- Transformée de Fourier de la valeur principale de Cauchy

On admet que pour toute fonction test $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a
$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\xi \, \sin(\xi\,t)\,\varphi(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\xi \, \varphi(\xi) \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t} \sin(\xi\,t)$.

a) Sachant que l'intégrale classique $\int_0^{\infty} \frac{\sin(\theta)}{\theta}\,\mathrm{d}\theta$ vaut $\frac{\pi}{2}$, montrer que l'intégrale $\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t} \sin(\xi\,t)$ de l'identité précédente vaut $\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sgn}(\xi)$, où $\mathrm{sgn}(\xi) = 1$ si $\xi > 0$ et $\mathrm{sgn}(\xi) = -1$ si $\xi < 0$.

b) En déduire le calcul de la transformée de Fourier de la valeur principale de Cauchy : $\mathscr{F}\big(\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}\big) = -i\,\pi\,\mathrm{sgn}$.

- Transformée de Fourier de la fonction de Heaviside

a) Reprendre l'exercice précédent pour établir que
$\overline{\mathscr{F}}\big(\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}\big) = i\,\pi\,\mathrm{sgn}$.

b) En déduire que $\mathscr{F}\big(\mathrm{sgn}\big) = -2\,i\,\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}$.

c) Après avoir remarqué que la fonction de Heaviside peut s'écrire $H \equiv \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}$, en déduire sa transformée de Fourier :
$\widehat{H} = \pi\,\delta - i\,\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}$.

-11- Echantillonnage

• Transformée de Fourier du peigne de Dirac

On se donne $a > 0$. Nous avons vu lors de la leçon précédente que le peigne de Dirac $\Delta_a \equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{k\,a}$ peut aussi s'écrire
$\Delta_a = \frac{1}{a} \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \exp\left(\frac{2i\pi\ell}{a}\right)$. On peut en déduire que la transformée de Fourier du peigne de Dirac est un autre peigne de Dirac :
$\widehat{\Delta_a} = \frac{2\pi}{a}\,\Delta_{\frac{2\pi}{a}}$.

• Une propriété de la convolution des fonctions

Si f et g sont deux fonctions de $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, leur produit de convolution $f*g$ est défini (presque partout) par la relation
$(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\,g(t-\theta)\,\mathrm{d}\theta$. On le teste contre une fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, c'est à dire qu'on évalue l'intégrale
$< f*g,\,\varphi >= \int_{-\infty}^{\infty}(f*g)(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t$. En appliquant le théorème de Fubini, on a : $< f*g,\,\varphi >= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\theta\, f(\theta)\, \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\, g(t)\,\varphi(t+\theta)$.
On pose $\psi(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,\varphi(t+\theta)\,\mathrm{d}t$ et on en déduit :
$< f*g,\,\varphi >= \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)\,\psi(\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

• Convolution des distributions

Pour généraliser la relation précédente aux distributions, les fonctions f et g sont remplacées par des distribution T et U. La relation précédente devient $< T*U,\,\varphi >=< T,\,\psi >$ avec une fonction ψ telle que $\psi(\theta) =< U,\,\varphi_\theta >$ et $\varphi_\theta(t) = \varphi(t+\theta)$.
Attention ! La convolution $T*U$ des distributions T et U n'est pas toujours définie. Pour calculer $< T*U,\,\varphi >$, on suit l'algorithme suivant :

(i) définir une nouvelle fonction $\varphi_\theta \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ par la relation $\varphi_\theta(t) = \varphi(t+\theta)$

(ii) faire agir U sur cette fonction : $\psi(\theta) = < U, \varphi_\theta >$
(iii) si la fonction ψ appartient à l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ (ce qui n'est pas toujours vrai !) alors il suffit de faire agir T sur la fonction ψ et $< T * U, \varphi > = < T, \psi >$. Si la fonction ψ n'appartient pas à l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, le processus s'arrête et le produit de convolution $T * U$ n'est pas défini.

• La masse de Dirac est un élément neutre pour la convolution
Si $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$, les produits de convolution $T * \delta$ et $\delta * T$ sont bien définis et on a $T * \delta = \delta * T = T$.

• Convolution d'une fonction par la masse de Dirac au point a
On se donne $a \in \mathbb{R}$ et une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La translatée $\tau_a f$ de la fonction f par le "vecteur" a est définie par $\tau_a f(t) = f(t-a)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On a alors $f * \delta_a = \delta_a * f = \tau_a f$.

• Signal échantillonné
On se donne un pas d'échantillonnage a et une fonction continue f à croissance lente de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose connues les valeurs $f(ka)$ de la fonction f aux points multiples entiers ka du pas d'échantillonnage a. On appelle signal échantillonné le produit de f par le peigne de Dirac Δ_a : $f\Delta_a = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(ka)\, \delta_{ka}$.

• Spectre du signal échantillonné
Quand on échantillonne un signal, on rend périodique sa transformée de Fourier. On se donne $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ continue ainsi que sa transformée de Fourier $\widehat{f} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Alors la fransformée de Fourier $\widehat{f\Delta_a}$ est une fonction périodique de période $\frac{2\pi}{a}$. On a les deux expressions suivantes $\widehat{f\Delta_a}(\omega) = \frac{2\pi}{a} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \widehat{f}\big(\frac{2\ell\pi\,\omega}{a}\big) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(ka) \exp(-ika\,\omega)$.
On a bien $\widehat{f\Delta_a}\big(\omega + \frac{2\pi}{a}\big) = \widehat{f\Delta_a}(\omega)$.

• Signal à bande limitée
On se donne $\Omega > 0$ et $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. On dit que le signal f est à bande limitée dans $[-\Omega, \Omega]$ si sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ est nulle dès

que $|\omega|$ est assez grand en valeur absolue : $|\omega| > \Omega \Longrightarrow \widehat{f}(\omega) = 0$.

- Critère de Nyquist

On dit que le pas d'échantillonnage a respecte le critère de Nyquist pour un signal f à bande limitée dans $[-\Omega, \Omega]$ si et seulement si $a\Omega < \pi$.

- Désaliasing

On se donne un signal f à bande limitée dans $[-\Omega, \Omega]$ et un pas d'échantillonnage a qui respecte le critère de Nyquist $a\Omega < \pi$. Alors la somme $\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \widehat{f}\big(\frac{2\ell\pi\omega}{a}\big)$ ne comporte qu'un seul terme non nul. On a dans ce cas la relation $\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \widehat{f}\big(\frac{2\ell\pi\omega}{a}\big) = \widehat{f}(\omega)$ si $|\omega| \leq \Omega$.
Echantillonner un signal f "replie" le spectre et mélange les fréquences ; on parle alors d'"aliasing". Le critère de Nyquist permet de lever cette indétermination.

