

## ⑦ Changement de variable dans une intégrale double

- on rappelle que pour une intégrale simple définie sur  $[a, b]$ , avec  $a < b$  et un changement de variable  $[\alpha, \beta] \ni t \mapsto x = \varphi(t) \in [a, b]$ ,  $\varphi$  bijectif régulière et  $\alpha < \beta$ , on a

$$(1) \int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) |\varphi'(t)| dt,$$

comme démontré lors de la première leçon. La présence de la valeur absolue  $|\varphi'(t)|$  est due au fait de n'écrire que de "vrais" intégrales sur des intervalles où la borne inférieure est toujours plus petite que la borne supérieure.

- Un changement de variable dans une intégrale double ne s'effectue pas sans un minimum de travail soigné. Ainsi par exemple, le quart de disque  $D = \{(x, y), x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq R^2\}$  est paramétré par le rectangle  $\Delta = \{(r, \theta), 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$  via le passage en coordonnées polaires

$$(2) \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

bien sûr calculer l'aire  $|D|$  du domaine  $D$  (qui

vaut  $\pi R^2$  comme chacun sait), en regardant bien d'écarter  $\int_D dx dy = \int_{\Delta} dr d\theta$  qui conduit à une catastrophe trophe puisque  $\int_{\Delta} dr d\theta = \frac{\pi}{2} R$  n'est même pas homogène à une surface!!

- on commence par le cas simple où  $D$  est issu du carré unité  $\hat{D}$ ,

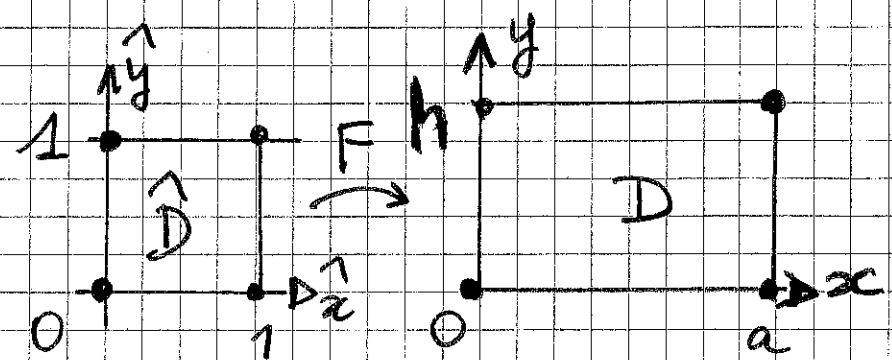


Fig 1 Affinité

(3)  $\hat{D} \equiv \{(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq \hat{x} \leq 1, 0 \leq \hat{y} \leq 1\}$

à l'aide d'une affinité:

