le cnam

Cours d'Analyse Vectorielle

Saint Denis, automne 2014

Cours 02

Longueur d'une courbe plane

François Dubois

② Longueur d'une courbe plane

• **Vitesse.**

On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$ et on note $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ la base canonique : $\vec{e_1} = (1,0)$, $\vec{e_2} = (0,1)$.
Une courbe dans le plan est la donnée de deux fonctions $x(\bullet)$ et $y(\bullet) : [a,b] \to \mathbb{R}$ ($a<b$ sont deux nombres réels) et de la famille de points $M(t)$ de sorte que

(1) $\quad \overrightarrow{OM}(t) = x(t)\,\vec{e_1} + y(t)\,\vec{e_2}\ ; \quad a \leq t \leq b.$

• Un cas particulier important concerne les "courbes fonctionnelles", où $x(t) \equiv t$. On a alors $y(t) = y(x)$ qu'on peut écrire aussi $y = f(x)$, où $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée. On a alors

(2) $\quad \overrightarrow{OM}(x) = x\,\vec{e_1} + f(x)\,\vec{e_2}\ , \quad a \leq x \leq b\ ;$

le point M a pour abscisse x et ordonnée $y = f(x)$; on retrouve les "courbes représentatives de fonctions", bien classiques !

- Si les fonctions $x(\cdot)$ et $y(\cdot)$ sont dérivables, on introduit la vitesse, ou vecteur dérivé du point $M(t)$, obtenu en dérivant les composantes :

$$(3) \quad \vec{V}(t) = \frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\vec{e}_1 + \frac{dy}{dt}\,\vec{e}_2 \,.$$

On remarque qu'on peut écrire $\overrightarrow{OM}(t) = M(t) - O(t)$ (relation de Chasles) et que le point O est fixe (il ne dépend pas du temps). Donc la dérivée du vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$ par rapport au temps est identique au vecteur dérivé du point $M(t)$, présenté à la relation (3).

- On fait l'<u>hypothèse technique</u> suivante : le vecteur $\vec{V}(t)$ n'est <u>jamais nul</u>, quel que soit t dans l'intervalle $[a,b]$:

$$(4) \quad \forall t \in [a,b], \; \vec{V}(t) \neq \vec{0} \,.$$

En introduisant la norme $\|\vec{V}(t)\|$ du vecteur $\vec{V}(t)$,

$$(5) \quad \|\vec{V}(t)\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \,,$$

on constate que $\vec{V}(t) = \vec{0}$ équivaut à $\|\vec{V}(t)\| = 0$, c'est à dire $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 0$. Donc l'hypothèse (4) peut aussi s'écrire

$$(6) \quad \forall t \in [a,b], \; \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \neq 0 \,.$$

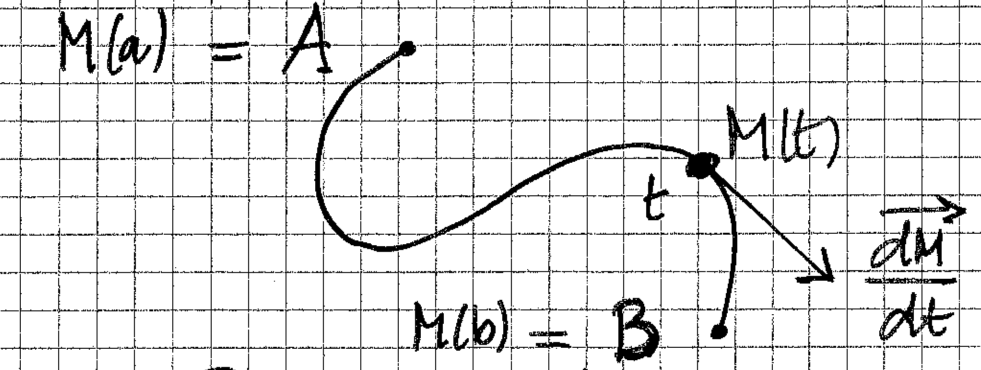


Figure 1. Vecteur tangent.

- Le vecteur vitesse permet de définir la droite tangente au point $M(t)$: c'est la droite passant par $M(t)$ et dirigée par $\overrightarrow{dM}/dt$. L'hypothèse (4) [ou (6)] assure que cette droite est toujours bien définie dans ce cadre. Si en certains points, l'hypothèse (4) peut être en défaut, la définition de la droite tangente demande plus de travail. Nous renvoyons le lecteur aux cours classiques sur le sujet.

