

Sciences et Techniques Nucléaires
Seconde année
CNAM Saint Denis

Analyse Vectorielle

François Dubois

18 septembre 2013

• Motivation

Ce cours a pour objectif de maîtriser un outil mathématique de l'ingénieur fondamental pour les applications, la formule d'intégration par parties.

On se donne un domaine Ω borné de \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 ; on suppose sa frontière $\partial\Omega$ assez régulière. En tout point $x \in \partial\Omega$, on suppose qu'on peut définir une normale extérieure $n(x)$; c'est un vecteur unitaire qui pointe "localement vers l'extérieur" de Ω (Fig 1).

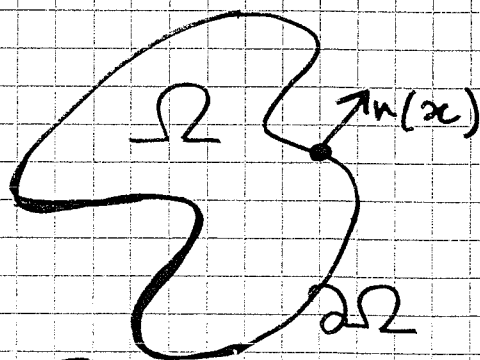


Fig 1

on se donne une fonction régulière 2
 $f: \Omega \cup \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) \in \mathbb{R}$ est défini
en tout point $x \in \Omega$ et $x \in \partial\Omega$; de plus
 f est dérivable sur Ω .

La relation d'intégration par parties
s'écrit

$$(1) \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} f n_i dx, \quad i=1, 2, \dots$$

Quand on intègre une dérivée dans un domaine,
il suffit de calculer une intégrale sur le
bord. Le membre de gauche est typiquement
une intégrale double ($\Omega \subset \mathbb{R}^2$). Alors le
membre de droite est une intégrale de bord;
il faut donner un sens au symbole " dx "
relatif à la longueur de la courbe. Pour
 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, le membre de gauche est une inté-
grale triple ($\Omega \subset \mathbb{R}^3$). Le membre de droite
est une intégrale sur la surface fermée
 $\partial\Omega$ (surface qui borde le domaine Ω);
dans ce cas " dx " est un élément de surface.

Le but de ce cours est d'introduire les
divers outils présents dans la relation (1).
Le plan du cours découle de cet objectif.

• Plan

3

ch 1. Rappels sur l'intégrale simple

ch 2. Intégrale de contour
géométrie des courbes

ch 3. Intégrale double
Théorème de Fubini
Formule de Cauchy, Riemann

ch 4. Produit vectoriel, représentation des surfaces

ch 5. Intégrale de surface
calcul d'angles solides.

ch 6. Intégrale de volume
Formule de Green.

§

Paris, 18/9/13.