

Méthodes Mathématiques pour le Traitement du Signal (MAA107)

Devoir 4, à rendre pour la séance numéro 13, mardi 03 janvier 2023

Exercice 1) Dérivation au sens des distributions

Soit $f(t)$ la fonction périodique de période 2π définie par $f(t) = |t|$ si $-\pi \leq t \leq \pi$.

- Calculer sa dérivée f' première au sens des distributions.
- La distribution f' est-elle une fonction ? Justifier votre réponse.
- Calculer la dérivée seconde f'' de la fonction f au sens des distributions.
- On désigne par $H(t)$ la fonction de Heaviside : $H(t) = 1$ si $t \geq 0$ et $H(t) = 0$ si $t < 0$. On pose $g(t) = H(t) \exp(-2t)$. La fonction g est-elle continue ? Est-elle causale ?
- Calculer, en justifiant votre réponse, la distribution $K = g' + 2g(t)$.

Exercice 2) Dérivée du logarithme au sens des distributions

On rappelle que la valeur principale de Cauchy est définie par

$\langle \text{vp } \frac{1}{x}, \varphi \rangle \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt$ si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

- Montrer que cette limite existe bien et que l'on a $\langle \text{vp } \frac{1}{x}, \varphi \rangle = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t} dt$.
- Montrer que la fonction f définie par $\mathbb{R} \ni t \mapsto \log(|t|) \in \mathbb{R}$ peut être identifiée à une distribution sur \mathbb{R} . On montrera que l'intégrale $\langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t) dt$ est bien définie pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
- Calculer la dérivée f' de la fonction f au sens des distributions.

Exercice 3) Convolution de distributions classiques

On se donne deux distributions T et U et une fonction test $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

- Rappeler les trois étapes de l'algorithme vu en cours afin de calculer le produit de convolution $T * U$ contre la fonction test φ .
- Si $T = \delta_a$, masse de Dirac au point $a \in \mathbb{R}$ et $U = \delta_b$, expliciter la distribution $T * U$.
- Rappeler quelle est l'action de la distribution δ' sur une fonction test $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
- Calculer le produit de convolution $\delta' * \delta'$.
- On se donne deux nombres réels a et b . On rappelle que $\delta'_a = (\delta_a)'$; on a une relation analogue pour δ'_b . Calculer le produit de convolution $\delta'_a * \delta'_b$.