Conservatoire National des Arts et Métiers
Apprentis en Sciences et Techniques Nucléaires
Cours d'Analyse Vectorielle

14 septembre 2015

Exercices

Cours 1. Intégrales simples.

Exercice 1) Intégrales parfois généralisées
Calculer $\int_0^1 x \, \mathrm{d}x$, et plus généralement $\int_0^1 x^\alpha \, \mathrm{d}x$. D'abord pour α positif, puis pour α compris entre -1 et 0. Que se passe-t-il pour α strictement plus petit que -1 ? Pour $\alpha = -1$?

Exercice 2) Intégration par parties ?
Calculer $\int_0^x t \, \cos t \, \mathrm{d}t$ en utilisant une intégration par parties. Reprendre le calcul précédent en exprimant une primitive de la fonction $t \longmapsto t \cos t$ sous la forme générale $(at+b) \cos t + (ct+d) \sin t$. En déduire alors par un calcul analogue la valeur de l'intégrale $\int_0^x t \, \sin t \, \mathrm{d}t$.

Exercice 3) Fonction réciproque
Montrer la relation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{Arccos} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Quelle est la valeur de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{Arcsin} x$?

Exercice 4) Changement de variables dans une intégrale
Montrer qu'on a les égalités suivantes

$$\int_0^\pi \sin^2 t \, \cos t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{y} \, \mathrm{d}y = \int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \, .$$

Calculer $\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2) \, x \, \mathrm{d}x$.

Exercice 5) Moyenne classique
Que valent $\int_0^\pi \sin^2 x \, \mathrm{d}x$ et $\int_0^\pi \cos^2 x \, \mathrm{d}x$?

Exercice 6) Solution explicite d'un problème de Poisson
On se donne une fonction continue f définie sur l'intervalle $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose

$$u(x) = (1-x) \int_0^x t \, f(t) \, \mathrm{d}t + x \int_x^1 (1-t) \, f(t) \, \mathrm{d}t.$$

Calculer $u(0)$, $u(1)$, la dérivée $u'(x)$ et la dérivée seconde $u''(x)$ pour $0 < x < 1$.

Exercice 7) Intégration par parties à une variable
Soit φ une fonction régulière définie sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'on a :

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2} \varphi''(0) + \int_0^1 \frac{(t-1)^2}{2} \varphi'''(t) \, \mathrm{d}t \, .$$

Cours 2. Longueur d'une courbe et abscisse curviligne

Exercice 1) Un paramétrage mal choisi

On paramètre le demi-cercle Γ de centre O et de rayon R d'ordonnées positives à l'aide de l'expresion fonctionnelle $y = f(x)$ avec $f(x) \equiv \sqrt{R^2 - x^2}$. Calculer la longueur de cet arc de cercle à l'aide d'une relation vue en cours. On pourra utiliser le fait que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{Arcsin} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Reprendre la calcul en utilisant un paramétrage qui conduit à des calculs plus simples, à savoir l'emploi de l'angle polaire θ.

Exercice 2) Longueur d'une chaînette

On introduit les fonctions cosinus et sinus hyperboliques à l'aide des relations $\mathrm{ch}x = \frac{1}{2}\big(\exp x + \exp(-x)\big)$ et $\mathrm{sh}x = \frac{1}{2}\big(\exp x - \exp(-x)\big)$. Montrer que l'on a

$$\mathrm{ch}^2 x \, - \, \mathrm{sh}^2 \equiv 1 \,, \;\; \mathrm{ch}'x \, = \, \mathrm{sh}x \;\text{ et }\; \mathrm{sh}'x \, = \, \mathrm{ch}x \,.$$

On se donne un réel a strictement positif. La chaînette est la courbe d'équation $y = f(x)$ avec $f(x) = a \, \mathrm{ch}(x/a)$. On se donne un nombre réel $X > 0$. Calculer la longueur de la chaînette entre les droites d'abscisses $x = 0$ et $x = X$.

Exercice 3) Longueur d'un arc de parabole

On se donne un réel a strictement positif et on s'intéresse à la parabole d'équation $y = x^2/(2\,a)$. On se donne aussi un nombre réel $X > 0$. Exprimer sous la forme d'une intégrale la longueur $L(X)$ de l'arc de parabole Γ compris entre les abscisses $x = 0$ et $x = X$. Le calcul de cette intégrale n'est pas immédiat.