- Dans le cas (2) d'une courbe fonctionnelle, on a

$$(7) \quad \frac{\overrightarrow{dM}}{dx} = (1,\ f'(x)) \in \mathbb{R}^2$$

car il suffit de dériver la relation (2) par rapport à la variable réelle x. Donc l'hypothèse (4) est toujours satisfaite [exercice : expliquer pourquoi en détail !].

Dans le repère cartésien $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, la droite tangente au point $(x_0, f(x_0))$ a pour pente le nombre dérivé $f'(x_0)$ et a une équation dans ce repère qui peut s'écrire

$$(8) \qquad y = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)\,.$$

- L'<u>accélération</u> est la dérivée en temps du vecteur vitesse, lorsque les fonctions coordonnées $x(\cdot)$ et $y(\cdot)$ sont deux fois dérivables:

$$(9) \qquad \frac{d^2\vec{M}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\,\vec{e}_1 + \frac{d^2y}{dt^2}\,\vec{e}_2\,.$$

- <u>Calcul vectoriel</u>.

On se donne une fonction vectorielle $[a,b] \ni t \mapsto \vec{u}(t) \in \mathbb{R}^2$, avec ses deux coordonnées $u_1(t)$ et $u_2(t)$:

$$(10) \qquad \vec{u}(t) = u_1(t)\,\vec{e}_1 + u_2(t)\,\vec{e}_2\,, \quad a \leq t \leq b\,.$$

On se donne aussi $\vec{v}(t) \in \mathbb{R}^2$ défini de façon analogue : $\vec{v}(t) = v_1(t)\,\vec{e}_1 + v_2(t)\,\vec{e}_2$.

- Le <u>produit scalaire</u> $(\vec{u}(t), \vec{v}(t))$ est maintenant.

nant une fonction du temps :

(11) $(\vec{u}(t), \vec{v}(t)) = u_1(t)\, v_1(t) + u_2(t)\, v_2(t)$.

Il se dérive en généralisant au produit scalaire la <u>règle de Leibniz</u> de dérivation d'un produit :

(12) $$\frac{d}{dt}(\vec{u}(t), \vec{v}(t)) = \left(\frac{d\vec{u}}{dt}, \vec{v}(t)\right) + \left(\vec{u}(t), \frac{d\vec{v}}{dt}\right).$$

La preuve est un <u>exercice</u> laissé au lecteur.

- La <u>norme</u> $\|\vec{u}(t)\|$ du vecteur $\vec{u}(t)$ est la racine du carré scalaire $(\vec{u}(t), \vec{u}(t))$:

(13) $$\|\vec{u}(t)\| = \sqrt{(\vec{u}(t), \vec{u}(t))}.$$

On a

(14) $$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 = 2\left(\vec{u}(t), \frac{d\vec{u}}{dt}\right),$$

ce qui constitue un nouvel <u>exercice</u> pour le lecteur.

Prop <u>Vecteur de norme constante</u>

Soit $t \mapsto \vec{u}(t)$ un vecteur du plan donné par la relation (10). Si la norme $\|\vec{u}(t)\|$ de ce vecteur est constante, alors le vecteur dérivé $\frac{d\vec{u}}{dt}$ est orthogonal au vecteur $\vec{u}(t)$:

$$(15) \quad \|\vec{u}(t)\| = \text{cste} \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{d\vec{u}}{dt}, \vec{u}(t)\right) = 0 .$$

Preuve.

On utilise la relation (14). Le membre de gauche est nul car $\|\vec{u}(t)\|$ est une constante, donc c'est aussi le cas pour $\|\vec{u}(t)\|^2$. Donc le membre de droite est nul également, ce qu'exprime la relation (15).

• Nous définissons le repère $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ lié à un point M du plan différent de l'origine :

$$(16) \quad M \neq O$$

(voir la figure 2).

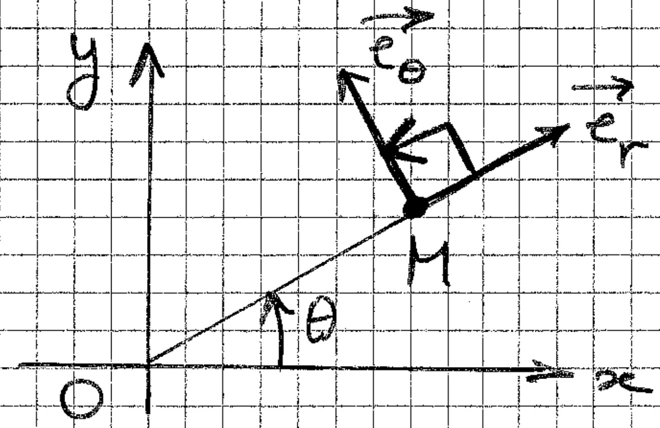


Fig 2. Repère mobile des coordonnées polaires.