(4)  $x = a\hat{x}, y = h\hat{y}$

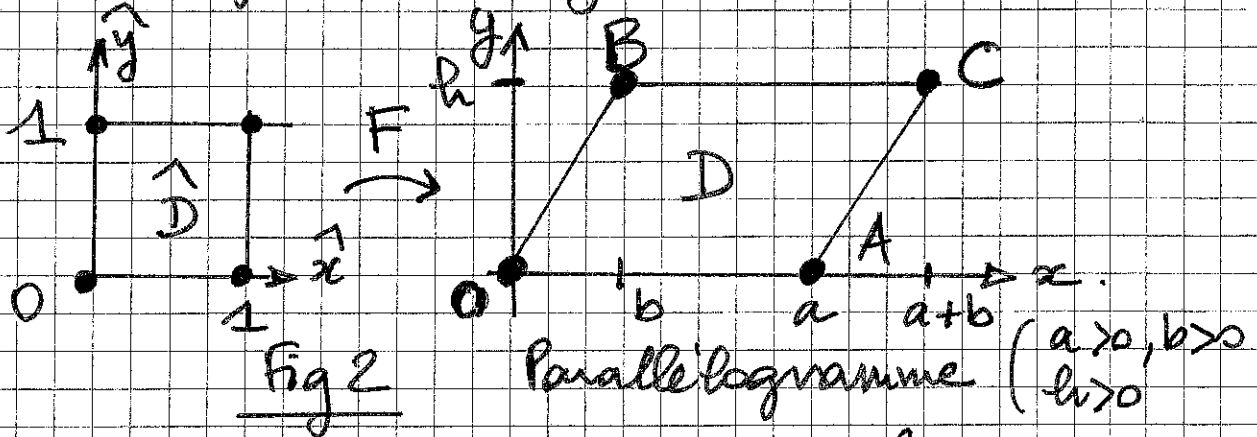
ainsi qu'illustré Figure 1. On a bien entendu  $\int_{\hat{D}} d\hat{x} d\hat{y} = 1$  et sans difficulté  $\int_D dx dy = |D| = ah$ . Si on veut faire un changement de variable dans l'intégrale  $\int_D f(x,y) dx dy$ , il faut prendre en compte le  $\hat{D}$  fait que pour  $f(x,y) \equiv 1$ , on a

(5)  $\int_D dx dy = \int_{\hat{D}} ah d\hat{x} d\hat{y}$

on peut alors montrer que dans ce cas, on a pour une fonction  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  arbitraire

$$(6) \int_D f(x, y) dx dy = \int_{\hat{D}} f(\hat{x}, \hat{y}) ah d\hat{x} d\hat{y}.$$

- on continue par le cas moins facile d'un parallélogramme (Fig 2).



Le parallélogramme  $D$  de la figure 2 peut être paramétré à partir de  $\hat{D}$  (cf (3)) par une transformation linéaire  $F$  à peine plus compliquée que l'affinité (4):

$$(7) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F(\hat{x}, \hat{y}), \quad \begin{cases} x = a\hat{x} + b\hat{y} \\ y = h\hat{y} \end{cases}.$$

Les quatre sommets du carré  $\hat{D}$  deviennent les quatre points  $O(0,0)$ ,  $A(a,0)$ ,  $C(a+b, h)$  et  $B(b, h)$  ainsi qu'illustre figure 3.

\* Dans ce cas l'aire  $|D|$  du parallélogramme  $OACB$  est le produit de l'un des côtés (par

exemple  $a = OA$ ) par la hauteur correspon-  
dante, c'est à dire ici  $h$ :  $\int 1 \cdot dx dy = ah = |D|$   
on a toujours  $\int_{\hat{D}} d\hat{x} d\hat{y} = |D| |\hat{D}| = 1$  donc la  
relation (5) reste  $D$  satisfaite et de façon plus  
générale la relation (6).

\* on remarque que la relation (7) peut  
s'écrire aussi

$$(8) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & h \end{pmatrix},$$

où  $J$  est appelé matrice jacobienne de la  
transformation (7). on a  $\det J = ah$ , et  
 $ah > 0$  avec le choix  $a > 0, b > 0, h > 0$  fait  
implicitement lorsqu'on observe la figure 2.  
on peut donc récrire la relation (6) dans  
le nouveau vocabulaire :

$$(9) \int_D f(x, y) dx dy = \int_{\hat{D}} f(F(\hat{x}, \hat{y})) |\det J| d\hat{x} d\hat{y}.$$

- Pour un parallélogramme "général", décrit  
par exemple avec  $a, b, h, l > 0$  et représenté  
Figure 3, la relation (7) est remplacée par

$$(10) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F(\hat{x}, \hat{y}), \quad \begin{cases} x = a\hat{x} + b\hat{y} \\ y = l\hat{x} + h\hat{y} \end{cases}$$