Pour x réel, on désigne par $\mathrm{Argsh}x$ l'unique solution $y \in \mathbb{R}$ de l'équation $\mathrm{sh}y = x$. Calculer $\mathrm{Argsh}x$ à l'aide de la fonction logarithme et montrer que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{Argsh} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. En déduire que la longueur $L(X)$ est donnée par l'expression

$$L(X) = \frac{a}{2} \Big(\operatorname{Argsh}\big(X/a\big) \; + \; \frac{X}{a} \, \sqrt{1 + \big(X/a\big)^2} \Big) \,.$$

Exercice 4) Longueur de la courbe logarithme

On désigne par $\log x$ le logarithme naturel du nombre réel x strictement positif. On se donne un nombre réel $X > 0$. Montrer que la longueur $L(X)$ de l'arc de courbe d'équation $y = \log x$ compris entre les abscisses $x = 0$ et $x = X$ est donnée par l'expression

$$L(X) = \sqrt{1 + X^2} - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \, \log \Big(\frac{\sqrt{1+X^2} - 1}{\sqrt{1+X^2} + 1} \Big) - \frac{1}{2} \, \log \Big(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \Big) \,.$$

Cours 3. Normale, courbure et intégrale curviligne

Exercice 1) Cercle osculateur à la parabole

Soit a un réel strictement positif. Calculer en fonction de x le rayon de courbure au point $(x,\, y)$ de la parabole d'équation $y = x^2/(2\,a)$. Quelle est sa valeur pour $x = 0$? On note $y = C(x)$ l'équation de la branche du cercle de centre $(0,\, a)$ et de rayon a qui passe par l'origine. Préciser la valeur de cette fonction et montrer qu'on a le développement suivant au voisinage de $x = 0$: $C(x) = x^2/(2\,a) + \mathrm{O}(x^4)$, où $\mathrm{O}(x^4)$ est une fonction qui se comporte proportionnellement à x^4 lorsque la variable x est voisine de zéro. Reprendre la question précédente avec un cercle de centre $(0,\, r)$ et de rayon r. Que constatez-vous ?

Exercice 2) Quelques intégrales curvilignes

Soit Γ le demi-cercle centré sur l'origine, de rayon R et satisfaisant à la condition $y \geq 0$. On parcourt ce demi-cercle vers les abscisses décroissantes. Soit $\mathbf{n} \equiv (n_x,\, n_y)$ le vecteur normal à Γ compte tenu de l'orientation précédente. On note s l'abscisse curviligne le long du demi-cercle Γ. Calculer les intégrales curvilignes $\int_\Gamma x\,\mathrm{d}s$, $\int_\Gamma y\,\mathrm{d}s$, $\int_\Gamma x\,n_x\,\mathrm{d}s$, $\int_\Gamma y\,n_x\,\mathrm{d}s$, $\int_\Gamma x\,n_y\,\mathrm{d}s$ et $\int_\Gamma y\,n_y\,\mathrm{d}s$.

Exercice 3) D'autres intégrales curvilignes

Soit Γ l'arc de la parabole d'équation $y = x^2/(2\,a)$ entre les droites d'abscisses $x = 0$ et $x = X$. On parcourt cette courbe dans le sens des abscisses croissantes. On note $\mathbf{n} \equiv (n_x,\, n_y)$ le vecteur normal à Γ compte tenu de l'orientation précédente. Rappeler l'expression du vecteur $\mathbf{n}$ en fonction de l'abscisse x. On note s l'abscisse curviligne le long de l'arc Γ. Que vaut $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ en fonction de x ? Calculer les intégrales curvilignes $\int_\Gamma x\,n_y\,\mathrm{d}s$, $\int_\Gamma x\,n_x\,\mathrm{d}s$, $\int_\Gamma \big(y - X^2/(2\,a)\big)\,n_y\,\mathrm{d}s$ et $\int_\Gamma \big(y - X^2/(2\,a)\big)\,n_x\,\mathrm{d}s$.

Cours 4. Dérivation des fonctions de deux variables réelles

Exercice 1) Une solution de l'équation de Laplace

On pose $u(x,\, y) = \log\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)$. Quel est l'ensemble de définition de la fonction u ? Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Montrer que l'on a

$$\Delta u(x,\, y) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,.$$

Exercice 2) Explicitation d'équations aux dérivées partielles

On pose $u(x,\, y) = \log\big(e^x + e^y\big)$. Quel est l'ensemble de définition de la fonction u ? Montrer que $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 1$. Montrer que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \big(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\big)^2 = 0$.

