

## Méthodes Mathématiques pour le Traitement du Signal

### Cours 13 Filtres discrets

- Translation temporelle

On rappelle que pour  $a \in \mathbb{R}$  et  $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , la fonction translatée  $\tau_a \varphi$  de la fonction  $\varphi$  est définie par  $(\tau_a \varphi)(t) = \varphi(t - a)$ .

Alors pour toute fonction  $f$  bornée sur  $\mathbb{R}$ , on vérifie simplement que

$\int_{\mathbb{R}} (\tau_a f)(t) \varphi(t) dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) (\tau_{-a} \varphi)(t) dt$ . Si on se donne une distribution  $U \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , la distribution translatée  $\tau_a U$  est définie de sorte que la relation précédente soit satisfaite dans le cas où  $U$  est une fonction bornée. On pose donc  $\langle \tau_a U, \varphi \rangle = \langle U, \tau_{-a} \varphi \rangle$  pour toute fonction test  $\varphi$ .

On vérifie alors que  $\tau_a \delta = \delta_a$ , masse de Dirac au point  $a$ . Cette relation se généralise aux itérés de l'opérateur de translation  $\tau_a$ :  $(\tau_a)^k \delta = \delta_{ka}$  pour  $k \in \mathbb{Z}$  et  $a \in \mathbb{R}$ .

- Signaux discrets

On se donne un pas d'échantillonnage en temps  $a > 0$ . Un signal discret  $x$  n'est connu que par ses valeurs  $x_k$  en des instants  $t_k = ka$  qui sont tous multiples entiers du pas de temps. On le modélise d'un point de vue mathématique avec une variante du peigne de Dirac. On pose  $x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \delta_{ka}$ . Si tous les  $x_k$  sont nuls sauf pour  $k = 0$  pour lequel on a  $x_0 = 1$ , alors le signal  $x$  est égal à la masse de Dirac. Si tous les  $x_k$  valent 1 pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , alors le signal  $x$  est égal au peigne de Dirac  $\Delta_a$ .

L'ensemble des signaux discrets  $x$  de la forme  $x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \delta_{ka}$  est noté  $X_a$ .

- Espaces de signaux discrets

Les signaux discrets bornés, intégrables ou de carré intégrables constituent les espaces  $\ell_a^\infty$ ,  $\ell_a^1$  et  $\ell_a^2$  respectivement. On a par définition  $x \in \ell_a^\infty$  si et seulement si  $\sup_{k \in \mathbb{Z}} |x_k| < \infty$  et  $x \in \ell_a^1$  si et seulement si  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_k| < \infty$ ; la série  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k$  est alors absolument convergente. Enfin,  $x \in \ell_a^2$  si et seulement si  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_k|^2 < \infty$  et la série des carrés des modules est convergente.

Les espaces  $\ell_a^\infty$ ,  $\ell_a^1$  et  $\ell_a^2$  sont normés et les normes associées sont définies par  $\|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |x_k|$  pour  $x \in \ell_a^\infty$ ,  $\|x\|_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_k|$  pour  $x \in \ell_a^1$  et  $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_k|^2}$  si  $x \in \ell_a^2$ .

- Translation temporelle d'un signal discret

Si  $x \in X_a$  est un signal discret, c'est à dire  $x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \delta_{ka}$ , alors son translaté temporel  $\tau_a x$  est un nouveau signal temporel qui se calcule selon la relation  $\tau_a x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_{k-1} \delta_{ka}$ . En d'autres termes,  $(\tau_a x)_k = x_{k-1}$ .

- Une autre expression d'un signal discret

On se donne un signal discret  $x \in X_a$  de la forme  $x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \delta_{ka}$ . Alors on peut l'écrire à l'aide de l'opérateur de translation :  $x = \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k (\tau_a)^k \right) \delta$ .