- Thérème de Shannon

On se donne une fonction continue f qui appartient aussi à $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et on la suppose à bande limitée dans l'intervalle $[-\Omega, \Omega]$. On échantillonne ce signal avec un pas a qui respecte le critère de Nyquist : $a\Omega < \pi$. Alors pour tout réel t, on a
$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(ka)\,\mathrm{sinc}\big(\big(\frac{t}{a} - k\big)\,\pi\big)$.
La preuve de ce résultat utilise le désaliasing et un préliminaire technique : $\big(\overline{\mathscr{F}}\big[\exp(-ika\,\omega)\,P_{\frac{2\pi}{a}}(\omega)\big]\big)(t) = \frac{2\pi}{a}\,\mathrm{sinc}\big(\big(\frac{t}{a} - k\big)\,\pi\big)$.
Pour un signal à bande limitée et un échantillonnage qui respecte le critère de Nyquist, on peut reconstruire de manière unique l'ensemble du signal à partir du signal échantillonné. Il n'existe qu'une seule façon d'interpoler entre les valeurs données $f(ka)$ pour k entier, tout en gardant la contrainte de limitation de la bande spectrale.

Exercices

- Fourier inverse d'une porte par une sinusoïde

On rappelle que la conjuguée $\overline{\mathscr{F}}$ de la transformée de Fourier est définie pour une fonction f par $(\overline{\mathscr{F}} f)(\omega) = \widehat{f}(-\omega)$. On se donne un réel a strictement positif. On définit la porte P_T de largeur $T > 0$ par les relations $P_T(t) = 1$ si $|t| \leq \frac{T}{2}$ et $P_T(t) = 0$ sinon.
Montrer que $\left[\overline{\mathscr{F}}\big(\exp(-i\,k\,a\,\omega)\,P_{\frac{2\pi}{a}}(\omega)\big)\right](t) = \frac{2\pi}{a}\,\mathrm{sinc}\big(\pi\left(\frac{t}{a} - k\right)\big)$.

- Convolution par une masse de Dirac

Soit a un nombre réel et f une fonction continue bornée pour fixer les idées. On note δ_a la masse de Dirac au point a :
$< \delta_a\,, f > = f(a)$ et τ_a l'opérateur de décalage de la valeur a : $\big(\tau_a f\big)(t) = f(t-a)$.
a) Montrer que $f * \delta_a = \delta_a * f = \tau_a f$.
b) Si $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ est maintenant une distribution arbitraire et δ la masse de Dirac au point zéro, c'est à dire $< \delta\,, \varphi > = \varphi(0)$ pour toute fonction test $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, montrer que $T * \delta = \delta * T = T$.

- Convolution et transformée de Fourier

a) Soient deux fonctions f et g. Montrer que l'on a
$\mathscr{F}(f\,g) = \frac{1}{2\pi}\,(\mathscr{F} f) * (\mathscr{F} g)$.
b) Montrer que le résultat est encore vrai si on remplace $\mathscr{F}$ par $\overline{\mathscr{F}}$ partout dans la relation précédente.
La fonction f est maintenant une fonction “à croissance lente”, ce qui signifie que pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ infiniment dérivable et à décroissance rapide, le produit $f\,\varphi$ est encore une fonction de l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. On se donne aussi une distribution $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$.
c) Montrer que l'on a : $\mathscr{F}(f\,T) = \frac{1}{2\pi}\,(\mathscr{F} f) * (\mathscr{F} T)$.

-12- Filtrage linéaire approfondi

- Circuit RC

On reprend l'étude du filtre RC. Maintenant, la tension d'entrée $u(t)$ peut être une distribution. De même, la tension de sortie $y(t)$ doit être recherchée dans l'espace des distributions. Le filtre T transforme le signal $u(t)$ en un nouveau signal $y(t)$: $y = T\,u$. L'équation différentielle qui relie l'entrée et la sortie reste inchangée :
$RC\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y(t) = u(t)$.
On a vu que la solution générale de cette équation peut s'écrire $u = h * u$ avec la réponse impultionnelle $h(t)$ donnée par l'expression suivante $h(t) = \frac{H(t)}{RC}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$ en fonction des données et de la fonction de Heaviside H.

- Réponse impulsionnelle ou solution élémentaire

La relation "entrée-sortie" $RC\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y(t) = u(t)$ du filtre RC doit être considérée au sens des distributions. Si on injecte la fonction
$y(t) = \frac{H(t)}{RC}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$ dans cette équation, il vient (c'est un exercice sur la dérivation des fonctions au sens des distributions !) : $RC\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + h(t) = \delta$, masse de Dirac en zéro.
Réciproquement, si on cherche une distribution h solution de l'équation différentielle $RC\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + h(t) = \delta$, on trouve nécessairement comme unique solution la réponse impulsionnelle $h(t) = \frac{H(t)}{RC}\exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$.
Cette fonction porte alors bien son nom : c'est la réponse (la sortie) du filtre lorsqu'on se donne comme entrée l'impulsion δ de Dirac.
La preuve de se résultat est relativement délicate. Si on teste l'équation $RC\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + h(t) = \delta$ contre une famille de fonctions de l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ de support de plus en plus concentré autour d'un point $t \neq 0$,

on en déduit que la distribution h est en fait une fonction qui vérifie l'équation différentielle $RC\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + h(t) = 0$ dans le domaine $t < 0$ et dans le domaine $t > 0$. Par suite, $h(t) = \alpha \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$ si $t < 0$. Si $\alpha \neq 0$, la fonction h a un comportement exponentiel pour $t < 0$. Elle n'est donc pas à croissance lente et rien n'établit alors que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} h(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est effectivement définie pour toute fonction test $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Cette fonction exponentielle croît trop vite pour pouvoir être considérée comme une distribution. Donc $\alpha = 0$ et la fonction h est causale. Pour $t > 0$, on a de la même façon $h(t) = \beta \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$ avec une constante β qu'il convient de déterminer.
Si on teste l'équation $RC\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + h(t) = \delta$ contre une famille de fonctions centrées autour de l'origine, la discontinuité $[h]_0 \equiv h(0^+) - h(0^-)$ de la fonction h à l'origine doit vérifier la relation $RC\,[h]_0 = 1$. On en déduit que $RC\,\beta = 1$ et on trouve de cette façon l'expression $h(t) = \frac{H(t)}{RC} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$ de la réponse impulsionnelle, appelée également solution élémentaire de l'équation différentielle.

- Fonction de transfert

Par définition, la fonction de transfert d'un filtre est la tranformée de Fourier de sa réponse impulsionnelle. Un calcul de $\widehat{h}(\omega)$ à partir de l'expression donnée au paragraphe précédent est laissé au lecteur. On peut aussi mener un calcul direct à partir de l'équation d'évolution. En effet, on déduit de la relation d'entrée-sortie linnéaire $y = h * u$ l'expression entre les transformées de Fourier : $\widehat{y} = \widehat{h}\,\widehat{u}$.
Pour mener un calcul direct de la fonction de transfert, on remarque que la transformée de Fourier de la dérivée de $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ est égal à $i\omega\,\widehat{y}(\omega)$. Donc si on prend la transformée de Fourier de la relation $RC\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y(t) = u(t)$ qui définit le filtre, il vient $RC\,i\omega\,\widehat{y}(\omega) + \widehat{y}(\omega) = \widehat{u}(\omega)$ qu'on peut encore écrire $[1 + RC\,i\omega]\,\widehat{y}(\omega) = \widehat{u}(\omega)$. Le rapport $\widehat{h}(\omega) \equiv \frac{\widehat{y}(\omega)}{\widehat{u}(\omega)}$ est donc donné

par l'expression $\widehat{h}(\omega) = \frac{1}{1+RCi\omega}$.