Exercice 3) Matrices jacobiennes

Pour $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $x = r\,\cos\theta$, $y = r\,\sin\theta$, ce qui définit une fonction F de $]0,\, +\infty[\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ par $F(r,\, \theta) = (x,\, y) = (r\,\cos\theta,\, r\,\sin\theta)$. Calculer la jacobienne $J_F(r,\, \theta) \equiv \mathrm{d}F(r,\, \theta)$. Réciproquement, pour $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$, on définit r et θ à l'aide des relations $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \mathrm{Arctg}\big(y/x\big)$. D'où une application G telle que $(r,\, \theta) = G(x,\, y)$. Calculer la jacobienne $J_G(x,\, y) \equiv \mathrm{d}G(x,\, y)$. Montrer que $J_F \bullet J_G = J_G \bullet J_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pouvait-on prévoir le résultat ?

Exercice 4) Distance d'un point à une droite

Soit M un point du plan de coordonnées $(X,\, Y)$ et D la droite du plan d'équation $x+2\,y-2 = 0$. Calculer la distance $d(X,\, Y)$ du point M à la droite D. Avec les notations introduites à la question précédente, exprimer la quantité $g \equiv d(X, Y)^2 + OM^2$ à l'aide de $f(X, Y)$. En déduire la valeur minimale prise par g lorsque le point M parcourt le plan.

Exercice 5) Equation fonctionnelle

On cherche à déterminer une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable telle que

$f(x+y) = f(x)\, f(y)$ pour tout (x, y) appartenant à $\mathbb{R}^2$.

Montrer que si f est constante alors $f(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ ou bien $f(x) = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$. En déduire que si f n'est **pas** une fonction constante, alors $f(0) = 1$. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ de sorte que $f'(x) = \alpha\, f(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$. Expliciter alors toutes les fonctions f qui sont solution de ce problème.

Exercice 6) Calcul différentiel en grande dimension

On se donne un entier $n \geq 1$, une matrice A symétrique réelle à n lignes et n colonnes et b un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On note $(x, y) \equiv \sum_{j=1}^{n} x_j\, y_j$ le produit scalaire de deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On pose $J(x) = \frac{1}{2}(A\, x, x) - (b, x)$. C'est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

a) Montrer que la fonction J est différentiable en tout point x de $\mathbb{R}^n$ et calculer l'action $\mathrm{d}J(x) \bullet h$ de la différentielle $\mathrm{d}J(x)$ sur un vecteur $h \in \mathbb{R}^n$ arbitraire.

b) Comment s'exprime la condition $\mathrm{d}J(x) = 0$?

c) On suppose maintenant que la matrice A est positive : $(h, A\, h) \geq 0$, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$. Montrer que la fonction J admet un unique point de minimum x^* qui vérifie $J(x) \geq J(x^*)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

d) Préciser la valeur de x^* lorsque $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 7) Laplacien radial

Pour un point (x, y) arbitraire du plan, on introduit le rayon $r > 0$ défini par la relation $r^2 = x^2 + y^2$. Soit φ une fonction régulière d'une variable réelle. On introduit une fonction de deux variables $f(x, y)$ grâce à l'expression $f(x, y) = \varphi(r)$. Calculer $\Delta f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en fonction de la variable r et des dérivées de la fonction φ. En déduire l'expression d'une solution radiale $f(x, y) = \varphi(r)$ de l'équation de Laplace $\Delta f = 0$.

Exercice 8) Points critiques [hors programme]

On considère la fonction de deux variables $f(x, y) = 4 - 4\, x - 8\, y + 6\, x^2 + 4\, x\, y + 9\, y^2$. Calculer les dérivées partielles du premier ordre de $f(x, y)$. En déduire que la fonction f admet un unique point critique (x_0, y_0) qu'on déterminera. Calculer les dérivées partielles du deuxième ordre de la fonction f en ce point. En déduire sa nature : minimum, maximum ou point selle. On admettra que ce point (x_0, y_0) est un minimum **absolu** de la fonction f.