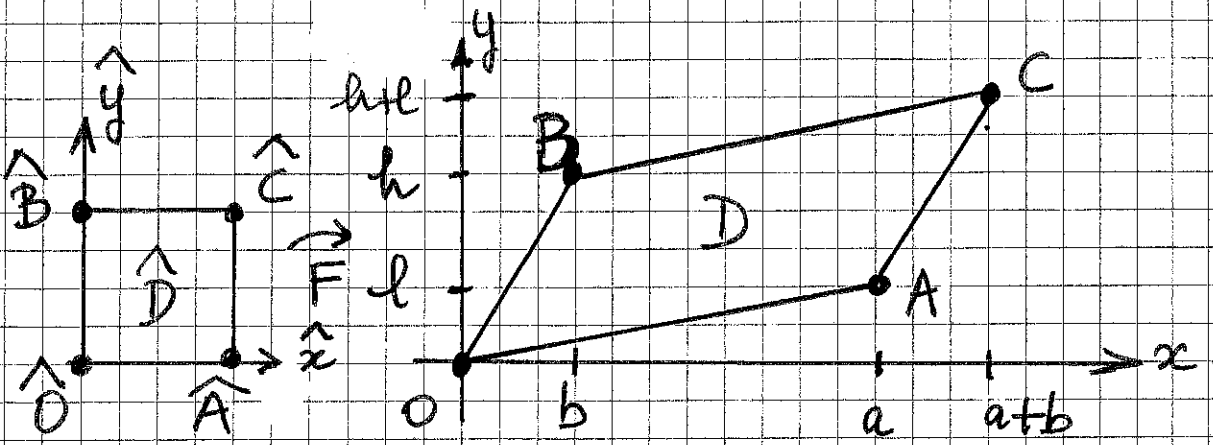


Figure 3. Parallélogramme "direct".

et les points du carré  $\hat{O} \hat{A} \hat{C} \hat{B}$  deviennent les sommets  $O(0,0)$ ,  $A(a,l)$ ,  $C(a+b, h+l)$ ,  $B(b,h)$  du parallélogramme  $D$ . La relation (8) reste valable globalement, mais la matrice  $J$  est modifiée:

$$(11) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} a & b \\ l & h \end{pmatrix}.$$

\* Le calcul de la surface  $|D|$  s'effectue graphiquement (Fig 4) : l'axe  $|D|$  s'obtient en re-

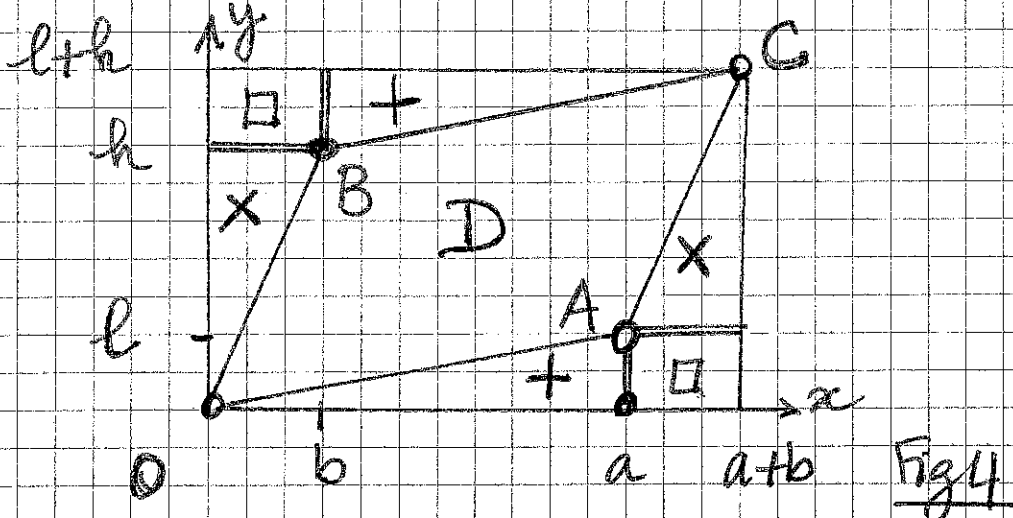


Fig 4.