- Filtre linéaire différentiel

On généralise le filtre RC au cas général d'une sortie $y(t)$ donnée en fonction de l'entrée $u(t)$ par l'équation différentielle linéaire suivante : $\frac{\mathrm{d}^q y}{\mathrm{d}t^q} + \sum_{k=0}^{q-1} b_k \frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}t^k} = \sum_{j=0}^{p} a_j \frac{\mathrm{d}^j u}{\mathrm{d}t^j}$.
Le filtre RC est un cas particulier très simple de filtre linéaire différentiel. On a en effet dans ce cas $q = 1$, $b_0 = \frac{1}{RC}$, $p = 0$ et $a_0 = \frac{1}{RC}$.
Deux polynômes sont associés à cette équation différentielle :
$P(X) = \sum_{j=0}^{p} a_j X^j$ et $Q(X) = X^q + \sum_{k=0}^{q-1} b_k X^k$.

- Fonction de transfert d'un filtre linéaire différentiel

Avec les notations précédentes, la fonction de transfert $\widehat{h}$ du filtre linéaire T défini par l'équation différentielle
$\frac{\mathrm{d}^q y}{\mathrm{d}t^q} + \sum_{k=0}^{q-1} b_k \frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}t^k} = \sum_{j=0}^{p} a_j \frac{\mathrm{d}^j u}{\mathrm{d}t^j}$ a une expression donnée par la relation $\widehat{h}(\omega) = \frac{P(i\omega)}{Q(i\omega)}$. Il suffit d'appliquer une transformation de Fourier aux deux membres de l'équation précédente, après avoir remarqué que $\left(\mathscr{F}\left(\frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}t^k}\right)\right)(\omega) = (i\omega)^k \widehat{y}(\omega)$.

- Réponse impulsionnelle d'un filtre linéaire différentiel

Avec les notations précédentes, on suppose de plus que la fraction rationnelle $\frac{P(X)}{Q(X)}$ n'a que des pôles simples et qu'ils ne sont pas situés sur l'axe imaginaire pur. En d'autres termes, les racines z_k du polynôme Q sont simples et on une partie réelle toujours non nulle. On décompose la fraction $\frac{P(X)}{Q(X)}$ en éléments simples :
$\frac{P(X)}{Q(X)} = \sum_{\ell=0}^{p-q} \alpha_\ell X^\ell + \sum_{k=1}^{q} \frac{\beta_k}{X - z_k}$. Alors la réponse impulsionnelle $h(t)$ du filtre linéaire T peut s'écrire

$$h(t) = \sum_{\ell=0}^{p-q} \alpha_\ell \, \delta^{(\ell)} + \sum_{k, Re z_k < 0} \beta_k \exp(z_k t) H(t) - \sum_{k, Re z_k > 0} \beta_k \exp(z_k t) H(-t).$$

Exercices

- Deux transformées de Fourier

On note H la fonction de Heaviside : $H(t) = 1$ si $t > 0$ et $H(t) = 0$ si $t < 0$.

a) Montrer que pour z nombre complexe de partie réelle strictement négative, on a pour $\omega \in \mathbb{R}$, $[\mathscr{F}(H(t)\exp(zt))](\omega) = \frac{1}{i\omega - z}$.

b) De façon analogue, montrer que si z est de partie réelle strictement positive, on a $[\mathscr{F}(H(-t)\exp(zt))](\omega) = \frac{1}{z - i\omega}$.

- Transformée de Fourier des dérivées de la masse de Dirac

De façon très génerale, la dérivée d'une distribution T est donnée par la relation $< T', \varphi > = - < T, \varphi' >$ quand on la fait agir sur une fonction test $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

a) Montrer que la dérivée $n$ième $\delta^{(n)}$ de la masse de Dirac agit sur une fonction $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ selon $< \delta^{(n)}, \varphi > = (-1)^n \varphi^{(n)}(0)$.

b) En déduire que la transformée de Fourier de la dérivée $n$ième de la masse de Dirac est un monôme : $[\mathscr{F}(\delta^{(n)})](\omega) = (i\,\omega)^n$.

- Convolution par les dérivées de la masse de Dirac

On rappelle que pour calculer le produit de convolution $T * U$ des distributions T et U contre une fonction test $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on calcule d'abord la fonction test auxiliaire $\psi(x) = < U_{(y)}, \varphi(x+y) >$, où $U_{(y)}$ signifie que la distribution U agit sur la variable y. Si la fonction ψ introduite plus haut appartient à l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ des fonctions indéfiniment dérivables et à décroissance rapide, on peut calculer $< T * U, \varphi > \equiv < T, \psi >$.

Démontrer que l'on a les relations suivantes
$(\delta * T)^{(n)} = \delta^{(n)} * T = \delta * T^{(n)} = T^{(n)}$ pour une distribution quelconque $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$.

- Calcul d'une réponse impulsionnelle

On note δ la masse de Dirac en zéro. On cherche une fonction h de la forme $h(t) = g(t)H(t)$ où g est une fonction du temps et H la fonction de Heaviside.
Montrer que si $h(t)$ est solution de l'équation différentielle
$\frac{1}{\omega_0^2} h''(t) + h(t) = \delta$, alors elle s'écrit nécessairement
$h(t) = \omega_0 \sin(\omega_0 t) H(t)$.

- Signaux analogiques [février 2013]

Dans cet exercice, la lettre T désigne un réel strictement positif et P_T la fonction “porte” : $P_T(t) = 1$ si $|t| \leq \frac{T}{2}$ et $P_T(t) = 0$ si $|t| > \frac{T}{2}$.
On introduit aussi un réel strictement positif a et on pose $Q(t) = 1$ si $|t-a| \leq \frac{T}{2}$ et $Q(t) = 0$ si $|t-a| > \frac{T}{2}$. De plus, on désigne par $\mathscr{F}$ la transformée de Fourier :
$(\mathscr{F} f)(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\,\omega t)\,\mathrm{d}t$ pour $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.
a) Quelle est l'expression de $(\mathscr{F} P_T)(\omega)$?
b) Quelle est l'expression de $(\mathscr{F} Q)(\omega)$?
c) Si δ_a désigne la masse de Dirac au point a, montrer que l'on a $\delta_a * P_T = Q$.
d) Quelle est l'expression de la transformée de Fourier $\mathscr{F}\delta_a$ de la masse de Dirac au point a ?
e) Déduire de la question précédente et de la relation $\delta_a * P_T = Q$ nouveau calcul de la transformée de Fourier $\mathscr{F} Q$ de la fonction Q.