Le vecteur $\vec{e_r}$ est le vecteur unitaire colinéaire à $\vec{OM}$ et de même sens :

$$(17) \quad \vec{e_r} = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|} , \quad M \neq O .$$

Si on note θ l'angle de $\overrightarrow{Ox}$ et de la demi-droite OM, on a

$$(18) \quad \vec{e_r}(\theta) = \cos\theta\, \vec{e_1} + \sin\theta\, \vec{e_2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Le vecteur $\vec{e_r}(\theta)$ est <u>mobile</u> en fonction du point M. Le vecteur $\vec{e_\theta}(\theta)$ s'obtient en tournant $\vec{e_r}$ de $+\pi/2$ (voir la figure 2). On a donc

$$\vec{e_\theta}(\theta) = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \vec{e_1} + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \vec{e_2}$$
$$= -\sin\theta\, \vec{e_1} + \cos\theta\, \vec{e_2}.$$

Nous retenons

$$(19) \quad \vec{e_\theta}(\theta) = -\sin\theta\, \vec{e_1} + \cos\theta\, \vec{e_2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Prop <u>Dérivée du repère mobile</u>.

Avec les définitions (18)(19) des vecteurs $\vec{e_r}$ et $\vec{e_\theta}$, on a

$$(20) \quad \frac{d\vec{e_r}}{d\theta} = \vec{e_\theta}, \quad \frac{d\vec{e_\theta}}{d\theta} = -\vec{e_r}.$$

<u>Preuve</u>

Conséquence directe des relations (18)(19) et des dérivées classiques $\frac{d}{d\theta}(\cos\theta) = -\sin\theta$, $\frac{d}{d\theta}(\sin\theta) = \cos\theta$. $\square$

- Les vecteurs $\vec{e_r}$ et $\vec{e_\theta}$ sont tous deux de norme 1

(21) $\|\vec{e_r}(\theta)\| = \|\vec{e_\theta}(\theta)\| = 1$.

Le fait que $\frac{d\vec{e_r}}{d\theta} \perp \vec{e_r}$ et $\frac{d\vec{e_\theta}}{d\theta} \perp \vec{e_\theta}$ est une conséquence directe de (15) et de l'orthogonalité

(22) $(\vec{e_r}(\theta), \vec{e_\theta}(\theta)) = 0$.

- Nous développerons dans un chapitre ultérieur les courbes "définies en polaires", c'est à dire de la forme

(23) $\vec{OM} = \rho(\theta)\ \vec{e_r}(\theta)$,

où $\theta \mapsto \rho(\theta)$ est une fonction donnée régulière de la variable réelle θ.

- <u>Construction d'une formule.</u>

Comment définir la longueur L de la courbe $\widehat{AB}$ représentée par exemple Figure I et décrite par les fonctions $x(\cdot)$ et $y(\cdot)$ de la relation (1) ? Nous allons introduire (sans la justifier entière.

ment) à une expression algébrique pour une telle grandeur.

- La première idée est de couper l'intervalle $[a,b]$ en N morceaux que nous supposons égaux pour simplifier l'exposé :

(24) $\quad h = \dfrac{b-a}{N}, \quad t_j = jh, \quad 0 \leq j \leq N.$

On a donc

(25) $\quad a = t_0 < t_1 < \dots < t_j < t_{j+1} < \dots < t_N = b.$

On pose $M_j \equiv M(t_j)$. On approche la longueur L par la longueur L_N de la ligne polygonale $A = M_0, M_1, \dots, M_j, M_{j+1}, \dots, M_N = B$:

(26) $\quad L_N = \displaystyle\sum_{j=0}^{N-1} \| \overrightarrow{M_j M_{j+1}} \|.$