tranchant du rectangle  $[0, a+b] \times [0, l+h]$  les deux triangles notés  $\times$  puis les deux triangles notés  $\times$  puis les deux rectangles notés  $\square$  sur la figure 4 ; on en déduit :

$$|D| = (a+b)(l+h) - la - bh - 2lb = ah - lb.$$

\* Il faut faire ici très attention au cas particulier dû à la figure 3. Même si  $a, b, l, h$  sont tous strictement positifs, la combinaison  $ah - lb$  peut être  $< 0$  comme le montre la figure 4 ; on a alors un "parallélogramme croisé".

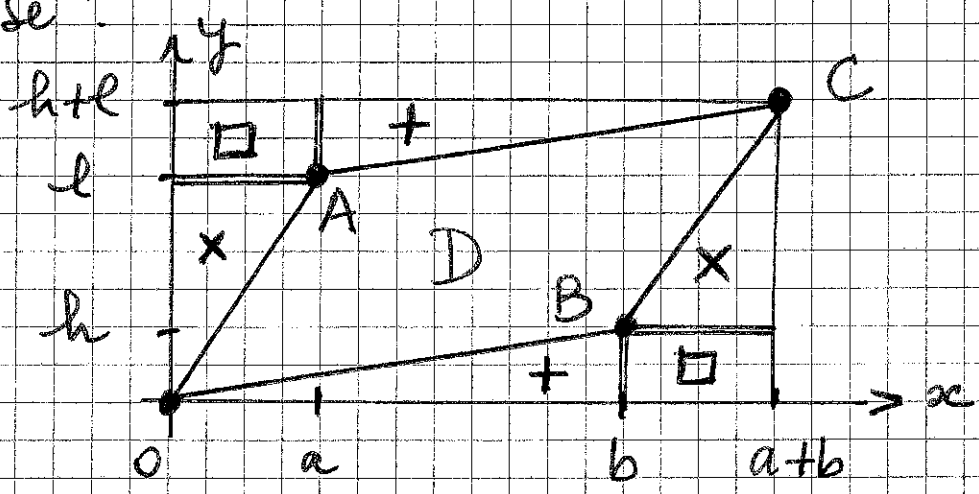


Fig 5 Parallélogramme "croisé".

Le calcul de la surface  $|D|$  du parallélogramme  $OBCA$  [et non plus  $OACB$  comme aux figures 3 et 4.] suit la même logique visuelle, mais avec des données algébriques différents :

$$|D| = (a+b)(l+h) - hb - al - 2ah = lb - ah.$$

Dans les deux cas du parallélogramme direct ou du parallélogramme croisé, on a

$$(12) \quad |D| = |ah - lb|$$

\* on remarque qu'avec la matrice jacobienne  $J$  donnée par la relation (11), on a  $\det J = ah - lb$ , donc

