

Méthodes Mathématiques pour le Traitement du Signal

Cours 6 Intégrale double

- Introduction

On se donne une partie bornée Ω du plan \mathbb{R}^2 et une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. L'intégrale double de la fonction f dans le domaine Ω est un nombre réel qui, quand il existe, se note $\int_{\Omega} f(x, y) dx dy$ ou parfois $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$ et souvent plus simplement $\int_{\Omega} f dx dy$ ou même $\int_{\Omega} f$.

- Intégrale double de la fonction "un"

Si on prend le rectangle $]a, b[\times]c, d[$ du plan \mathbb{R}^2 (avec $a < b$ et $c < d$), l'intégrale double de la fonction $f(x, y) \equiv 1$ est simplement la surface $(b - a)(d - c)$ du rectangle :

$$\int_{]a, b[\times]c, d[} dx dy = (b - a)(d - c).$$

De façon générale, si Ω désigne une partie bornée du plan, l'intégrale double sur Ω de la fonction $f(x, y) \equiv 1$ est la surface $|\Omega|$ du domaine : $\int_{\Omega} dx dy = |\Omega|$.

- Linéarité

On suppose connue l'intégrale double $\int_{\Omega} f(x, y) dx dy$ et on se donne un nombre λ . Alors $\int_{\Omega} (\lambda f)(x, y) dx dy = \lambda \int_{\Omega} f(x, y) dx dy$. Si on se donne aussi l'intégrale double $\int_{\Omega} g(x, y) dx dy$ de la fonction g , alors $\int_{\Omega} (f + g)(x, y) dx dy = \int_{\Omega} f(x, y) dx dy + \int_{\Omega} g(x, y) dx dy$.

- Positivité

On suppose la fonction f positive sur Ω : $f(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in \Omega$. Alors $\int_{\Omega} f(x, y) dx dy \geq 0$. Si $f \leq g$ sur Ω c'est à dire $f(x, y) \leq g(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \Omega$, alors

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy \leq \int_{\Omega} g(x, y) dx dy \text{ [exercice].}$$

- Additivité par rapport au domaine

On suppose l'ensemble Ω borné décomposé en une réunion finie de parties Ω_i "plus simples", $\Omega = \cup_{i=1}^N \Omega_i$ de sorte que l'intersection $\Omega_i \cap \Omega_j$ est de surface nulle si $i \neq j$: $|\Omega_i \cap \Omega_j| = 0$. Alors l'intégrale sur Ω est la somme des intégrales sur chacun des morceaux Ω_i :

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} f(x, y) dx dy.$$

- Intégrale d'une fonction étagée

On se donne une décomposition de Ω borné comme ci-dessus et une fonction f "étagée" sur Ω , c'est à dire constante sur chacune des parties Ω_i : $\forall i, \exists \lambda_i, \forall (x, y) \in \Omega_i, f(x, y) = \lambda_i$. Le calcul de l'intégrale de f sur Ω est explicite : $\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^N \lambda_i |\Omega_i|$.

- Intégrale d'une fonction continue

On désigne toujours par Ω une partie bornée de \mathbb{R}^2 et par $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ une fonction continue sur Ω et jusqu'au bord inclus :

$\forall X \in \overline{\Omega}, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall Y \in \overline{\Omega}, |X - Y| < \eta \implies |f(X) - f(Y)| < \varepsilon$. Alors l'intégrale de f sur Ω est bien définie ; c'est un nombre réel ou éventuellement complexe.

Pour établir ce résultat, on utilise l'uniforme continuité de f et on l'approche par des fonctions étagées. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe f_ε étagée sur Ω de sorte que $f_\varepsilon - \varepsilon \leq f \leq f_\varepsilon + \varepsilon$ sur Ω .

Alors le nombre $\int_\Omega f(x, y) dx dy$ satisfait nécessairement aux inégalités

$$\int_\Omega f_\varepsilon(x, y) dx dy - \varepsilon |\Omega| \leq \int_\Omega f(x, y) dx dy \leq \int_\Omega f_\varepsilon(x, y) dx dy + \varepsilon |\Omega|.$$

On montre alors d'une part que le nombre $\int_\Omega f(x, y) dx dy$ est bien défini et d'autre part qu'on peut l'approcher en calculant l'intégrale d'une fonction en escalier qui approche la fonction f .