- Filtre discret

Un filtre discret  $T$  est un opérateur  $X_a \rightarrow X_a$  qui à un signal discret  $x \in X_a$  associe un nouveau signal discret  $y = T(x) \in X_a$  (noté aussi  $y = Tx$ ) de sorte à satisfaire les trois propriétés suivantes de linéarité, continuité et invariance par translation temporelle.

La linéarité exprime d'une part que  $T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$  pour tout les signaux d'entrée  $x_1$  et  $x_2$  de  $X_a$  et d'autre part que  $T(\lambda x) = \lambda T(x)$  pour tout scalaire  $\lambda$  et tout signal d'entrée  $x \in X_a$ .

La continuité exprime qu'une norme du signal de sortie (en pratique une des trois normes introduites plus haut) est toujours contrôlée par la norme correspondante du signal d'entrée :

$$\exists C \geq 0, \forall x \in X_a, \|Tx\| \leq C \|x\|.$$

L'invariance par translation temporelle est une conséquence de l'hypothèse très générale qu'aucun instant n'est privilégié : l'opérateur  $T$  commute avec la translation temporelle  $\tau_a$  :

$$T \circ \tau_a = \tau_a \circ T \text{ et pour tout signal } x, T(\tau_a x) = \tau_a(Tx).$$

- Exemples de filtres discrets

Les exemples de filtres fondamentaux sont l'identité  $\text{id}$  et la translation  $\tau_a$ . On a  $\text{id}x = x$  pour tout signal  $x \in X_a$ . La translation temporelle a été définie plus haut dans ce chapitre. On peut aussi se donner des formules de calcul qui permettent d'explicitier le signal de sortie  $y = Tx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} y_n \delta_{na}$  en fonction du signal d'entrée  $x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \delta_{na}$ . Pour les deux exemples précédents, on a respectivement  $y_n = x_n$  et  $y_n = x_{n-1}$ .

Ainsi, les relations  $y_n = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1})$ ,  $y_n = \frac{1}{4}x_n + \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{4}x_{n-2}$  et  $y_n = \frac{1}{4}x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{4}x_{n-1}$  définissent trois filtres. Nous invitons le lecteur à vérifier pour ces trois exemples les propriétés de linéarité, continuité et invariance par translation dans le temps.

- Convolution de deux masses de Dirac

On se donne deux nombres réels  $a$  et  $b$ . Alors le produit de convolution de la masse de Dirac au point  $a$  par la masse de Dirac au point  $b$  est égal à la masse de Dirac au point  $a + b$  :

$$\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}.$$

- Structure d'un filtre discret

On se donne un filtre discret  $T : X_a \rightarrow X_a$  qui satisfait les propriétés de linéarité, continuité et invariance temporelle proposées plus haut. Alors le signal de sortie  $Tx$  pour une entrée  $x \in X_a$  s'exprime comme un produit de convolution :  $Tx = h * x$ . Le signal  $h$  est appelé réponse impulsionnelle du filtre. Il est donné par  $h = T\delta$ , signal de sortie pour une entrée égale à l'impulsion de Dirac  $\delta$ .

- Convolution discrète

Le produit de convolution  $h * x$  du signal discret  $h$  par le signal discret  $x$  est un signal discret qui se décompose, quand il est défini, sur les masses de Dirac  $\delta_{pa}$  multiples du pas de temps  $a$  :

$$h * x = \sum_{p \in \mathbb{Z}} (h * x)_p \delta_{pa}.$$

Le nombre  $(h * x)_p$  est donné par la somme de la série suivante :

$$(h * x)_p = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} h_\ell x_{p-\ell}.$$

Une question importante est de savoir dans quelles conditions la série précédente est effectivement convergente.