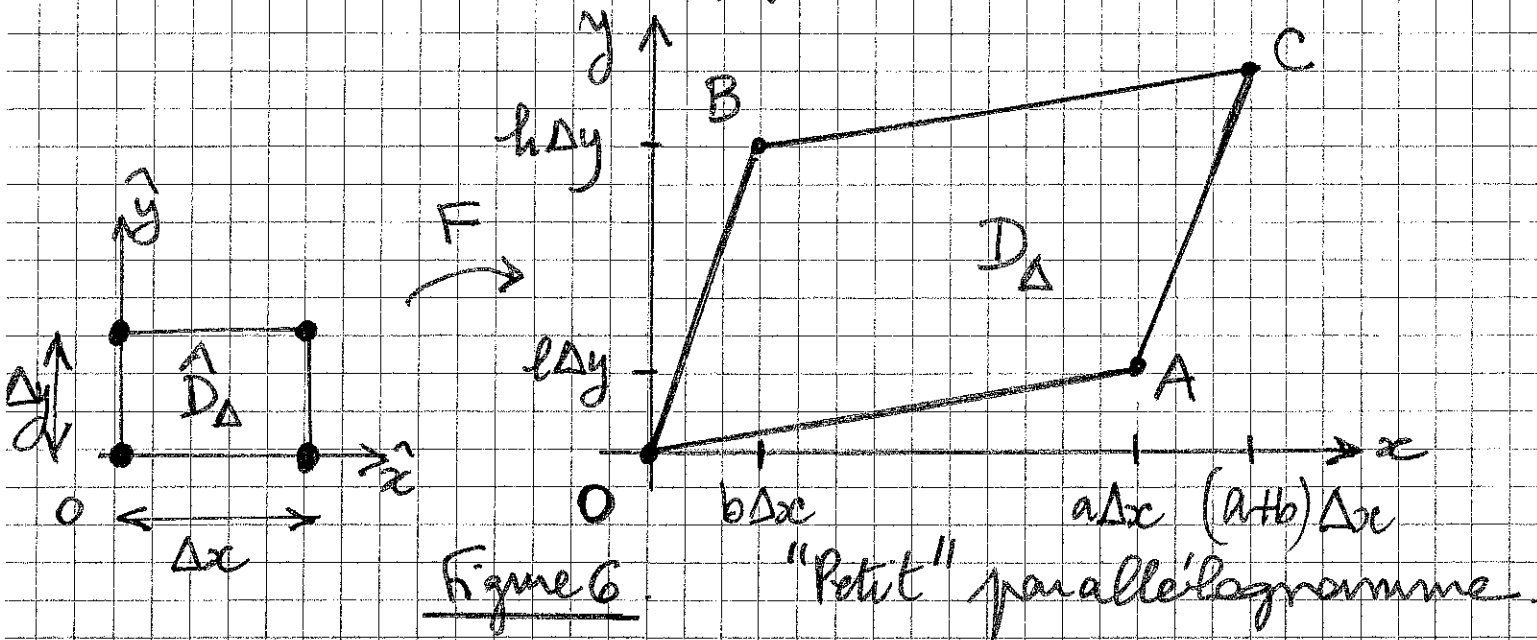
$$(13) \quad |D| = |ah - lb| = |\det J|$$

La relation (9) reste valable dans ce cas d'une transformation linéaire générale (10).

- Nous prenons maintenant comme référence un "petit" domaine rectangulaire  $\hat{D}_\Delta$  de pas  $\Delta x, \Delta y$ :

$$(14) \quad \hat{D}_\Delta = \{(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq \hat{x} \leq \Delta x, 0 \leq \hat{y} \leq \Delta y\}.$$

Avec la même transformation  $F$  linéaire d'uite à la relation (10), on obtient un domaine  $D_\Delta = F(\hat{D}_\Delta)$  destiné à la figure 6



on a alors dans ce cas

$$(15) \int_{D_{\Delta}} f(x,y) dx dy = \int_{\hat{D}_{\Delta}} f(F(\hat{x}, \hat{y})) |\det J| d\hat{x} d\hat{y}$$

puisque pour  $f(x,y) \equiv 1$ , on a d'une part

$$(16) |D_{\Delta}| = |a_1 b_1 - a_2 b_2| \Delta x \Delta y = |\det J| \Delta x \Delta y$$

et d'autre part  $|\hat{D}_{\Delta}| = \Delta x \Delta y$ .

- Nous nous intéressons au cas général d'un parallélogramme curviligne  $D$  issu de  $\hat{D}$  (défini en (3)) via une fonction très générale  $F$ :

$$(17) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F(\hat{x}, \hat{y}) \quad \begin{cases} x = X(\hat{x}, \hat{y}) \\ y = Y(\hat{x}, \hat{y}) \end{cases}$$

Les fonctions  $[0,1] \times [0,1] \ni (\hat{x}, \hat{y}) \mapsto X(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}$   
 et  $[0,1] \times [0,1] \ni (\hat{x}, \hat{y}) \mapsto Y(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}$  sont sup.  
 posées régulières et  $F: \hat{D} \rightarrow D$  bijective (Fig 7).