- Signaux analogiques [avril 2013]

Dans cet exercice, la lettre T désigne un réel strictement positif et P_T la fonction “porte” : $P_T(t) = 1$ si $|t| \leq \frac{T}{2}$ et $P_T(t) = 0$ si $|t| > \frac{T}{2}$.
De plus, on désigne par $\mathscr{F}$ la transformée de Fourier :
$(\mathscr{F} f)(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\,\omega t)\,\mathrm{d}t$ pour $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$.
a) Quelle est l'expression de $(\mathscr{F} P_T)(\omega)$?
b) Quelle relation classique existe-t-il entre
$\int_{-\infty}^{\infty} |\, (\mathscr{F} P_T)(\omega)\, |^2 \,\mathrm{d}\omega$ et $\int_{-\infty}^{\infty} |\, P_T(t)\, |^2 \,\mathrm{d}t$?

c) Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \mid (\mathscr{F} P_T)(\omega) \mid^2 \, \mathrm{d}\omega$ peut s'exprimer en fonction de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \mid \frac{\sin\theta}{\theta} \mid^2 \, \mathrm{d}\theta$.

d) Déduire des questions précédentes la valeur de l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{\infty} \mid \frac{\sin\theta}{\theta} \mid^2 \, \mathrm{d}\theta$.

-13- Filtres discrets

- Translation temporelle

On rappelle que pour $a \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, la fonction translatée $\tau_a \varphi$ de la fonction φ est définie par $(\tau_a \varphi)(t) = \varphi(t-a)$.
Alors pour toute fonction f bornée sur $\mathbb{R}$, on vérifie simplement que $\int_{\mathbb{R}} (\tau_a f)(t)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, (\tau_{-a}\varphi)(t)\, \mathrm{d}t$. Si on se donne une distribution $U \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$, la distribution translatée $\tau_a U$ est définie de sorte que la relation précédente soit satisfaite dans le cas où U est une fonction bornée. On pose donc $< \tau_a U, \varphi > = < U, \tau_{-a}\varphi >$ pour toute fonction test φ.
On vérifie alors que $\tau_a \delta = \delta_a$, masse de Dirac au point a. Cette relation se généralise aux itérés de l'opérateur de translation τ_a: $(\tau_a)^k \, \delta = \delta_{ka}$ pour $k \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{R}$.

- Signaux discrets

On se donne un pas d'échantillonnage en temps $a > 0$. Un signal discret x n'est connu que par ses valeurs x_k en des instants $t_k = k\,a$ qui sont tous multiples entiers du pas de temps. On le modélise d'un point de vue mathématique avec une variante du peigne de Dirac. On pose $x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \, \delta_{k\,a}$. Si tous les x_k sont nuls sauf pour $k = 0$ pour lequel on a $x_0 = 1$, alors le signal x est égal à la masse de Dirac. Si tous les x_k valent 1 pour tout $k \in \mathbb{Z}$, alors le signal x est égal au peigne de Dirac Δ_a. L'ensemble des signaux discrets x de la forme $x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \, \delta_{k\,a}$ est noté X_a.

- Espaces de signaux discrets

Les signaux discrets bornés, intégrables ou de carré intégrables constituent les espaces ℓ_a^∞, ℓ_a^1 et ℓ_a^2 respectivement. On a par définition

$x \in \ell_a^\infty$ si et seulement si $\sup_{k\in\mathbb{Z}} |x_k| < \infty$, $x \in \ell_a^1$ si et seulement si $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |x_k| < \infty$ et $x \in \ell_a^2$ si et seulement si $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |x_k|^2 < \infty$.
Les espaces ℓ_a^∞, ℓ_a^1 et ℓ_a^2 sont normés et les normes associées sont définies par $\|x\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{Z}} |x_k|$ pour $x \in \ell_a^\infty$, $\|x\|_1 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |x_k|$ pour $x \in \ell_a^1$ et $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |x_k|^2}$ si $x \in \ell_a^2$.

- Translation temporelle d'un signal discret

Si $x \in X_a$ est un signal discret, c'est à dire $x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k\, \delta_{k\,a}$, alors son translaté temporel $\tau_a x$ est un nouveau signal temporel qui se calcule selon la relation $\tau_a x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_{k-1}\, \delta_{k\,a}$. En d'autres termes, $(\tau_a x)_k = x_{k-1}$.

- Une autre expression d'un signal discret

On se donne un signal discret $x \in X_a$ de la forme $x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k\, \delta_{k\,a}$.
Alors on peut l'écrire à l'aide de l'opérateur de translation :
$x = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k\, (\tau_a)^k\right) \delta$.

- Filtre discret

Un filtre discret T est un opérateur $X_a \longrightarrow X_a$ qui à un signal discret $x \in X_a$ associe un nouveau signal discret $y = T(x) \in X_a$ (noté aussi $y = Tx$) de sorte à satisfaire les trois propriétés suivantes de linéarité, continuité et invariance par translation temporelle.
La linéarité exprime d'une part que $T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$ pour tout les signaux d'entrée x_1 et x_2 de X_a et d'autre part que
$T(\lambda\, x) = \lambda\, T(x)$ pour tout scalaire λ et tout signal d'entrée $x \in X_a$.
La continuité exprime qu'une norme du signal de sortie (en pratique une des trois normes introduites plus haut) est toujours contrôlée par la norme correspondante du signal d'entrée :
$\exists\, C \geq 0,\ \forall x \in X_a,\ \|Tx\| \leq C\, \|x\|$.
L'invariance par translation temporelle est une conséquence de l'hypothèse très générale qu'aucun instant n'est privilégié : l'opérateur T commute avec la translation temporelle τ_a :
$T \circ \tau_a = \tau_a \circ T$ et pour tout signal x, $T(\tau_a x) = \tau_a(Tx)$.

- Exemples de filtres discrets

Les exemples de filtres fondamentaux sont l'identite id et la translation τ_a. On a $\mathrm{id}x = x$ pour tout signal $x \in X_a$. La translation temporelle a été définie plus haut dans ce chapitre. On peut aussi se donner des formules de calcul qui permettent d'expliciter le signal de sortie $y = Tx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n \, \delta_{n\,a}$ en fonction du signal d'entrée $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \, \delta_{n\,a}$. Pour les deux exemples précédents, on a respectivement $y_n = x_n$ et $y_n = x_{n-1}$.
Ainsi, les relations $y_n = \frac{1}{2}\left(x_n + x_{n-1}\right)$, $y_n = \frac{1}{4} x_n + \frac{1}{2} x_{n-1} + \frac{1}{4} x_{n-2}$ et $y_n = \frac{1}{4} x_{n+1} + \frac{1}{2} x_n + \frac{1}{4} x_{n-1}$ définissent trois filtres. Nous invitons le lecteur à vérifier pour ces trois exemples les propriétés de linéarité, continuité et invariance par translation dans le temps.

- Convolution de deux masses de Dirac

On se donne deux nombres réels a et b. Alors le produit de convolution de la masse de Dirac au point a par la masse de Dirac au point b est égal à la masse de Diracc au point $a+b$: $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$.