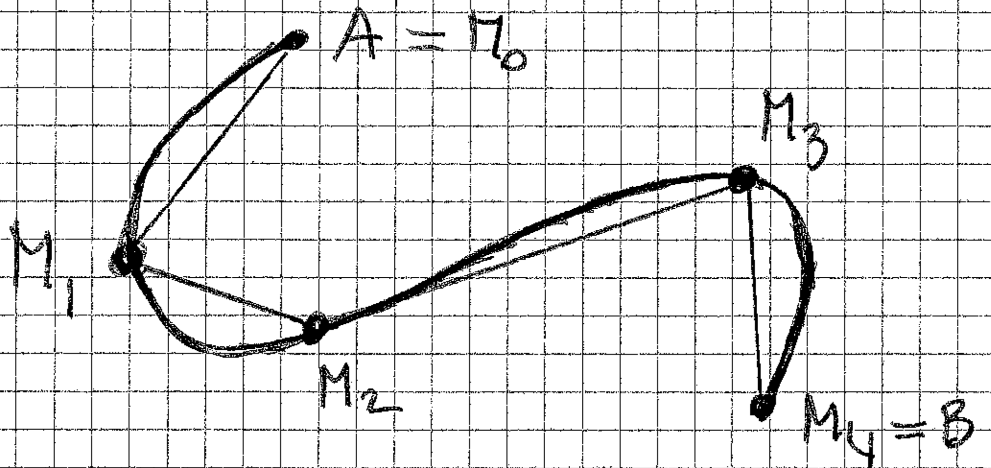


Figure 3. Approximation polygonale.

- Pour estimer le membre de droite de (26), on développe d'abord le vecteur $\overrightarrow{M_j M_{j+1}}$ sur la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$:

(27) $\overrightarrow{M_j M_{j+1}} = (x(t_j+h) - x(t_j))\vec{e_1} + (y(t_j+h) - y(t_j))\vec{e_2}$.

On peut ensuite développer $x(t_j+h) - x(t_j)$ [et de façon analogue $y(t_j+h) - y(t_j)$] lorsque h est petit.

Prop Différentiabilité.

Si $t \mapsto x(t)$ est dérivable en t_j, alors il existe $\varepsilon_j^x(h)$ qui tend vers 0 si h tend vers 0 de sorte que

(28) $x(t_{j+1}+h) - x(t_j) = \frac{dx}{dt}(t_j)\, h + h\, \varepsilon_j^x(h)$.

La relation (28) [avec $\varepsilon_j^x(h) \to 0$ si $h \to 0$] est exprime que la fonction $t \mapsto x(t)$ est différentiable au point t_j.

Preuve.

Si la fonction $x(t)$ est dérivable en t_j, le quotient $\frac{1}{h}(x(t_j+h) - x(t_j))$ tend vers $\frac{dx}{dt}(t_j)$ si h tend vers zéro. En d'autres termes, la différence

$$\frac{1}{h}[x(t_j+h) - x(t_j)] - \frac{dx}{dt}(t_j)$$

tend vers zéro si h tend vers zéro. On pose

$$(29)\quad \xi_j^x(h) \equiv \frac{1}{h}\big(x(t_j+h)-x(t_j)\big) - \frac{dx}{dt}(t_j)\,.$$

Alors $\xi_j^x(h) \to 0$ si $h \to 0$ et si $h \neq 0$, la relation (29) est clairement équivalente à (28). $\square$

- On a bien entendu une relation analogue à (28) pour la seconde composante si elle est dérivable :

$$(30)\quad y(t_j+h)-y(t_j) = \frac{dy}{dt}(t_j)\,h + h\,\xi_j^y(h)\,,$$

et $\xi_j^y(h)$ tend vers 0 si h tend vers zéro. On injecte ensuite les relations (28) et (30) au sein de (27), sans oublier la relation (3) :

$$(31)\quad \overrightarrow{M_j M_{j+1}} = \frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t_j)\,h + h\left(\xi_j^x\,\vec{e_1} + \xi_j^y\,\vec{e_2}\right)$$

on élève la relation (31) au carré :

$$\|M_j M_{j+1}\|^2 = h^2\Big\{\Big\|\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t_j)\Big\|^2 + \|\xi_j^x\,\vec{e_1} + \xi_j^y\,\vec{e_2}\|^2 + 2\Big(\frac{d\overrightarrow{M}}{dt},\ \xi_j^x\,\vec{e_1} + \xi_j^y\,\vec{e_2}\Big)\Big\}$$

$$= h^2\Big\|\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t_j)\Big\|^2\Big[1 + \tilde{\eta}_j(h)\Big]$$

où $\tilde{\eta}_j(h) \to 0$ si $h \to 0$, ceci car $\Big\|\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}(t_j)\Big\| \neq 0$ [cf (4) ou (6)]. On prend la racine carrée de l'expression précédente et il existe $\eta_j(h)$

qui tend vers zéro si h tend vers zéro de sorte que

$$(32)\quad \| \overrightarrow{M_j M_{j+1}} \| = h \, \Big\| \frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t_j) \Big\| + h \, \eta_j(h) \,, \quad 0 \leq j \leq N-1$$