Cours 5. Introduction à l'intégrale double

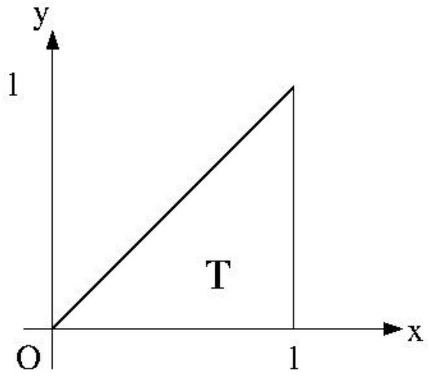

Figure 1.

Exercice 1) Quelques intégrales.

Calculer $\iint_{[0,\,1]\times[0,\,2]} x\,y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ et $\iint_{[0,\,\pi]\times[0,\,\pi]} x\,\sin(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Soit T le triangle décrit géométriquement à la Figure 1 et algébriquement à l'aide de la relation $T = \{(x,\,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \le y \le x \le 1\}$. Calculer les cinq intégrales doubles suivantes : $\iint_T \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $\iint_T x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $\iint_T y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $\iint_T x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ et $\iint_T x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Exercice 2) Savoir utiliser Fubini

On se donne une fonction f définie pour x et y réels. Ecrire l'expression de l'intégrale double $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^{\sqrt{y}} \mathrm{d}x\ f(x,\,y)$ obtenue après échange de l'ordre des intégrales.

Exercice 3) Encadrement

On considère le domaine D défini par $D = \{(x,\,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2\}$. A l'aide d'inégalités fondamentales valables sur le domaine D, proposer un minorant et un majorant de l'intégrale $\iint_D (x+1)^{\,y}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Exercice 4) Calcul d'aire

Soit $a < b$ et h trois nombres réels strictement positifs. On note A et B les points de coordonnées $(0,a)$ et $(h,\,b)$. On appelle P le parallélogramme bordé par l'axe des abscisses, les droites $x = a$, $x = b$ et la droite AB. A l'aide d'un calcul intégral classique, rappeler la valeur de l'aire de P. Par un calcul d'intégrale double, retrouver ce résultat en utilisant le théorème de Fubini et une intégration d'abord selon y puis ensuite selon x.

Exercice 5) Calcul d'une aire et d'un centre de gravité

On appelle D le domaine défini par $D = \{(x,\,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$. Après l'avoir représenté graphiquement, calculer la surface $\mid D \mid$ du domaine D. On rappelle que le centre de gravité de D est l'unique point G du plan de coordonnés $(X,\,Y)$ tel que

$$\iint_D (x-X)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \;=\; \iint_D (y-Y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \;=\; 0\,.$$

Calculer les coordonnées du centre de gravité G du domaine D.

Cours 6. Changements de variables lors du calcul d'intégrales doubles

Exercice 1) Domaine circulaire

Soit D le cercle de centre l'origine et de rayon R : $D = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq R^2\}$. Calculer l'intégrale double $\iint_D (x^2 + y^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ d'abord directement grâce au théorème de Fubini puis en effectuant un changement de variables en coordonnées polaires. Mêmes questions pour $\iint_D x^3\, y^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$. Mêmes questions avec l'intégrale qui s'écrit avec la même expression algébrique mais dans le domaine $D_1 = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0\,,\ x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

Exercice 2) Domaine elliptique

Soit $a > 0$ et $b > 0$ deux longueurs fixées. On note D l'intersection de l'intérieur de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec le premier quadrant $x \geq 0,\ y \geq 0$. Effectuer un changement de variables non banal pour transformer l'intégrale double $\iint_D x\, y\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$. Achever le calcul de cette intégrale. Avec le changement de variables $x = a\, r\, \cos\theta$ $y = b\, r\, \sin\theta$, calculer la surface de l'ellipse de demi-grand axe a et demi-petit axe b.

Exercice 3) Un changement de variable non classique

Soit $0 < a < b$ deux longueurs fixées et $0 < \alpha < \beta$ deux autres nombres. On appelle D le domaine du quadrant $x \geq 0,\ y \geq 0$ entre les deux arcs d'hyperboles $x\, y = a$ et $x\, y = b$ d'une part et les droites passant par l'origine et de pentes α et β d'autre part. Dessiner le domaine D. Calculer l'aire de ce domaine, après avoir effectué un changement de variables adapté au problème.