- Structure d'un filtre discret

On se donne un filtre discret $T : X_a \longrightarrow X_a$ qui satisfait les propriétés de linéarité, continuité et invariance temporelle proposées plus haut. Alors le signal de sortie Tx pour une entrée $x \in X_a$ s'exprime comme un produit de convolution : $Tx = h * x$. Le signal h est appelé réponse impulsionnelle du filtre. Il est donné par $h = T\delta$, signal de sortie pour une entrée égale à l'impulsion de Dirac δ.

- Convolution discrète

Le produit de convolution $h*x$ du signal discret h par le signal discret x est un signal discret qui se décompose, quand il est défini, sur les masses de Dirac δ_{pa} multiples du pas de temps a:
$h*x = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \left(h*x\right)_p \, \delta_{pa}$. Le nombre $\left(h*x\right)_p$ est donné par la somme de la série suivante : $\left(h*x\right)_p = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} h_\ell \, x_{p-\ell}$.

Une question importante est de savoir dans quelles conditions la série précédente est effectivement convergente.

- Convolution d'un signal dans ℓ_a^∞ par un signal dans ℓ_a^1

Si $h \in \ell_a^\infty$ ($\sup_{k\in\mathbb{Z}} |h_k| < \infty$) et $x \in \ell_a^1$ ($\sum_{k\in\mathbb{Z}} |x_k| < \infty$), alors le produit de convolution $h * x$ est bien défini, il appartient à ℓ_a^1 et on a l'inégalité $\|h * x\|_1 \leq \|h\|_\infty \|x\|_1$.

- Convolution de deux signaux dans ℓ_a^2

Si $h \in \ell_a^2$ ($\sup_{k\in\mathbb{Z}} |h_k|^2 < \infty$) et $x \in \ell_a^2$ ($\sum_{k\in\mathbb{Z}} |x_k|^2 < \infty$) également, alors le produit de convolution $h * x$ est bien défini. Il appartient à l'espace ℓ_a^∞ et on a l'inégalité $\|h * x\|_\infty \leq \|h\|_2 \|x\|_2$.

- Signal causal

Un signal $x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k\, \delta_{ka}$ est causal si et seulement si les coefficients x_k sont tous nuls si $k \leq -1$. On note X_a^+ l'ensemble de tous les signaux causaux.

- Filtre causal

Un filtre discret $T : X_a \longrightarrow X_a$ est causal si et seulement si il transforme tout signal causal $x \in X_a^+$ en un signal causal $Tx \in X_a^+$. On peut également considérer le filtre T comme un opérateur de X_a^+ dans X_a^+.

- Réponse impulsionnelle causale

Un filtre discret T défini par sa réponse impulsionnelle h (on a donc $Tx = h * x$) est causal si et seulement si le signal $h = T\delta$ est un signal causal. La propriété $\left(x \in X_a^+ \Longrightarrow Tx \in X_a^+\right)$ est équivalente à $h \in X_a^+$.

Dans le cas d'un filtre causal de réponse impulsionnelle h et d'un signal causal x, le coefficient $(h*x)_p$ du produit de convolution $h*x$ est donné par une somme finie. Il est donc toujours défini.

Exercices

- A propos de l'opérateur de translation

Soit $a>0$. On note τ_a l'opérateur de translation dans le temps défini pour une fonction φ régulière et à décroissance rapide $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ par $(\tau_a \varphi)(t) = \varphi(t-a)$. On se donne $f \in \mathrm{L}^\infty$ une fonction bornée.

a) Montrer que l'on a $\int_{\mathbb{R}} (\tau_a f)(t)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t \;=\; \int_{\mathbb{R}} f(t)\, (\tau_{-a}\, \varphi)(t)\, \mathrm{d}t$.

b) En déduire que la définition $\tau_a U$ de la translatée d'une distribution $U \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ grâce à la relation $< \tau_a U \,,\, \varphi > = < U \,,\, \tau_{-a} \varphi >$, peut se ramener à la relation démontrée ci-dessus.

- Translatées de la masse de Dirac

Soit $a > 0$ et τ_a l'opérateur introduit à l'exercice précédent. On désigné par δ la masse de Dirac et δ_α la masse de Dirac en un point donné $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que $\tau_a\, \delta = \delta_a$ et que de façon plus générale $(\tau_a)^k\, \delta = \delta_{ka}$ pour k entier positif ou nul.

b) Montrer que $(\tau_a)^{-1}\, \delta = \delta_{-a}$.

c) En déduire que la relation $(\tau_a)^k\, \delta = \delta_{ka}$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

- Translatée d'une distribution

Soit $a > 0$ et τ_a l'opérateur de translation dans le temps. Soit $U \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ une distribution quelconque. Démontrer que $\delta_a * U \;=\; \tau_a U$.

- Filtres classiques

Soit $x \equiv \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n\, \delta_{na} \in X_a$ un signal discret. On note T_1 le filtre qui à $x \in X_a$ associe le signal $T_1 x = y$ tel que $y_n = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1})$. De même, on note T_2 le filtre qui à $x \in X_a$ associe le signal $T_2 x = z$ tel que $z_n = \frac{1}{4} x_n + \frac{1}{2} x_{n-1} + \frac{1}{4} x_{n-2}$.

a) Calculer les réponses impulsionnelles h_1 et h_2 de ces deux filtes.

b) Montrer qu'ils sont causaux.

c) Vérifier que l'on a $T_1 x = h_1 * x$ et $T_2 x = h_2 * x$ pour tout signal $x \in X_a$.

d) Montrer que $h_1 * h_1 = h_2$.

e) En déduire que l'on a $T_1(T_1 x) = T_2 x$ pour tout signal discret $x \in X_a$.

- D'autres filtres classiques

On note T le filtre qui à $x \equiv \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n\, \delta_{na} \in X_a$ associe le signal $Tx = y \equiv \sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n\, \delta_{na} \in X_a$ tel que $y_n = \frac{1}{4}x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{4}x_{n-1}$.
Calculer la réponse impulsionnelle h de ce filtre et montrer que le filtre T n'est pas causal (on pourra construire un signal x causal qui se transforme en un signal y non causal).

- Dérivateur

a) Montrer que le filtre D_a défini par la relation de récurrence $(D_a x)_n = \frac{1}{a}(x_n - x_{n-1})$ est causal.

b) Préciser sa réponse impulsionnelle.

c) Montrer que si a tend vers zéro et si le signal discret x est obtenu par restriction d'un signal analogique régulier X (de façon précise, $x_n = X(na)$) alors le signal de sortie $D_a x$ approche la dérivée $X'(t)$.

d) Calculer le résultat itéré $D_a(D_a x)$.

e) Quelle est sa limite si a tend vers zéro ?

- Signaux discrets [février 2013]

Pour un nombre réel α arbitraire, δ_α représente la masse de Dirac au point α. Par ailleurs, a est un nombre réel fixé strictement positif.

a) Rappeler l'expression du produit de convolution $\delta_{na} * \delta_{ma}$ des masses de Dirac δ_{na} et δ_{ma} pour deux entiers n et m.

b) Soit $h_1 = \frac{3}{2}\delta_0 - \frac{1}{2}\delta_a$ et $h_2 = \delta_0 - \delta_a$ deux signaux discrets. Calculer leur produit de convolution $h \equiv h_1 * h_2$.