- Intégrale d'une fonction positive

On se donne $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et f fonction positive $\Omega \rightarrow \mathbb{R} : f(x, y) \geq 0$ pour $(x, y) \in \Omega$. L'intégrale $\int_\Omega f(x, y) dx dy$ est dans ce cas toujours bien définie, quitte à accepter la valeur $+\infty$. Par exemple pour $f(x, y) \equiv 1$ et $\Omega = \mathbb{R}^2$, on a $\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = +\infty$. Si l'intégrale n'est pas infinie, si c'est un nombre réel positif, on écrit cette propriété sous la forme $\int_\Omega f(x, y) dx dy < \infty$.

- Théorème de Tonelli

On se donne une fonction positive f définie dans \mathbb{R}^2 et à valeurs réelles. Notons qu'on peut toujours se ramener à ce cas si f est définie de Ω dans \mathbb{R} en supposant f nulle hors de Ω . Pour x réel fixé on note $F(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy$ le nombre positif éventuellement égal à $+\infty$ obtenu en intégrant la fonction f par rapport à la seconde variable y , en laissant la première fixée. De même, on note $G(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx$ le nombre positif au besoin égal à $+\infty$ si l'intégrale diverge, résultat de l'intégrale de la fonction f par rapport à la première variable x en laissant la deuxième fixe. Alors les intégrales de F et G sont égales et permettent de calculer l'intégrale double de la fonction f sur \mathbb{R}^2 : $\iint_\Omega f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} F(x) dx = \int_{\mathbb{R}} G(y) dy$.

En explicitant les valeurs des fonctions F et G , la conclusion du théorème de Tonelli s'écrit souvent sous la forme $\iint_\Omega f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} dx \left[\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy \right] = \int_{\mathbb{R}} dy \left[\int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx \right]$. On peut toujours intégrer une fonction positive de deux variables dans l'ordre que l'on veut.

La relation précédente montre que si l'une des deux intégrales simples $\int_{\mathbb{R}} F(x) dx$ ou $\int_{\mathbb{R}} G(y) dy$ est infinie, il en est de même de l'intégrale double qui est alors infinie. Si l'une des intégrales $\int_{\mathbb{R}} F(x) dx$ ou $\int_{\mathbb{R}} G(y) dy$ est finie, alors c'est aussi le cas pour l'intégrale double $\iint_\Omega f(x, y) dx dy$. On écrit alors $0 \leq \iint_\Omega f(x, y) dx dy < \infty$.

- Exemple d'utilisation du théorème de Tonelli

On peut par exemple vérifier la conclusion du théorème de Tonelli en considérant la fonction f égale à 1 dans le demi-disque $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ et égale à 0 ailleurs. Les deux calculs précédents de l'intégrale double de f sur \mathbb{R}^2 redonnent la surface $|D|$ du demi-disque D , à savoir $\frac{\pi}{2}$.

- Théorème de Fubini

On se donne maintenant une fonction f définie sur \mathbb{R}^2 à valeurs réelles ou éventuellement complexes. On suppose que l'intégrale double de la fonction positive $|f|$ est finie :

$\iint_\Omega |f(x, y)| dx dy < \infty$. Alors l'intégrale double de f sur \mathbb{R}^2 est bien définie ; c'est un nombre réel ou complexe que l'on peut calculer à l'aide d'une des relations suivantes :

$\iint_\Omega f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} dx \left[\int_{\mathbb{R}} dy f(x, y) \right]$ ou $\iint_\Omega f(x, y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} dy \left[\int_{\mathbb{R}} dx f(x, y) \right]$. Si l'intégrale double est bien définie, c'est à dire si $\iint_\Omega |f(x, y)| dx dy$ est finie, on peut toujours intégrer une fonction de deux variables dans l'ordre que l'on veut.

- Une inégalité importante

On se donne $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et f de Ω dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} . On suppose que la valeur absolue de f (ou le module de f si elle est à valeurs complexes) est intégrable. On sait grâce au théorème de Fubini qu'alors l'intégrale de la fonction f sur Ω a un sens. On a de plus l'inégalité $|\int_{\Omega} f(x, y) dx dy| \leq \int_{\Omega} |f(x, y)| dx dy$.