On somme les relations (32) pour toutes les valeurs de j ; compte tenu de (26), on a

$$(33)\quad L_N = \sum_{j=0}^{N-1} \Big\| \frac{\overrightarrow{dM}}{dt}(t_j) \Big\| \, h + h \sum_{j=0}^{N-1} \eta_j(h) .$$

- Si $a < b$ sont deux réels et $[a,b] \ni t \mapsto M(t) \in \mathbb{R}^2$ est un point de $\mathbb{R}^2$ continûment dérivable, l'expression L_N calculée en (33) tend vers une limite si $N \to \infty$ (donc $h = (b-a)/N$ tend vers 0), c'est l'intégrale

$$(34)\quad L = \int_a^b \Big\| \frac{\overrightarrow{dM}}{dt} \Big\| \, dt .$$

Ce résultat demande quelques notions d'une discipline mathématique particulière, l'analyse mathématique. Nous ne le détaillons pas dans le cadre de ce cours.

def **<u>Longueur de la courbe $\widehat{AB}$</u>.**

Dans les conditions précédentes de continue dérivabilité des fonctions $x(\bullet)$ et $y(\bullet)$, la longueur L de la courbe $\widehat{AB}$ (avec $M(a) = A$ et $M(b) = B$) est donnée par l'expression (34)

• <u>Exemples.</u>

le cercle de rayon R, paramétré par l'angle $\theta \in [0, 2\pi]$:

(35) $\overrightarrow{OM}(\theta) = R\,\overrightarrow{e_r}(\theta)$,

Alors $\frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}(\theta) = R\,\overrightarrow{e_\theta}$ (cf (20)) et $\left\|\frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}\right\| = R$.

Donc $L = \int_0^{2\pi} R\,d\theta = 2\pi R$. On s'y attendait !

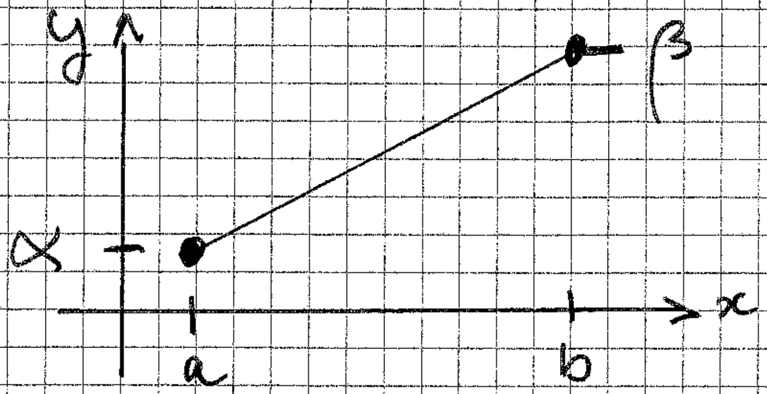
* Pour une courbe fonctionnelle de type (2), le vecteur $\frac{d\overrightarrow{M}}{dx}$ est donné à la relation (7). On en déduit

$$\left\|\frac{d\overrightarrow{M}}{dx}\right\|^2 = 1 + (f'(x))^2 , \quad \left\|\frac{d\overrightarrow{M}}{dx}\right\| = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

(36) $$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\;dx$$

Une telle intégrale est de calcul souvent difficile, parfois impossible avec les "fonctions élémentaires" construites à partir de la fonction exponentielle.

* Longueur d'un segment de droite (!)
on vérifie que la relation (36) redonne bien la longueur du segment dessiné Figure 4.



<u>figure 4</u> Segment de droite $(a<b)$

On explicite la fonction affine f telle que

(37) $\quad f(a)=\alpha \;,\quad f(b)=\beta$:

On a simplement

(38) $\quad f(x)=\dfrac{x-a}{b-a}\,\beta+\dfrac{b-x}{b-a}\,\alpha \;,\quad a\leqslant x\leqslant b$

Donc $f'(x)=\dfrac{\beta-\alpha}{b-a}$, $\sqrt{1+(f'(x))^2}=\sqrt{1+\left(\dfrac{\beta-\alpha}{b-a}\right)^2}$

et $\displaystyle\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=(b-a)\sqrt{1+\left(\frac{\beta-\alpha}{b-a}\right)^2}$

$$=\sqrt{(b-a)^2+(\beta-\alpha)^2}\,.$$

On s'y attendait également!

