Département de Mathématiques et Statistiques

Méthodes Mathématiques pour le Traitement du Signal (MAA107)

Devoir 3, à rendre pour la séance numéro 10, mardi 24 novembre 2020

Exercice 1)   Transformation de Laplace

On désigne par $H(t)$ la fonction de Heaviside : $H(t) = 1$ si $t \geq 0$ et $H(t) = 0$ si $t < 0$ et par $[\mathcal{L}(x(t))](p)$ la transformée de Laplace d'une fonction x.

a) Expliciter l'expression des transformées de Laplace suivantes :
$[\mathcal{L}(H(t))](p)$, $[\mathcal{L}(t\, H(t))](p)$, $[\mathcal{L}(t^2\, H(t))](p)$, $[\mathcal{L}(\cos t\, H(t))](p)$ et $[\mathcal{L}(\sin t\, H(t))](p)$.

On se donne la fraction rationnelle $F(p) \equiv \frac{2}{p^3\,(p^2+1)}$.

b) Décomposer cette fraction en éléments simples. On cherchera des nombres réels α, β, γ, δ et ε de sorte que $F(p) = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p^2} + \frac{\gamma}{p^3} + \frac{\delta\, p+\varepsilon}{p^2+1}$. On pourra utiliser les valeurs particulières suivantes de p : i, 0, ∞ et 1.

c) Vérifier que le calcul effectué à la question précédente est correct.

d) En déduire l'expression d'une fonction $f(t)$ de sorte que $[\mathcal{L}(f(t))](p) = F(p)$, où F est la fraction rationnelle introduite plus haut.

On se propose maintenant de calculer la solution $y(t)$ de l'équation différentielle
$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + y(t) = t^2$ avec la condition initiale $y(0) = 1$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = 1$. On utilise la notation
$Y(p) = [\mathcal{L}(H(t)\, y(t))](p)$ pour la transformée de Laplace de cette fonction.

e) Quelle est la relation satisfaite par la transformée de Laplace $Y(p)$ de la solution $y(t)$ de l'équation différentielle $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + y(t) = t^2$ avec la condition initiale $y(0) = 1$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = 1$?

f) A l'aide des questions précédentes, calculer la solution $y(t)$ de cette équation différentielle soumise à la condition initiale rappelée à la question e).

Exercice 2)   Transformation de Fourier

Pour t réel, une loi de Cauchy est une fonction de la forme $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

a) A l'aide de la transformée de Fourier conjuguée de la fonction $\exp(-a\,|\,t\,|)$ et de la formule d'inversion de Fourier, calculer la transformée de Fourier $\widehat{f}(\omega)$.

b) En déduire la transformée de Fourier conjuguée de la fonction $g(t) = \frac{1}{10+6\,t+t^2}$.

c) Calculer la transformée de Fourier de la fonction $h(t) = \frac{t}{1+t^2}$.

François Dubois, 10 novembre 2020.