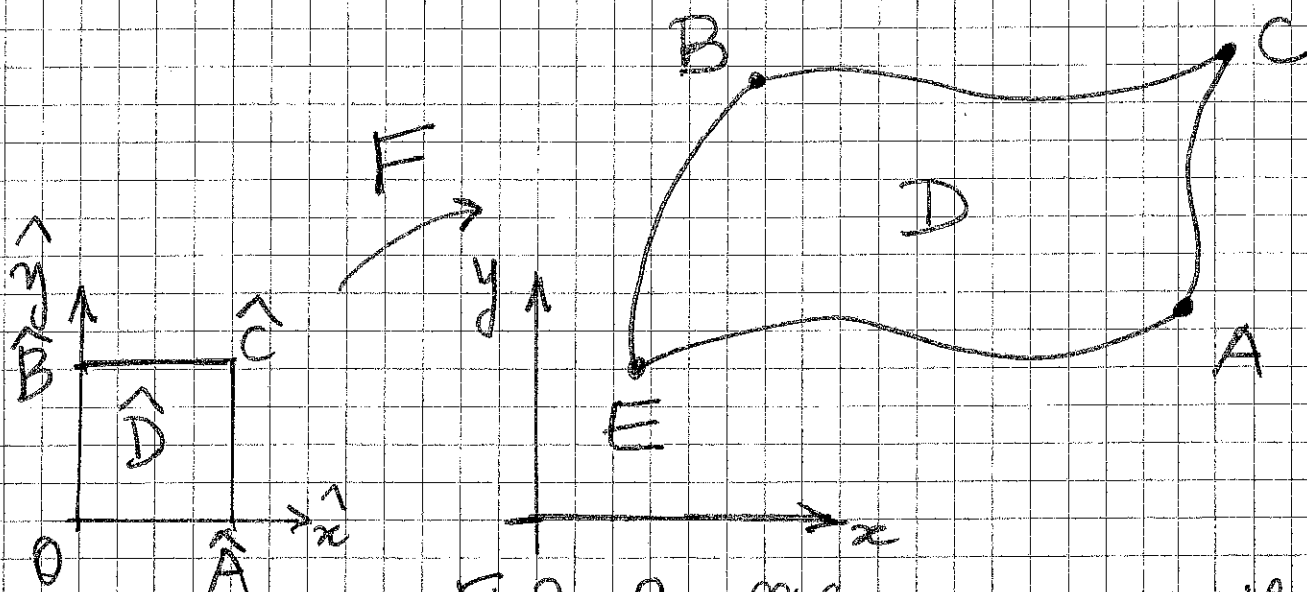


Fig 7. Parallélogramme curviligne



\* on découpe  $\hat{D}$  en  $N \times M$  morceaux afin de se ramener au cas d'autant de "petits" domaines  $\hat{D}_{ij}$  analogues à (14). on pose

$$(18) \quad \Delta x = \frac{1}{N}, \quad \Delta y = \frac{1}{M}$$

et on introduit un quadrillage de points  $(x_i)_{0 \leq i \leq N}$  et  $(y_j)_{0 \leq j \leq M}$  :

$$(19) \quad \hat{x}_i = i \Delta x, \quad \hat{y}_j = j \Delta y, \quad 0 \leq i \leq N, \quad 0 \leq j \leq M$$

on pose

$$(20) \quad \hat{D}_{ij}^{\Delta} = [\hat{x}_i, \hat{x}_{i+1}] \times [\hat{y}_j, \hat{y}_{j+1}], \quad 0 \leq i \leq N-1, \quad 0 \leq j \leq M-1$$

et ce petit rectangle analogue à  $\hat{D}_{ij}$  se transforme par  $F$  en un petit parallélogramme curviligne.