Dubois

25 sept 2013.

- Exercices.

1) On paramètre le demi-cercle $x^2+y^2=R^2$, $y \geqslant 0$ par l'approche fonctionnelle
$$y = f(x) \equiv \sqrt{R^2 - x^2}$$
Calculer sa longueur à l'aide de la relation (36). On pourra remarquer que $\frac{d}{dx}(\operatorname{Arcsin} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2) La chaînette $y = \cosh x$ ($x \in \mathbb{R}$) a une longueur entre les abscisses 0 et $X > 0$ qui s'exprime facilement à partir de (36). On pourra utiliser les relations $\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x$, $\frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$, $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

3) La courbe "logarithme" $y = \ln x$ a une longueur entre $x = 1$ et $x = X > 1$ qui s'exprime avec une expression algébrique assez longue.

4) Pour l'ellipse $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$ (avec $0 < b < a$ pour fixer les idées) sa longueur peut être écrite avec une intégrale qu'on précisera. Mais celle-ci ne peut pas s'expliciter à l'aide de fonctions élémentaires, contrairement aux trois premiers exercices.

• STN 2, Analyse Vectorielle •

③ Abscisse curviligne

• On se donne une courbe paramétrée $M(t)$ dans le plan $\mathbb{R}^2$; en pratique deux fonctions

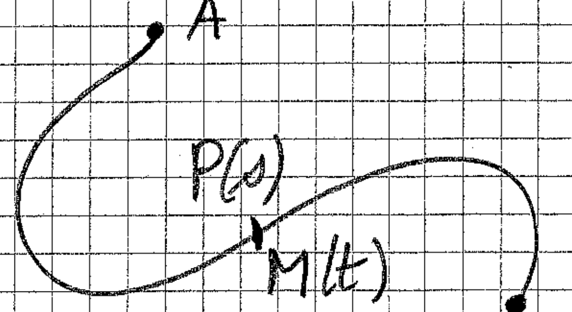


Fig 1

$[a,b] \ni t \mapsto x(t) \in \mathbb{R}$ et $[a,b] \ni t \mapsto y(t) \in \mathbb{R}$

de sorte que

(1) $\qquad \overrightarrow{OM}(t) = x(t)\,\vec{e}_1 + y(t)\,\vec{e}_2, \; a \leq t \leq b,$

où $a < b$ sont deux nombres réels; on suppose les fonctions x et y dérivables autant que de besoin. On a vu que la longueur L de l'arc $\widehat{AB}$ (Fig 1), où $A = M(a)$, $B = M(b)$, est donné par

(2) $\qquad L = \int_a^b \left\| \frac{d\overrightarrow{M}}{dt} \right\| dt.$

- Si on se donne $t \in [a,b]$, la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AM(t)}$ est donnée par une intégrale analogue à (2), on la note

$$(3) \quad \Sigma(t) = \int_a^t \left\| \frac{d\vec{M}}{d\theta} \right\| d\theta, \quad a \leq t \leq b$$

on a les deux relations

$$(4) \quad \Sigma(a) = 0, \quad \Sigma(b) = L$$

(il suffit de faire successivement $t=a$ et $t=b$ dans la relation (3)). La fonction $t \mapsto \Sigma(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ dès que $\theta \mapsto M(\theta)$ est une fonction continûment dérivable. On a

$$(5) \qquad \Sigma'(t) = \left\| \frac{d\vec{M}}{dt}(t) \right\|, \quad a<t<b.$$

- La fonction $[a,b] \ni t \mapsto \Sigma(t) \in [0,L]$ est strictement croissante dès que le vecteur $\frac{d\vec{M}}{dt}$ ne s'annulle pas et elle est continue car dérivable. Donc elle réalise une <u>bijection</u> de l'intervalle $[a,b]$ sur l'intervalle $[0,L]$:

$$(6) \quad \forall s \in [0,L], \ \exists!\, t \in [a,b], \ \Sigma(t) = s.$$

On note $T(s)$ la fonction réciproque de Σ. A s donné dans $[0,L]$, $T(s)$ est le nombre $t \in [a,b]$ de la relation (6) de sorte que $\Sigma(T(s)) \equiv s$.