- Exemple d'utilisation du théorème de Fubini

On se donne deux réels a et b strictement positifs et le triangle

$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 1\}$. On pose $f(x, y) = x - y$. On vérifie d'abord que l'intégrale de la fonction $|f|$ sur le triangle T est finie puisque $|f(x, y)| \leq a + b$ si $(x, y) \in T$. Donc $\int_T |f(x, y)| dx dy \leq (a + b)|T| = (a + b) \frac{ab}{2} < \infty$ et on est dans le cadre des hypothèses du théorème de Fubini. On peut vérifier sur cet exemple [exercice !] que les deux intégrales simples successives $\int_0^a dx [\int_0^{b(1-x/a)} dy (x - y)]$ et $\int_0^b dy [\int_0^{a(1-y/b)} dx (x - y)]$ sont égales et valent $\frac{ab}{6} (b - a)$.

- Changement de variable dans une intégrale double

On se donne une transformation régulière et bijective F d'une partie $\widehat{\Omega}$ "assez simple géométriquement" vers le domaine d'intégration Ω :

$\widehat{\Omega} \ni (\widehat{x}, \widehat{y}) \mapsto F(\widehat{x}, \widehat{y}) \equiv (x = X(\widehat{x}, \widehat{y}), y = Y(\widehat{x}, \widehat{y})) \in \Omega$. La régularité des fonctions X et Y permet de considérer les dérivées partielles $\frac{\partial X}{\partial \widehat{x}}(\widehat{x}, \widehat{y}), \frac{\partial X}{\partial \widehat{y}}(\widehat{x}, \widehat{y}), \frac{\partial Y}{\partial \widehat{x}}(\widehat{x}, \widehat{y})$ et $\frac{\partial Y}{\partial \widehat{y}}(\widehat{x}, \widehat{y})$ qui sont

aussi des fonctions définies sur $\widehat{\Omega}$. On forme la matrice jacobienne $J(F)(\widehat{x}, \widehat{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial \widehat{x}} & \frac{\partial X}{\partial \widehat{y}} \\ \frac{\partial Y}{\partial \widehat{x}} & \frac{\partial Y}{\partial \widehat{y}} \end{pmatrix}$,

son déterminant $\det(J(F)) = \frac{\partial X}{\partial \widehat{x}} \frac{\partial Y}{\partial \widehat{y}} - \frac{\partial Y}{\partial \widehat{x}} \frac{\partial X}{\partial \widehat{y}}$ et la valeur absolue $|\det(J(F))|(\widehat{x}, \widehat{y})$ de ce déterminant. Alors l'intégrale d'une fonction f sur Ω peut se calculer à l'aide d'une intégrale sur le domaine des paramètres : $\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{\widehat{\Omega}} f(X(\widehat{x}, \widehat{y}), Y(\widehat{x}, \widehat{y})) |\det(J(F))|(\widehat{x}, \widehat{y}) d\widehat{x} d\widehat{y}$.

Dans la relation précédente, il est essentiel de ne pas oublier la valeur absolue du déterminant jacobien, c'est à dire le facteur $|\det(J(F))|(\widehat{x}, \widehat{y})$.

- Coordonnées polaires du plan

Dans ce cas, le domaine $\widehat{\Omega}$ est noté classiquement avec les variables (r, θ) et le changement de coordonnées F s'écrit simplement $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$. Après transformation de $\widehat{\Omega}$ en Ω par ce passage en coordonnées polaires, on forme le déterminant jacobien

$$J(r, \theta) \equiv \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial x}{\partial \theta} - \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \theta} = r \text{ et on a } \int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{\widehat{\Omega}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

- Introduction à l'intégration par parties

La question est de généraliser aux intégrales doubles la relation $\int_a^b \frac{df}{dx} dx = f(b) - f(a)$ toujours vraie pour les intégrales simples dès que f est dérivable et en particulier pour $a < b$. Il faut voir cette relation comme une intégrale sur le bord $\partial([a, b]) = \{a, b\}$ de l'intervalle $]a, b[$. On peut noter $n_b \equiv +1$ la "normale extérieure" à l'intervalle $]a, b[$ au point b et $n_a \equiv -1$ la normale extérieure à cet intervalle au point a . La relation précédente s'écrit aussi

$$\int_a^b \frac{df}{dx} dx = n_a f(a) + n_b f(b).$$

- Frontière

Si Ω est un domaine borné du plan \mathbb{R}^2 , on suppose sa frontière $\partial\Omega$ assez régulière. La notion de bord, de frontière est assez intuitive. Par exemple, si Ω est le disque de centre l'origine et de

rayon R , sa frontière est le cercle de centre O et de même rayon. On paramètre cette courbe $\partial\Omega$ avec des coordonnées cartésiennes : $x = X(t)$, $y = Y(t)$, avec $0 \leq t \leq 1$ pour fixer les idées.