$$(21) \quad D_{ij}^{\Delta} = F(\hat{D}_{ij}^{\Delta}), \quad 0 \leq i \leq N-1, \quad 0 \leq j \leq M-1.$$

\* on peut utiliser la propriété d'additivité par rapport au domaine, puisque

$$(22) \quad D = F(\hat{D}) = \bigcup_{\substack{0 \leq i \leq N-1 \\ 0 \leq j \leq M-1}} D_{ij}^{\Delta}.$$

on a donc

$$(23) \quad \int_D f(x,y) dy = \sum_{0 \leq i \leq N-1} \sum_{0 \leq j \leq M-1} \int_{D_{ij}^{\Delta}} f(x,y) dx dy$$

10  
 Pour le calcul de l'intégrale  $\int_{D_{ij}^\Delta} f(x,y) dx dy$ ,  
 on utilise une approximation de la transformation géométrique  
 $F$ ; on suppose les fonctions  $X$  et  $Y$  différentiables sur  $\hat{D}$  et en particulier, pour  $(\hat{x}_i, \hat{y}_j)$  voisin  
 de  $(\hat{x}_i, \hat{y}_j)$ , on a:

$$(24) \begin{cases} X = x_i + \frac{\partial X}{\partial \hat{x}} \Big|_{ij} (\hat{x} - \hat{x}_i) + \frac{\partial X}{\partial \hat{y}} \Big|_{ij} (\hat{y} - \hat{y}_j) + O(\Delta x^2 + \Delta y^2) \\ Y = y_j + \frac{\partial Y}{\partial \hat{x}} \Big|_{ij} (\hat{x} - \hat{x}_i) + \frac{\partial Y}{\partial \hat{y}} \Big|_{ij} (\hat{y} - \hat{y}_j) + O(\Delta x^2 + \Delta y^2) \end{cases}$$

avec  $(x_i, y_j) = F((\hat{x}_i, \hat{y}_j)) \in D_{ij}^\Delta$ ,

$$\frac{\partial X}{\partial \hat{x}} \Big|_{ij} = \frac{\partial X}{\partial \hat{x}} (\hat{x}_i, \hat{y}_j), \quad \frac{\partial X}{\partial \hat{y}} \Big|_{ij} = \frac{\partial X}{\partial \hat{y}} (\hat{x}_i, \hat{y}_j), \quad \frac{\partial Y}{\partial \hat{x}} \Big|_{ij} = \frac{\partial Y}{\partial \hat{x}} (\hat{x}_i, \hat{y}_j)$$

et  $\frac{\partial Y}{\partial \hat{y}} \Big|_{ij} = \frac{\partial Y}{\partial \hat{y}} (\hat{x}_i, \hat{y}_j)$ . on peut donc approximer  $F$

par une fonction affine formée de la constante  $(x_i, y_j)$  plus une fonction affine analogue à (10), avec une matrice jacobienne  $J$  donnée par

$$(25) \quad J_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial \hat{x}} \Big|_{ij} & \frac{\partial X}{\partial \hat{y}} \Big|_{ij} \\ \frac{\partial Y}{\partial \hat{x}} \Big|_{ij} & \frac{\partial Y}{\partial \hat{y}} \Big|_{ij} \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} 0 \leq i \leq N-1 \\ 0 \leq j \leq M-1 \end{matrix}$$

on peut donc approximer le petit parallélogramme

me courbure  $D_{ij}^\Delta$  par le petit parallélogramme "droit"

$$(26) \quad \tilde{D}_{ij}^\Delta = \begin{pmatrix} x_i \\ y_j \end{pmatrix} + J_{ij}(\hat{D}_\Delta)$$