Exercice 4) Calcul d'une intégrale Gaussienne

Soit R un réel strictement positif, C_R le carré $[0,\, R] \times [0,\, R]$ et D_R le quart de disque centé à l'origine et de rayon R: $D_R = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq R^2\}$. On introduit la fonction de deux variables

$$f(x,\, y) = \exp\big(- (x^2 + y^2)\big).$$

Montrer qu'on a les inégalités suivantes : $\iint_{D_R} f(x,\, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \leq \iint_{C_R} f(x,\, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \leq \iint_{D_{R\sqrt{2}}} f(x,\, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$. Montrer à l'aide du théorème de Fubini que l'intégrale $\iint_{C_R} f(x,\, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ fait apparaître le carré d'une intégrale simple. Montrer à l'aide d'un changement de variable classique que si R tend vers l'infini, l'intégrale double $\iint_{D_R} f(x,\, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ converge vers une valeur numérique précise que l'on explicitera. Montrer que si elles existent, les limites pour R tendant vers l'infini de $\iint_{C_R} f(x,\, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ et $\iint_{D_R} f(x,\, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ sont égales. En déduire l'expression, avec une formule algébrique "exacte" de l'intégrale de Gauss $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$.

Exercice 5) Changement de variable hyperbolique

Soit $\varphi_0 > 0$ un nombre réel strictement positif et D le domaine $\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq 0, y \geq 0,\ x^2 - y^2 \leq 1,\ y \leq x\, \tanh\varphi_0\}$. Dessiner le domaine D. Calculer l'aire de ce domaine, après avoir effectué un changement de variables adapté au problème. Calculer l'intégrale double $\iint_D \big(x^2 - y^2\big)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$.

Cours 7. Intégration par parties des intégrales doubles

Exercice 1) Calcul d'aire

En choisissant de façon appropriée la fonction f, montrer que la relation

$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} f \, n_x \, \mathrm{d}\gamma$

permet de calculer une surface. Même question avec la relation d'intégration par parties

$\int_\Omega \frac{\partial g}{\partial y} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} g \, n_y \, \mathrm{d}\gamma$.

Expérimenter l'une des deux relations pour calculer la surface d'un domaine Ω simple par une intégrale sur le bord $\partial\Omega$.

Exercice 2) Divergence d'un champ de vecteurs

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$. On note $\partial\Omega$ sa frontière, que l'on suppose être une courbe régulière fermée. On note n sa normale extérieure et $\mathrm{d}\gamma$ l'élément de longueur le long de cette courbe. Soit φ un champ de vecteurs sur Ω, c'est à dire une fonction $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$. On note φ_x et φ_y ses composantes. Ce sont deux champs scalaires $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. On pose

$\mathrm{div}\varphi \equiv \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}$.

Démontrer que l'on a $\int_\Omega \mathrm{div}\varphi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} \varphi \bullet n \, \mathrm{d}\gamma$. Réciproquement, démontrer que si la relation précédente est vraie pour tout champ de vecteurs, alors les deux relations fondamentales rappelées à l'exercice précédent sont satisfaites.

Exercice 3) Intégrale du Laplacien

Dans les mêmes conditions qu'à l'exercice précédent, on se donne une fonction régulière $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. On note

$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

le Laplacien de la fonction u. Démontrer que $\Delta u \equiv \mathrm{div}(\nabla u)$. On introduit également la dérivée normale $\frac{\partial u}{\partial n} \equiv \nabla u \bullet n$ de u sur le bord $\partial\Omega$. Déduire de l'exercice précédent que

$\int_\Omega \Delta u \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \, \mathrm{d}\gamma$.

Exercice 4) Une autre formule d'intégration par parties

Si v et w sont deux fonctions régulières de l'ouvert Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ et n la normale extérieure à $\partial\Omega$, on rappelle que $\frac{\partial v}{\partial n} \equiv \nabla v \bullet n \equiv \sum_j \frac{\partial v}{\partial x_j} n_j$ désigne la dérivée normale. Montrer que

$- \int_\Omega \Delta v \, w \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_\Omega \nabla v \bullet \nabla w \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial n} \, w \, \mathrm{d}\gamma$.

Cours 8. Intégrales de surface

Exercice 1) Demi-sphère

Soit Σ la demi-sphère de centre l'origine, de rayon $R > 0$ et qui satisfait à l'inégalité $z \geq 0$. Calculer l'intégrale de surface $\int_\Sigma z \, \mathrm{d}\sigma$.