- Normale extérieure

La normale extérieure à un domaine borné Ω du plan est un vecteur unitaire $n(x, y)$ défini, si le bord $\partial\Omega$ est assez régulier, pour tout point $(x, y) \in \partial\Omega$. Ce vecteur $n(x, y) \equiv (n_x(x, y), n_y(x, y))$ est perpendiculaire à la direction tangente à la courbe. Avec un paramétrage $x = X(t)$, $y = Y(t)$ de $\partial\Omega$ comme plus haut, on a $n_x \frac{dX}{dt} + n_y \frac{dY}{dt} = 0$ en tout point du contour. De plus, la normale $n(x, y)$ est unitaire : $n_x(x, y)^2 + n_y(x, y)^2 \equiv 1$, pour tout $(x, y) \in \partial\Omega$. Enfin, elle pointe vers l'extérieur de Ω .

Dans le cas du disque de centre l'origine et de rayon R , la normale $n(x, y)$ au point $(x, y) = (R \cos \theta, R \sin \theta) \in \partial\Omega$ sur le bord s'écrit $n(x, y) = (\cos \theta, \sin \theta)$.

- Inégrale de contour

On peut intégrer une fonction f définie sur une courbe Γ . Afin de garantir que l'intégrale de la fonction "un" sur la courbe Γ est égale à la longueur $|\Gamma|$ de cette courbe, on introduit l'abscisse curviligne γ telle que $\frac{d\gamma}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dt}\right)^2}$ et on pose

$$\int_{\Gamma} f(x, y) d\gamma = \int_0^1 f(X(t), Y(t)) \sqrt{\left(\frac{dX}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dY}{dt}\right)^2} dt.$$

Dans le cas du cercle de centre O et de rayon R , si θ désigne l'angle polaire, on a $d\gamma = R d\theta$ et on peut finalement écrire $\int_{\Gamma} f(x, y) d\gamma = \int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) R d\theta$. On retrouve bien que si $f \equiv 1$, son intégrale sur Γ est la longueur du cercle.

- Intégration par parties

L'intégrale double dans le domaine Ω de la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ d'une fonction f est égale à une intégrale sur le bord $\partial\Omega$ du domaine. De façon précise, on désigne par $n_j(x, y)$ la composante numéro j de la normale extérieure en un point (x, y) de la frontière. On a $\iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x, y) dx dy = \int_{\partial\Omega} f(x, y) n_j(x, y) d\gamma$. On peut détailler cette relation pour chacune des deux composantes : $\iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dx dy = \int_{\partial\Omega} f(x, y) n_x(x, y) d\gamma$ et $\iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx dy = \int_{\partial\Omega} f(x, y) n_y(x, y) d\gamma$. Ces relations sont fondamentales. Entre autres pour de nombreuses applications en ingénierie.

Exercices

- Intégrale simple et intégrale double

La plupart des propriétés de l'intégrale double ont leur équivalent pour l'intégrale simple. A partir des notes de cours, énoncer en regard de chaque propriété de l'intégrale double la propriété équivalente de l'intégrale simple.

- Utilisation du théorème de Tonelli

Soit D le demi-disque $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Calculer sa surface en utilisant les deux façons de faire que suggère le théorème de Tonelli.

MÉTHODES MATHÉMATIQUES POUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL

- Utilisation du théorème de Fubini

Soit T le triangle $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq y \leq x \leq 1\}$.

- Montrer que l'on peut appliquer le théorème de Fubini à l'intégrale $\int_T (x + y - \frac{1}{2}) dx dy$.
- Calculer cette intégrale de deux façons différentes. [$\frac{1}{4}$]

- Convolution dans l'espace L^1

On se donne f et g deux fonctions intégrables c'est à dire telles que les intégrales

$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \equiv \|f\|_1$ et $\int_{\mathbb{R}} |g(x)| dx \equiv \|g\|_1$ sont finies. On note cette propriété $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$.

- Montrer qu'alors le produit de convolution $f * g$ appartient aussi à l'espace $L^1(\mathbb{R})$.
- En déduire l'inégalité $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

- Changement de l'ordre d'intégration

On se donne une fonction f bornée sur $]0, 1[$.

- Ecrire l'intégrale double $\int_0^1 dy [\int_y^{y^2} dx f(x, y)]$ à l'aide d'une intégrale de la forme $\int_0^1 F(x) dx$, où F est une fonction qu'on précisera.
- Achever le calcul pour $f(x, y) \equiv 1$. [$\frac{1}{6}$]

- Intégrale de Gauss

On se propose de calculer l'intégrale de Gauss $G = \int_0^\infty \exp(-\frac{x^2}{2}) dx$.