- Au lieu de paramétrer la courbe $\widehat{AB}$ par le "temps" $t \in [a,b]$, il est plus naturel du point de vue géométrique de la paramétrer par l'élément de longueur* $s \in [0,L]$. Le même point géométrique peut s'écrire à la fois $M(t)$ et $P(s)$ (Fig 1), avec

$$(7) \qquad P(s) = M(T(s)), \quad 0 \leq s \leq L.$$

- On introduit le vecteur tangent $\vec{\tau}(s)$ obtenu en dérivant le point P par rapport à s.

Prop Le vecteur tangent $\vec{\tau}(s)$ est unitaire.

$$(8) \qquad \vec{\tau}(s) = \frac{d\vec{P}}{ds}, \qquad 0 \leq s \leq L$$

$$(9) \qquad \|\vec{\tau}(s)\| = 1.$$

* appelé aussi "abscisse curviligne".

• **Preuve.**

On calcule $\vec{\tau}$ par composition des dérivées :

$$\frac{d\vec{P}}{ds} = \frac{d\vec{M}}{dt}(T(s)) \cdot \frac{dT}{ds} = \frac{d\vec{M}}{dt}(T(s)) \; \frac{1}{\frac{d\Sigma}{dt}}$$

avec Σ défini en (3). or $\frac{d\Sigma}{dt} = \Sigma'(t)$ calculé à la relation (5) vaut exactement $\left\| \frac{d\vec{M}}{dt} \right\|$. D'où

$$(10) \quad \vec{\tau} = \frac{d\vec{M}/dt}{\left\| d\vec{M}/dt \right\|} \; ;$$

c'est bien un vecteur unitaire. $\square$

• **Courbe en coordonnées polaires.**

On se donne une fonction $\mathbb{R} \ni \theta \mapsto \rho(\theta) \in \mathbb{R}$ qu'on suppose assez régulière. La courbe en polaire associée à ρ est l'ensemble des points $M(\theta) \in \mathbb{R}^2$ de sorte que

$$(11) \quad \vec{OM}(\theta) = \rho(\theta) \; \vec{e_r}(\theta), \; \theta \in \mathbb{R}$$

L'important est de savoir <u>réduire</u> l'intervalle de variation de θ. On a d'une part

$$(12) \quad x(\theta) = \rho(\theta) \cos\theta, \quad y(\theta) = \rho(\theta) \sin\theta$$

et d'autre part les parités des fonctions sinus et cosinus.

- Si ρ est paire $\rho(\theta) = \rho(-\theta)$, alors la courbe "en polaires" donnée en (11) est symétrique par rapport à l'axe des x [exercice laissé au lecteur!]

Si ρ est impaire, c'est à dire $\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$, on a $x(-\theta) = \rho(-\theta)\cos(-\theta) = -x(\theta)$ et $y(\theta) = \rho(-\theta)\sin(-\theta) = y(\theta)$ et la courbe est symétrique par rapport à l'axe des y.

Si $\rho(\pi-\theta) = \rho(\theta)$, on prouve de même que la courbe est invariante par rapport à l'axe des y [nouvel exercice]

- Un premier exemple est le cercle, où

(13) $\rho(\theta) = R, \quad \theta \in \mathbb{R}$

est une fonction constante. Il s'agit bien entendu du cercle de centre l'origine et de rayon R. Un second exemple correspond à

(14) $\rho(\theta) = a\theta, \quad \theta \in \mathbb{R}$

avec $a > 0$ pour fixer les idées. Il

s'agir de la spirale d'Archimède, symétrique par rapport à l'axe Oy (Figure 2).