- Convolution d'un signal dans  $\ell_a^\infty$  par un signal dans  $\ell_a^1$   
Si  $h \in \ell_a^\infty$  ( $\sup_{k \in \mathbb{Z}} |h_k| < \infty$ ) et  $x \in \ell_a^1$  ( $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_k| < \infty$ ), alors le produit de convolution  $h * x$  est bien défini, il appartient à  $\ell_a^1$  et on a l'inégalité  $\|h * x\|_1 \leq \|h\|_\infty \|x\|_1$ .
- Convolution de deux signaux dans  $\ell_a^2$   
Si  $h \in \ell_a^2$  ( $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_k|^2 < \infty$ ) et  $x \in \ell_a^2$  ( $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |x_k|^2 < \infty$ ) également, alors le produit de convolution  $h * x$  est bien défini. Il appartient à  $\ell_a^\infty$  et on a l'inégalité  $\|h * x\|_\infty \leq \|h\|_2 \|x\|_2$ .
- Signal causal  
Un signal  $x = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \delta_{ka}$  est causal si et seulement si les coefficients  $x_k$  sont tous nuls si  $k \leq -1$ . On note  $X_a^+$  l'ensemble de tous les signaux causaux.
- Filtre causal  
Un filtre discret  $T : X_a \rightarrow X_a$  est causal si et seulement si il transforme tout signal causal  $x \in X_a^+$  en un signal causal  $Tx \in X_a^+$ . On peut également considérer le filtre  $T$  comme un opérateur de  $X_a^+$  dans  $X_a^+$ .
- Réponse impulsionnelle causale  
Un filtre discret  $T$  défini par sa réponse impulsionnelle  $h$  (on a donc  $Tx = h * x$ ) est causal si et seulement si le signal  $h = T\delta$  est un signal causal. La propriété ( $x \in X_a^+ \implies Tx \in X_a^+$ ) est équivalente à  $h \in X_a^+$ .  
Dans le cas d'un filtre causal de réponse impulsionnelle  $h$  et d'un signal causal  $x$ , le coefficient  $(h * x)_p$  du produit de convolution  $h * x$  est donné par une somme finie. Il est donc toujours défini.

## Exercices

- A propos de l'opérateur de translation  
Soit  $a > 0$ . On note  $\tau_a$  l'opérateur de translation dans le temps défini pour une fonction  $\varphi$  régulière et à décroissance rapide  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  par  $(\tau_a \varphi)(t) = \varphi(t - a)$ . On se donne  $f \in L^\infty$  une fonction bornée.
  - Montrer que l'on a  $\int_{\mathbb{R}} (\tau_a f)(t) \varphi(t) dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) (\tau_{-a} \varphi)(t) dt$ .
  - En déduire que la définition  $\tau_a U$  de la translatée d'une distribution  $U \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  grâce à la relation  $\langle \tau_a U, \varphi \rangle = \langle U, \tau_{-a} \varphi \rangle$ , peut se ramener à la relation démontrée ci-dessus.
- Translatées de la masse de Dirac  
Soit  $a > 0$  et  $\tau_a$  l'opérateur introduit à l'exercice précédent. On désigné par  $\delta$  la masse de Dirac et  $\delta_\alpha$  la masse de Dirac en un point donné  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
  - Montrer que  $\tau_a \delta = \delta_a$  et que de façon plus générale  $(\tau_a)^k \delta = \delta_{ka}$  pour  $k$  entier positif ou nul.
  - Montrer que  $(\tau_a)^{-1} \delta = \delta_{-a}$ .
  - En déduire que la relation  $(\tau_a)^k \delta = \delta_{ka}$  est vraie pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ .
- Translatée d'une distribution  
Soit  $a > 0$  et  $\tau_a$  l'opérateur de translation dans le temps. Soit  $U \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  une distribution quelconque. Démontrer que  $\delta_a * U = \tau_a U$ .

- Filtres classiques

Soit  $x \equiv \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \delta_{na} \in X_a$  un signal discret. On note  $T_1$  le filtre qui à  $x \in X_a$  associe le signal  $T_1 x = y$  tel que  $y_n = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1})$ . De même, on note  $T_2$  le filtre qui à  $x \in X_a$  associe le signal  $T_2 x = z$  tel que  $z_n = \frac{1}{4}x_n + \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{4}x_{n-2}$ .