- Montrer que cette intégrale G définit bien un nombre réel positif.
- Relier sa valeur à celle de l'intégrale double $I = \iint_{]0, \infty[\times]0, \infty[} \exp(-\frac{x^2+y^2}{2}) dx dy$.
- Calculer ensuite I en passant en coordonnées polaires.
- En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss G . [$\sqrt{2\pi}$]

- Aire contenue par une ellipse

On se donne $a > 0$, $b > 0$ et on note E le disque elliptique bordé par l'ellipse d'équation $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1$. Grâce au changement de variables $x = ar \cos \theta$, $y = br \sin \theta$, calculer l'aire de E . [πab]

- Intégrale double [novembre 2012]

Soit D le disque de centre l'origine et de rayon 1 : $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$. On pose $g(x, y) = (\frac{1}{x^2+y^2})^{3/4}$.

- L'intégrale double $I = \iint_D g(x, y) dx dy$ est-elle un nombre réel ?
- Justifier avec soin votre réponse.
- Si la réponse à la question a) est "oui", calculer la valeur de l'intégrale I . [4π]

- Intégrale double [novembre 2013]

Soit D le domaine du plan défini par $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \geq 1\}$. On pose $f(x, y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha}$. On cherche à déterminer les valeurs du paramètre α pour lesquelles l'intégrale double $I = \iint_D f(x, y) dx dy$ est un nombre réel puis à calculer cette intégrale.

- Dessiner le domaine D .

On passe en coordonnées polaires et on pose $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ avec $r \geq 0$.

- Montrer que, pour tout $(x, y) \in D$, on a $|f(x, y)| \leq g(r, \theta) \equiv r^{2-2\alpha}$.

c) Après avoir remarqué que la fonction g est positive, établir pour quelles valeurs du paramètre α l'intégrale $\iint_{r \geq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/2} g(r, \theta) r dr d\theta$ obtenue après passage en coordonnées polaires est bien un nombre réel.

d) Dans le cas où $\iint_{r \geq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/2} g(r, \theta) r dr d\theta$ est un nombre réel, calculer l'intégrale I en fonction de α . $\left[\frac{1}{4(\alpha-2)} \right]$

• Intégrales doubles [novembre 2014]

Soit T le triangle décrit algébriquement à l'aide de la relation

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}.$$

a) Dessiner le triangle T .

Calculer les cinq intégrales doubles suivantes :

b) $I_1 = \iint_T dx dy,$

c) $I_2 = \iint_T x dx dy,$

d) $I_3 = \iint_T y dx dy,$

e) $I_4 = \iint_T x^2 dx dy$

f) $I_5 = \iint_T xy dx dy.$ $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24} \right]$

• Intégrale double [février 2015]

On se donne un nombre réel β .

a) Pour quelles valeurs de β l'intégrale $I(\beta) = \int_0^1 \frac{1}{t^\beta} dt$ définit-elle un nombre réel ?

b) Calculer le nombre $I(\beta)$ dans un tel cas.

Dans la suite de l'exercice, on considère le disque

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\} \text{ et on se donne un nombre } \alpha. \text{ On pose aussi } f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^\alpha}.$$

c) En passant en coordonnées polaires ($x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$), montrer qu'on a la majoration $|f(x, y)| \leq g(r)$, avec $g(r) = \frac{1}{r^{2\alpha-4}}$.

d) A l'aide du théorème de Tonelli et en passant en coordonnées polaires, montrer que l'intégrale double de la fonction g sur le disque D est finie si et seulement si $\alpha < 3$.

e) Démontrer que $\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4}$.

f) Si $\alpha < 3$, calculer l'intégrale double $\iint_D f(x, y) dx dy.$ $\left[\frac{\pi}{8(3-\alpha)} \right]$

• Intégrales doubles [novembre 2016]

Soit T le triangle décrit algébriquement à l'aide de la relation

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2\}.$$

a) Dessiner le triangle T .

Calculer les cinq intégrales doubles suivantes :

b) $I_1 = \iint_T dx dy,$

c) $I_2 = \iint_T x dx dy,$

d) $I_3 = \iint_T y dx dy,$

e) $I_4 = \iint_T x^2 dx dy$

f) $I_5 = \iint_T xy dx dy.$ $\left[2, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3} \right]$