On introduit le filtre discret T qui au signal discret $x \equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k\, \delta_{ka}$ associe $y \equiv h * x$.

c) Quelle est l'expression de y_n en fonction des x_k ?

d) Le filtre T est-il causal ?

e) Le filtre T est-il stable ?

- Signaux discrets [avril 2013]

Pour un nombre réel α arbitraire, δ_α représente la masse de Dirac au point α. Par ailleurs, a est un nombre réel fixé strictement positif.

a) Rappeler l'expression du produit de convolution $\delta_{na} * \delta_{ma}$ des masses de Dirac δ_{na} et δ_{ma} pour deux entiers n et m.

b) Soit $h_1 = 4\,\delta_0 - \delta_a$ et $h_2 = \delta_0 - \delta_a$ deux signaux discrets. Calculer leur produit de convolution $h \equiv h_1 * h_2$.

c) On introduit le filtre discret T qui au signal discret $x \equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k\,\delta_{ka}$ associe $y \equiv h * x$. Quelle est l'expression de y_n en fonction des x_k ?

d) Le filtre introduit à la question précédente est-il causal ?

e) Le filtre introduit à la question c) est-il stable ?

-14- Transformée en z

- Introduction

On se donne un signal discret $x \in X_a$ qu'on peut écrire sous la forme $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n\, \delta_{n\,a}$. On cherche comment écrire sa transformée de Fourier $\widehat{x}$. Par linéarité, il suffit de connaître la valeur de $\widehat{\delta_{n\,a}}$. Or on sait que de façon générale, on a $\widehat{\delta_\alpha}(\omega) = \exp(-i\,\alpha\,\omega)$. On en déduit que $\widehat{x}$ peut s'expliciter sous la forme $\widehat{x} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \exp(-i\,n\,a\,\omega)$, expression que l'on peut écrire également $\widehat{x} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \big(\exp(i\,a\,\omega)\big)^{-n}$. Si on ne contraint plus le nombre complexe $z = \exp(i\,a\,\omega)$ à rester sur le cercle unité, on obtient la définition qui suit.

- Définition de la transformée en z

On se donne un pas d'échantillonnage $a > 0$ et un signal discret $x \in X_a$ de la forme $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n\, \delta_{n\,a}$. La transformée en z du signal x, notée $X(z)$, est par définition la série double (ou série de Laurent) $X(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n\, z^{-n}$. C'est une fonction de la variable complexe $z \in \mathbb{C}$.

Si $x = \delta$, masse de Dirac en zéro, on a $X(z) = 1$ et si $x = \delta_a$, masse de Dirac en a, on a $X(z) = \frac{1}{z}$.

- Transformée en z et transformée de Fourier

Si le signal x est de la forme $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n\, \delta_{n\,a}$, la transformée de Fourier $\widehat{x}$ est reliée à la transformée en z, notée $X(z)$, par la relation $\widehat{x}(\omega) = X\big(\exp(i\,a\,\omega)\big)$. La transformée en z permet d'étendre et modifier le domaine de définition de la transformée de Fourier dans le cas des signaux discrets.

- Rappel sur les séries géométriques

Si q désigne un nombre complexe, il est supposé bien connu ici que la série géométrique $1+q+q^2+\cdots+q^n+\ldots$ est convergente si et seulement si le module du nombre complexe q est strictement inférieur à 1. Dans ce cas, sa somme vaut $\frac{1}{1-q}$. On a :
$\left(1+q+q^2+\cdots+q^n+\cdots=\frac{1}{1-q}\right) \iff \left(|q|<1\right)$.

- Signal de Heaviside discret

Le signal de Heaviside discret $y=\sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n\,\delta_{n\,a}$ est obtenu en discrétisant la fonction de Heaviside avec la grille temporelle de pas a: $y_n=0$ si $n\leq -1$ et $y_n=1$ si $n\geq 0$. On peut écrire aussi $y=\sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_{n\,a}$.
La transformée en z du signal de Heaviside discret s'évalue sans difficulté particulière. La série $Y(z)=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots+\frac{1}{z^n}+\ldots$ converge si et seulement si $|z|>1$ et on a alors $Y(z)=\frac{z}{z-1}$ [exercice !].

- Notion de couronne de convergence

On se donne deux nombres réels α et β de sorte que $0<\alpha<\beta$. On définit un signal discret $x=\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n\,\delta_{n\,a}$ par les relations $x_n=\alpha^n$ si $n\geq 0$ et $x_n=\beta^n$ si $n\leq -1$. Alors la transformée $X(z)$ converge si et seulement si le nombre complexe z appartient à la couronne définie par $\alpha<|z|<\beta$. En effet, la série géométrique qui correspond aux indices positifs converge si et seulement si $|\alpha/z|<1$ et la série géométrique qui correspond aux indices négatifs converge si et seulement si $|z/\beta|<1$.
L'exemple proposé ci-dessus est caractéristique de la situation générale. Une série de Laurent $X(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n\,\frac{1}{z^n}$ converge en général dans une couronne de la forme $0\leq r<|z|<R$. On a $r=\alpha$ et $R=\beta$ dans l'exemple précédent.

- Signal discret causal tempéré

On peut préciser quelques éléments sur la convergence de la transformée $X(z)$ si le signal discret $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \,\delta_{n\,a}$ est causal (les coefficients x_n sont nuls si $n \leq -1$) et s'il est tempéré, c'est à dire si x_n ne croît pas plus vite qu'une fonction puissance si n tend vers $+\infty$: $\exists\, C \geq 0$, $\exists\, K \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ assez grand, $|x_n| \leq C\, n^K$. Alors la transformée $X(z)$ converge dès que $|z| > 1$ et on a $R = \infty$.

- Transformée en z d'un produit de convolution

On retrouve pour la transformée en z une propriété déjà vue pour la transformée de Laplace et la transformée de Fourier : un produit de convolution se transforme en un produit ordinaire.
On se donne deux signaux discrets $h = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_\ell \,\delta_{\ell\,a}$ et
$x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \,\delta_{n\,a}$. On suppose que le produit de convolution
$y = h * x$ est bien défini. En particulier, on suppose que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la série de terme général $\big(h_\ell \, x_{k-\ell}\big)_{\ell\in\mathbb{Z}}$ est absolument convergente. Ceci permet de définir le k^{o} coefficient du produit de convolution $h * x$: $\big(h * x\big)_k = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} h_\ell \, x_{k-\ell}$. On a alors la relation
$Y(z) = H(z)\, X(z)$ entre les transformées en z des trois signaux discrets x, h et y, notées respectivement X, H et Y.

- Opérateur de translation temporelle

On rappelle que le filtre discret τ_a de translation temporelle associe au signal discret x un signal de sortie $y = \tau_a x$ qui est donné à l'aide de la réponse impulsionnelle δ_a: $y = \delta_a * x$. Alors $Y(z) = \frac{1}{z} X(z)$.