- Calculer les réponses impulsionnelles  $h_1$  et  $h_2$  de ces deux filtres.
- Montrer qu'ils sont causaux.
- Vérifier que l'on a  $T_1 x = h_1 * x$  et  $T_2 x = h_2 * x$  pour tout signal  $x \in X_a$ .
- Montrer que  $h_1 * h_1 = h_2$ .
- En déduire que l'on a  $T_1(T_1 x) = T_2 x$  pour tout signal discret  $x \in X_a$ .

- D'autres filtres classiques

On note  $T$  le filtre qui à  $x \equiv \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \delta_{na} \in X_a$  associe le signal  $Tx = y \equiv \sum_{n \in \mathbb{Z}} y_n \delta_{na} \in X_a$  tel que  $y_n = \frac{1}{4}x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{4}x_{n-1}$ .

Calculer la réponse impulsionnelle  $h$  de ce filtre et montrer que le filtre  $T$  n'est pas causal (on pourra construire un signal  $x$  causal qui se transforme en un signal  $y$  non causal).

- Dérivateur

- Montrer que le filtre  $D_a$  défini par la relation de récurrence  $(D_a x)_n = \frac{1}{a}(x_n - x_{n-1})$  est causal.
- Préciser sa réponse impulsionnelle.
- Montrer que si  $a$  tend vers zéro et si le signal discret  $x$  est obtenu par restriction d'un signal analogique régulier  $X$  (de façon précise,  $x_n = X(na)$ ) alors le signal de sortie  $D_a x$  approche la dérivée  $X'(t)$ .
- Calculer le résultat itéré  $D_a(D_a x)$ .
- Quelle est sa limite si  $a$  tend vers zéro ?

- Signaux discrets [février 2013]

Pour un nombre réel  $\alpha$  arbitraire,  $\delta_\alpha$  représente la masse de Dirac au point  $\alpha$ . Par ailleurs,  $a$  est un nombre réel fixé strictement positif.

- Rappeler l'expression du produit de convolution  $\delta_{na} * \delta_{ma}$  des masses de Dirac  $\delta_{na}$  et  $\delta_{ma}$  pour deux entiers  $n$  et  $m$ .
- Soit  $h_1 = \frac{3}{2}\delta_0 - \frac{1}{2}\delta_a$  et  $h_2 = \delta_0 - \delta_a$  deux signaux discrets. Calculer leur produit de convolution  $h \equiv h_1 * h_2$ .

On introduit le filtre discret  $T$  qui au signal discret  $x \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \delta_{ka}$  associe  $y \equiv h * x$ .

- Quelle est l'expression de  $y_n$  en fonction des  $x_k$  ?
- Le filtre  $T$  est-il causal ?
- Le filtre  $T$  est-il stable ?

- Signaux discrets [avril 2013]

Pour un nombre réel  $\alpha$  arbitraire,  $\delta_\alpha$  représente la masse de Dirac au point  $\alpha$ . Par ailleurs,  $a$  est un nombre réel fixé strictement positif.

- Rappeler l'expression du produit de convolution  $\delta_{na} * \delta_{ma}$  des masses de Dirac  $\delta_{na}$  et  $\delta_{ma}$  pour deux entiers  $n$  et  $m$ .

## MÉTHODES MATHÉMATIQUES POUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL

- b) Soit  $h_1 = 4\delta_0 - \delta_a$  et  $h_2 = \delta_0 - \delta_a$  deux signaux discrets. Calculer leur produit de convolution  $h \equiv h_1 * h_2$ .
- c) On introduit le filtre discret  $T$  qui au signal discret  $x \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \delta_{ka}$  associe  $y \equiv h * x$ . Quelle est l'expression de  $y_n$  en fonction des  $x_k$  ?
- d) Le filtre introduit à la question précédente est-il causal ?
- e) Le filtre introduit à la question c) est-il stable ?