Exercice 2) Une autre demi-sphère

Soit Σ la demi-sphère de centre l'origine, de rayon $R > 0$ et qui satisfait à l'inégalité $x \geq 0$. En utilisant les coordonnées polaires θ et φ définies par

$$x = R \, \sin\theta \cos\varphi \,, \quad y = R \, \sin\theta \sin\varphi \,, \quad z = R \, \cos\theta \,,$$

préciser pour quelles valeurs du paramètre $(\theta, \, \varphi)$ le point $M(\theta, \, \varphi)$ appartient à Σ. En déduire la veleur de l'intégrale de surface $I = \int_\Sigma x \, \mathrm{d}\sigma$.

Exercice 3) Rotationnel

Soit α un vecteur donné de $\mathbb{R}^3$ $r \equiv x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ un point courant de $\mathbb{R}^3$ et $\varphi(r) \equiv \alpha \times r$. Calculer le vecteur $\mathrm{rot}\,\varphi$ en fonction de α.

Exercice 4) Un cas particulier du théorème de Stokes

Soit Σ la demi-sphère de centre l'origine, de rayon $R > 0$ et qui satisfait à l'inégalité $z \geq 0$. On note n la normale à Σ qui pointe vers la direction opposée à l'origine. Montrer que Σ s'appuie sur le cercle Γ dans le plan $x0y$ de centre l'origine et de rayon R et de vecteur tangent τ. On suppose que l'orientation du vecteur tangent τ est compatible avec celle de la normale n à Σ. Pour $r \equiv x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, on pose $\varphi(r) \equiv -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$. Calculer d'une part le flux $\int_\Sigma \mathrm{rot}\,\varphi \bullet n \, \mathrm{d}\sigma$ et d'autre part la circulation $\int_\Gamma \varphi \bullet \tau \, \mathrm{d}\gamma$. Constater que l'on a l'égalité

$$\int_\Sigma \mathrm{rot}\,\varphi \bullet n \, \mathrm{d}\sigma = \int_\Gamma \varphi \bullet \tau \, \mathrm{d}\gamma.$$

Exercice 5) Double produit vectoriel

On rappelle que le produit vectoriel $u \times v$ de deux veteurs $u = u_x\,\mathbf{i} + u_y\,\mathbf{j} + u_z\,\mathbf{k}$ et $v = v_x\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j} + v_z\,\mathbf{k}$ de $\mathbb{R}^3$ est donné par l'expression

$$u \times v = (u_y \, v_z - u_z \, v_y)\,\mathbf{i} + (u_z \, v_x - u_x \, v_z)\,\mathbf{j} + (u_x \, v_y - u_y \, v_x)\,\mathbf{k} \,.$$

Etablir la relation dite du "double produit vectoriel" :

$$(u \times v) \times w = -(v \bullet w)\, u + (u \bullet w)\, v \,.$$

Cours 9. Calcul des intégrales triples

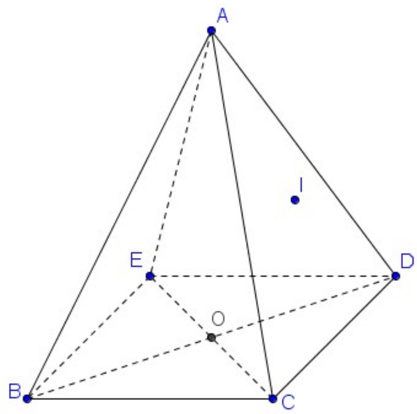

Figure 2.

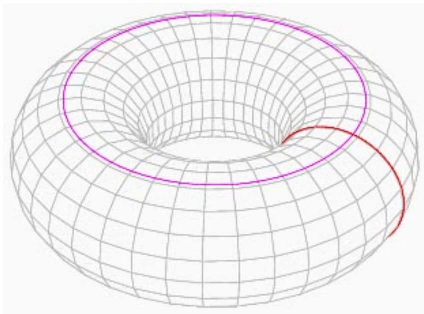

Figure 3.

Exercice 1) Volume d'une pyramide

Calculer le volume de la pyramide représentée à la figure 2. On pourra poser $a = BC$ et $h = OA$.