- Inversion de la transformée en z

Un exposé complet de ce sujet demande d'introduire les fonctions holomorphes d'une variable complexe et la formule des résidus, notions qui dépassent le cadre mathématique donné pour ce cours. Nous nous contentons d'énoncer un résultat, et renvoyons le lecteur au livre d'Henri Cartan *"Théorie élémentaire des fonctions analytiques*

d'une ou plusieurs variables complexes" pour les éléments fondamentaux sur les fonctions holomorphes.
On se donne une série de Laurent $X(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \frac{1}{z^n}$ que l'on suppose convergente dans la couronne $0 \leq r < |z| < R$ et un cercle Γ centré à l'origine et de rayon ρ tel que $r < \rho < R$. On peut calculer le coefficient x_n à partir des valeurs de la série $X(z)$ sur le cercle Γ: $x_n = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma z^{n-1} X(z)\,\mathrm{d}z$.

- Stabilité ℓ^∞ d'un filtre discret

Un filtre discret T défini par sa réponse impulsionnelle h (on a donc $Tx = h * x$ pour tout signal d'entrée x) est stable pour la norme ℓ^∞ si et seulement si sa réponse impulsionnelle appartient à ℓ^1_a: $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |h_n| < \infty$. On a alors $\|Tx\|_\infty \leq \|h\|_1 \|x\|_\infty$. Cette condition de stabilité équivaut au fait que la couronne de convergence $\{z \in \mathbb{C}, r < |z| < R\}$ de la fonction de transfert $H(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n z^{-n}$ contient le cercle unité ; on a $r < 1 < R$.

- Stabilité ℓ^∞ d'un filtre causal discret

Si, toutes choses égales par ailleurs, le filtre T est également causal, alors il est stable si et seulement si les pôles de la fonctions de transfert $H(z)$ sont à l'intérieur du cercle unité.
Dans le cas où la fonction de transfert est une fraction rationnelle pour fixer les idées, ses pôles sont les nombres complexes z_j qui annulent le dénominateur. La condition exprime que pour tout j, on a $|z_j| < 1$.

- Filtre de réponse impulsionnelle finie

Un filtre de réponse impulsionnelle finie a une réponse impulsionnelle qui ne comporte qu'un nombre fini de termes. Donc le seul pôle éventuel est situé en $z = 0$.

- Une famille de filtres de réponse impulsionnelle infinie

Si un filtre n'est pas de réponse impulsionnelle finie, il est de réponse impulsionnelle infinie et sa réponse impulsionnelle $h = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n \delta_{na}$

comporte une infinité de termes non nuls.
On peut réaliser un tel filtre avec des équations aux différences linéaires à coefficients constants. On se donne par exemple des entiers p et q et des nombres $a_0,\ a_1,\ \dots a_p$ et $b_1,\ b_2,\ \dots b_q$ de sorte que $y_n + \sum_{k=1}^{q} b_k y_{n-k} = \sum_{j=0}^{p} a_j x_{n-j}$. Si le signal d'entrée du filtre x est connu à tous les instants jusqu'au n^{o} et que la sortie y est connue à tous les temps discrets jusqu'au numéro $n-1$, la relation précédente permet d'expliciter la nouvelle valeur y_n.
La fonction de transfert $H(z)$ du filtre $y = Tx$ défini par les équations aux différences $y_n + \sum_{k=1}^{q} b_k y_{n-k} = \sum_{j=0}^{p} a_j x_{n-j}$ est donnée par la fraction rationnelle suivante : $H(z) = \frac{\sum_{j=0}^{p} a_j z^{-j}}{1+\sum_{k=1}^{q} b_k z^{-k}}$.

- Filtre "RC" discret

Pour le filtre "RC" continu, la sortie y est donnée en fonction de l'entrée x par résolution de l'équation différentielle
$RC\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y(t) = x(t)$. Pour le filtre "RC" discret, on remplace cette équation continue par le schéma aux différences
$RC\,\frac{y_n - y_{n-1}}{a} + y_n = x_n$. On laisse le lecteur calculer sa fonction de transfert, qui est une fraction rationnelle. Ce filtre est de réponse impulsionnelle infinie. Pour R, C et a positifs, si ce filtre est stable, alors il est causal [exercice !].

Exercices

- Fonctions de transfert de quelques filtes

Soit $a > 0$. On note τ_a l'opérateur de translation dans le temps défini pour un signal discret $x \equiv \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \,\delta_{na} \in X_a$ par la relation
$(\tau_a x)_n = x_{n-1}$.
a) Calculer la fonction de transfert $H_a(z)$ de ce filtre.
b) Même question pour le filtre $x \longmapsto y$ défini par
$y_n = \frac{1}{a}(x_n - x_{n-1})$.

b) Même question pour le filtre $x \longmapsto z$ défini par
$z_n = \frac{1}{4}x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{4}x_{n-1}$.

• Inversion de transformées en z

Soit r un nombre réel non nul et $H(z)$ la fonction de la variable complexe z définie par $H(z) = \frac{z}{z-r}$.

a) Trouver deux signaux discrets h_1 et h_2 de sorte que $H(z)$ soit la transformée en z des signaux h_1 et h_2. L'un de ces signaux est causal et l'autre non causal.

b) Reprendre la question avec la fonction $\widetilde{H}(z) = \frac{1}{z(z^2+1)}$.

• Stabilité

Soit $H(z) = \frac{z}{z-r}$ la fonction de transfert des deux filtres $T_1 x = h_1 * x$ et $T_2 x = h_2 * x$ proposés à l'exercice précédent.
Etudier la stabilité ℓ^∞ de ces filtres.

• Filtre RC discret

On se donne R, C et a strictement positifs. Pour un signal causal x on définit un signal causal y par $\frac{RC}{a}(y_n - y_{n-1}) + y_n = x_n$.

a) Calculer la fonction de transfert $H(z)$ du filtre obtenu.

b) Montrer à l'aide du critère de placement de pôle que ce filtre est stable.

• Transformée en z [avril 2014]

On désigne par h le signal discret
$h = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{4}\delta_a + \frac{1}{8}\delta_{2a} + \frac{1}{8}\delta_{3a} \equiv \sum_{k=0}^{\infty} h_k \, \delta_{ka}$.

a) Que valent les coefficients h_k ?

b) Montrer que $\sum_{k=0}^{\infty} \mid h_k \mid = 1$. En déduire que si x est un signal borné, alors le signal $h * x$ est également borné.

c) Le filtre discret T qui à x associe $y \equiv h * x$ est-il stable dans ℓ^∞ ?

d) Le filtre discret T est-il causal ?

e) Calculer l'expression de la fonction de transfert $H(z)$ du filtre T, c'est à dire la transformée en z du signal h.

f) Dans quelle région du plan complexe est-elle définie ?

g) Quel(s) est le (ou les) pôle(s) de cette fonction de transfert ?

h) La position du (des) pôle(s) dans le plan complexe est-elle cohérente avec les résultats précédents ?