Alors

$$(27) \quad \int_{\tilde{D}_{ij}^\Delta} f(x,y) dx dy \approx \int_{\hat{D}_{ij}^\Delta} f(x,y) dx dy$$

et cette dernière intégrale peut être approchée grâce à la relation (15):

$$(28) \quad \int_{\tilde{D}_{ij}^\Delta} f(x,y) dx dy = \int_{\hat{D}_{ij}^\Delta} f(\tilde{F}_{ij}(x,y)) |\det J_{ij}| dx dy$$

où  $\tilde{F}_{ij}$  est calculée en ignorant le reste dans (24)

$$(29) \quad \tilde{F}_{ij}(x,y) = \begin{pmatrix} x_i + \frac{\partial x}{\partial \hat{x}}|_{ij} (\hat{x} - \hat{x}_i) + \frac{\partial x}{\partial \hat{y}}|_{ij} (y - \hat{y}_j) \\ y_j + \frac{\partial y}{\partial \hat{x}}|_{ij} (\hat{x} - \hat{x}_i) + \frac{\partial y}{\partial \hat{y}}|_{ij} (y - \hat{y}_j) \end{pmatrix}$$

• on a donc

$$(30) \quad \int_D f(x,y) dx dy \approx \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} \int_{\tilde{D}_{ij}^\Delta} f(\tilde{F}_{ij}(x,y)) |\det J_{ij}| dx dy$$

Quand  $N$  et  $M$  tendent vers  $+\infty$ , les  $\tilde{F}_{ij}$  sont de plus en plus proches de  $F$  et la somme

des intégrales se rapproche de plus en plus de 12  
 $\int_{\hat{D}} f(F(\hat{x}, \hat{y})) |\det J(\hat{x}, \hat{y})| d\hat{x} d\hat{y}$ . La matrice  
 jacobienne  $J$  dépend maintenant du point de  
 référence dans  $\hat{D}$  (cf Fig 7) :

$$(31) \quad J(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \hat{x}}(\hat{x}, \hat{y}) & \frac{\partial x}{\partial \hat{y}}(\hat{x}, \hat{y}) \\ \frac{\partial y}{\partial \hat{x}}(\hat{x}, \hat{y}) & \frac{\partial y}{\partial \hat{y}}(\hat{x}, \hat{y}) \end{pmatrix}$$

et la relation de changement de variable prend  
 la forme très générale

$$(32) \quad \int_D f(x, y) dx dy = \int_{\hat{D}} f(F(\hat{x}, \hat{y})) |\det J(\hat{x}, \hat{y})| d\hat{x} d\hat{y}.$$

- Un exemple très classique est fourni par les  
 coordonnées polaires (2). On a dans ce cas

$$J(r, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}, \text{ donc}$$

$$(33) \quad |\det J| = r \quad \text{car } r \geq 0.$$

car  $r \geq 0$ . La surface  $D$  se calcule donc avec  
 le changement de variables (2) selon

$$|D| = \int_D dx dy = \int_{\Delta} r dr d\theta = \int_0^R r dr \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi R^2}{4}.$$

De façon générale, si  $\Delta$  se transforme en  $D$  grâce à la transformation "en coordonnées polaires" (2), on a

$$(34) \int_D f(x,y) dx dy = \int_{\Delta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

Le coefficient "r" devant "dr d $\theta$ " au membre de droite de (34) exprime le caractère tout à fait non trivial de la formule de changement de variables d'une intégrale double (32).

## Exercices

- Soit  $D$  le disque de centre l'origine et de rayon  $R$ . Calculez d'abord avec un calcul direct (avec le théorème de Fubini) le moment d'inertie  $I = \int_D (x^2 + y^2) dx dy$  puis en effectuant un passage en coordonnées polaires.

- Soit  $E$  la surface limitée par l'ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  (avec  $a > 0$  et  $b > 0$ ):  

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}.$$

A l'aide du changement de variables  $x = a \cos \theta$ ,  $y = b \sin \theta$ , calculez la surface  $|E|$ .

Fubois 01 nov 2013.