Exercice 2) Calcul d'un jacobien

En utilisant les coordonnées polaires r, θ et φ définies par

$x = r\,\sin\theta\cos\varphi\,,\quad y = r\,\sin\theta\sin\varphi\,,\quad z = r\,\cos\theta\,,$

montrer que le jacobien $J = \mathrm{d}F(r, \theta, \varphi)$ de la transformation F qui au triplet (r, θ, φ) associe le point M de coordonnées (x, y, z) a un déterminant jacobien donné par la relation $\det J = r^2 \sin\theta$.

Exercice 3) Volume d'un ellipsoïde

On se donne trois nombres strictement positifs a, b et c. Soit E l'ellipsoïde de $\mathbb{R}^3$ défini comme ensemble des points M de coordonnées (x, y, z) satisfaisant à la relation

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$

Calculer le volume $|E|$ de l'ellipsoïde E.

Exercice 4) Volume d'un tore

Soit T le tore de "grand rayon" R et de "petit rayon" r illustré à la figure 3. On peut l'obtenir en faisant tourner un petit disque de rayon r le long d'un grand cercle de rayon R. Montrer que l'on peut paramétrer ce tore par les relations

$x = (R + u\,r\,\cos\theta)\cos\varphi\,,\quad y = (R + u\,r\,\cos\theta)\sin\varphi\,,\quad z = u\,r\,\sin\varphi\,,$

avec les inégalités

$0 \leq u \leq 1\,,\quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\,,\quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\,.$

Calculer ensuite le volume de ce tore.

Cours 10. Intégration par parties des intégrales triples

Exercice 1) Volume d'une boule

Pour $r \equiv x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ un point courant de $\mathbb{R}^3$, on pose $\varphi(r) \equiv r$. A l'aide de la relation

$$\int_\Omega \mathrm{div}\varphi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int_{\partial\Omega} \varphi \bullet n \, \mathrm{d}\gamma$$

appliquée à ce champ de vecteurs, montrer que le volume V de la boule de centre l'origine et de rayon R est donné par la relation

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 .$$

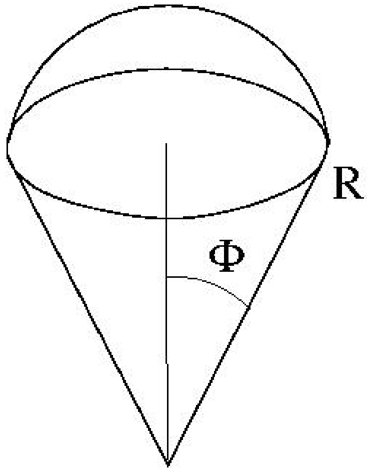

Figure 4.

Exercice 2) Volume d'un tronc de cône sphérique

Soit V le volume de l'espace $\mathbb{R}^3$ défini en coordonnées sphériques (r, θ, φ) par les conditions $r \leq R$ et $\theta \leq \Phi$, ainsi qu'illustré à la figure 4. Avec l'aide du champ de vecteurs $\varphi(r) \equiv r$, montrer que le volume du tronc de cône sphérique V est donné par la relation

$$| V | = \frac{4}{3} \pi R^3 \sin^2 \Big(\frac{\Phi}{2}\Big) .$$

Exercice 3) Une relation classique

Soit Ω un volume de l'espace $\mathbb{R}^3$ de frontière $\partial\Omega$. Cette frontière est une surface régulière de normale extérieure n. On se donne deux champs scalaires réguliers v et w sur Ω. On introduit la dérivée normale

$$\frac{\partial v}{\partial n} \equiv \nabla v \bullet n \equiv \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial v}{\partial x_j} n_j .$$

Montrer que

$$- \int_\Omega \Delta v \, w \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int_\Omega \nabla v \bullet \nabla w \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial n} \, w \, \mathrm{d}\sigma .$$

Exercice 4) Une autre relation classique

Avec les mêmes notations qu'à l'execice précédent, on se donne deux champs de vecteurs φ et ψ définis sur Ω. Ce sont des fonctions $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Montrer que l'on a la relation

$$\int_\Omega \mathrm{rot}\varphi \bullet \psi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int_\Omega \mathrm{rot}\psi \bullet \varphi \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + \int_{\partial\Omega} (\varphi, \, n, \, \psi) \, \mathrm{d}\sigma ,$$

où $(\varphi, n, \psi) = (\varphi \times n) \bullet \psi = \varphi \bullet (n \times \psi)$ désigne le produit mixte.