• Signaux discrets et transformée en z [février 2014]

Pour un nombre réel α arbitraire, δ_α représente la masse de Dirac au point α. Par ailleurs, a est un nombre réel fixé strictement positif. On introduit le filtre T qui au signal discret $x \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \, \delta_{ka}$ associe le signal discret $y = T\, x$, $y \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}} y_k \, \delta_{ka}$ avec
$y_k = \frac{3}{2a} x_k - \frac{2}{a} x_{k-1} + \frac{1}{2a} x_{k-2}\,, \quad k \in \mathbb{Z}.$

a) Le filtre T est-il causal ?

b) Quelle est la réponse impulsionnelle $h = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \, \delta_{ka}$ du filtre T ?

c) Calculer la transformée en z $H(z)$ de la réponse impulsionnelle h introduite à la question précédente.

d) On introduit les tranformées en z $X(z)$ et $Y(z)$ des signaux x et y tels que $y = T\, x$.

e) Calculer $Y(z)$ en fonction de $X(z)$.

f) Que vaut le rapport $Y(z)/X(z)$?

g) Pouvait-on prévoir le résultat ?

h) Le filtre T est-il stable ?

• Signaux discrets et transformée en z [février 2015]

On se donne un pas d'échantillonnage $a > 0$ et le signal discret
$h \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \, \delta_{ka}$ tel que $h = \frac{1}{2} \, \delta_{2a} + \frac{1}{4} \, \delta_{4a} + \cdots + \frac{1}{2^k} \, \delta_{2ka} + \ldots.$

a) Que vaut le coefficient h_k en fonction de l'entier k ?

b) Montrer que le signal h est causal et appartient à l'espace ℓ^1_a.

c) Que vaut $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_k|$?

On introduit la transformée en z, notée $H(z)$, du signal h défini en préambule de cet exercice.

d) Pour quelles valeurs du nombre complexe z cette fonction est-elle *a priori* définie ?
e) Calculer l'expression analytique de $H(z)$ dans ce cas.
f) Préciser ses pôles, c'est à dire les valeurs du nombre complexe z qui annulent le dénominateur de $H(z)$.
On introduit le filtre T qui au signal discret $x \equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}} x_k \, \delta_{ka}$ associe le signal discret $y = h * x$.
g) Le filtre T est-il causal ?
h) Est-il stable ? Justifier avec soin votre réponse.

- Fonction de transfert [février 2016]

On se donne un pas d'échantillonnage $a > 0$, un nombre réel α strictement positif et la fonction suivante $H(z)$ de la variable complexe z définie par une série: $H(z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{z}\right)^{\ell}$.
a) Pour quelles valeurs de z la série $H(z)$ est-elle convergente ?
b) Montrer que la fonction $H(z)$ est une fonction de transfert d'un filtre linéaire U qui transforme un signal discret $x = \sum_{j\in\mathbb{Z}} x_j \, \delta_{ja}$ en un signal discret $y = \sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n \, \delta_{na}$.
c) Préciser la réponse impulsionnelle du filtre U ainsi défini.
d) Comment calculer les valeurs de y_n en fonction de l'ensemble des nombres x_j pour j entier positif ou négatif ?
e) A quelle condition sur le paramètre α le filtre U est-il stable ?

- Signal discret [février 2017]

On se donne un pas d'échantillonnage $a > 0$ et un signal discret $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \, \delta_{na}$ que l'on suppose borné : il existe un nombre positif ou nul $||x||_\infty$ qui dépend de x tel que pour tout entier n, $|x_n| \leq ||x||_\infty$.
a) Montrer que pour tout entier n, le nombre $y_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} x_{n-k}$ c'est à dire $y_n = x_n + \frac{1}{2} x_{n-1} + \frac{1}{4} x_{n-2} + \cdots + \frac{1}{2^k} x_{n-k} + \ldots$ est bien défini.
On désigne par y le signal discret $y = \sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n \, \delta_{na}$ avec y_n défini au point précédent.

b) Montrer qu'on a la relation $y_{n+1} = x_{n+1} + \frac{1}{2}\, y_n$.
On appelle T le filtre qui à tout signal borné x associe le signal y défini ci-dessus.
c) Ce filtre est-il causal ?
d) Quelle est la fonction de transfert $H(z)$ du filtre T ? On pourra introduire les transformées en z $X(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \frac{1}{z^n}$ et $Y(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} y_n \frac{1}{z^n}$ des signaux d'entrée x et de sortie y du filtre T et utiliser la relation établie à la question b).
e) Quelle est la réponse impulsionnelle $h = T\,\delta$ du filtre T ?
f) Démontrer que le filtre T est stable.

- Signal discret [avril 2017]

On se donne un pas d'échantillonnage $a > 0$ et un signal discret $x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n\, \delta_{na}$ que l'on suppose borné : il existe un nombre positif ou nul $||x||_\infty$ qui dépend de x tel que pour tout entier n, $|x_n| \leq ||x||_\infty$.
a) Montrer que pour tout entier n, le nombre $y_n = \frac{1}{a}\left(\frac{3}{2}\, x_n - 2\, x_{n-1} + \frac{1}{2}\, x_{n-2}\right)$ est bien défini.
On appelle T le filtre qui à tout signal borné x associe le signal y défini ci-dessus.
b) Ce filtre est-il causal ?
c) Quelle est la fonction de transfert $H(z)$ du filtre T ? On pourra introduire les transformées en z des signaux d'entrée x et de sortie y du filtre T.
d) Quelle est la réponse impulsionnelle $h = T\,\delta$ du filtre T ?
e) Démontrer que le filtre T est stable.

Bibliographie

H. Cartan. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann (Paris), 1961.

J. Dixmier et P. Dugac. *Cours de mathématiques du premier cycle*, Dunod (Paris), 1976.

G. Gasquet, P. Witomski. *Analyse de Fourier et applications*, Dunod (Paris), 2000.

J. Lelong-Ferrand, J.M. Arnaudiès. *Cours de mathématiques*, Dunod (Paris), 1974.

S. Mallat. *Traitement du signal*, Cours de l'Ecole Polytechnique (Palaiseau), 1996.

H. Reinhard. *Eléments de mathématiques du signal ; signaux déterministes*, Dunod (Paris), 1995.

F. Roddier. *Distributions et transformation de Fourier à l'usage des physiciens et des ingénieurs*, Ediscience (Paris), 1971.

L. Schwartz, avec le concours de D. Huet, *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Hermann (Paris), 1965.

Méthodes Mathématiques pour le Traitement du Signal

François Dubois
Préface de François Roddier

Ce livre est issu d'un enseignement de troisième année de Licence au Conservatoire National des Arts et Métiers à Paris, transmis au cours de la période 2012-2019.
Le programme suivi touche à l'analyse fonctionnelle et à l'analyse de Fourier dans une première partie. Les distributions sont introduites dans la seconde partie, uniquement dans le cas fondamental des distributions sur la droite réelle. La notion de solution élémentaire est mise en exergue avec le filtrage linéaire. Le traitement du signal discret est abordé en fin d'ouvrage, en se situant dans le cadre des distributions.
Chaque chapitre contient un résumé de cours et des énoncés d'exercices.

François Dubois est professeur des Universités au Conservatoire National des Arts et Métiers à Paris depuis 1994. Il enseigne les mathématiques.