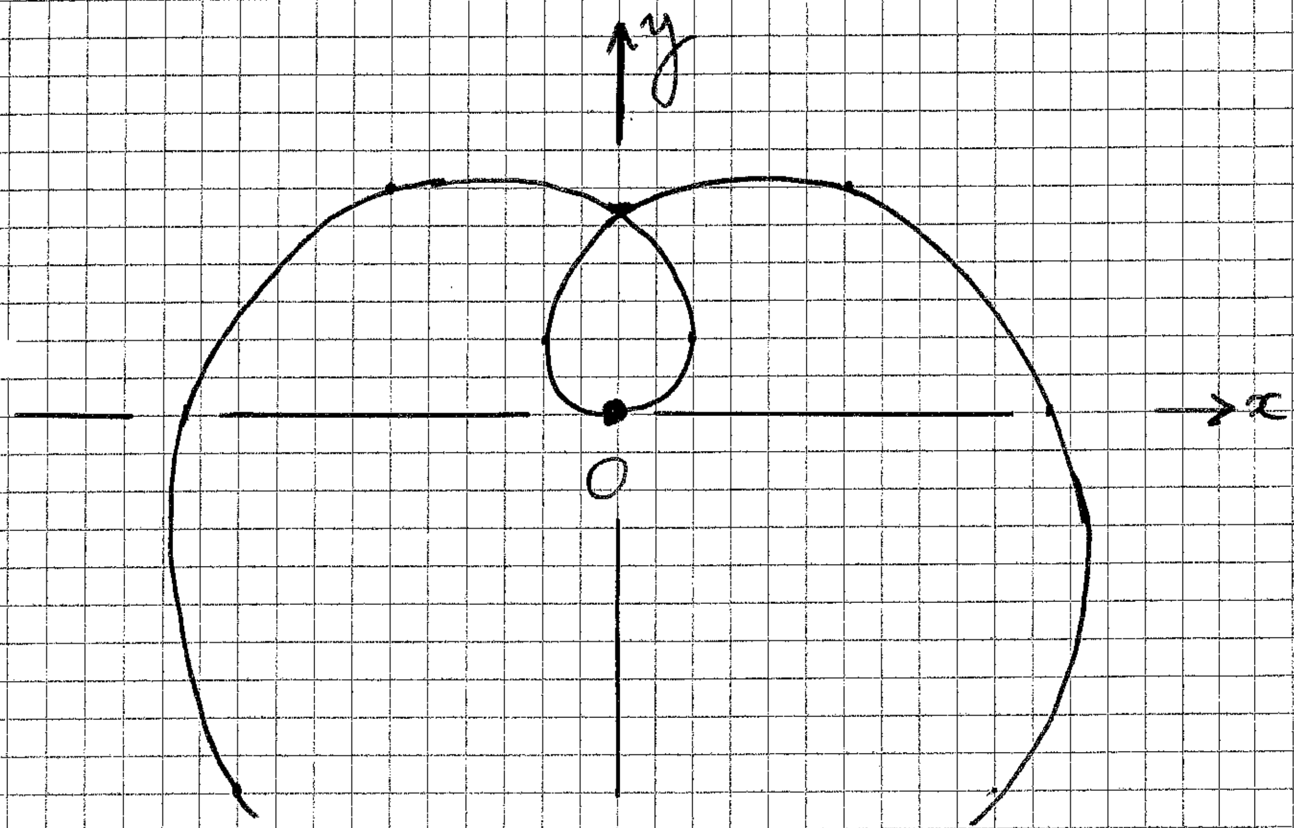


Fig 2 Spirale d'Archimède

- On calcule la direction tangente à la courbe en polaires représentée par (11) en dérivant cette relation, sachant que

(15) $\frac{d}{d\theta}\vec{e_r} = \vec{e_\theta}$, $\frac{d}{d\theta}\vec{e_\theta} = -\vec{e_r}$.

alors
$$\frac{d\vec{M}}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left[\rho(\theta)\,\vec{e}_r(\theta)\right]$$
$$= \rho'(\theta)\,\vec{e}_r + \rho(\theta)\,\vec{e}_\theta$$

$$(16) \quad \frac{d\vec{M}}{d\theta} = \rho'(\theta)\,\vec{e}_r + \rho(\theta)\,\vec{e}_\theta .$$

Le vecteur "vitesse" $\frac{d\vec{M}}{d\theta}$ est naturellement décomposé dans la base orthonormée (variable !) $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. On a donc

$$(17) \quad \left\|\frac{d\vec{M}}{d\theta}\right\|^2 = \left(\rho'(\theta)\right)^2 + \left(\rho(\theta)\right)^2, \quad \theta \in \mathbb{R} .$$

On suppose cette grandeur <u>non nulle</u>. Si $\rho(\theta) = 0$, c'est à dire en un point où la courbe passe par l'origine, on a simplement $d\vec{M}/d\theta = \rho'(\theta)\,\vec{e}_r$ et l'angle de Ox avec <u>la tangente</u> vaut <u>exactement θ</u> [voir par exemple la tangente à la spirale d'Archimède pour $M(0) = 0$].

• <u>Trois expressions du ds^2.</u>

En pratique, on confond la fonction $\Sigma(t)$ introduite en (3) avec la lettre s, l'abscisse curviligne. La relation (5) peut se réécrire $\frac{ds}{dt} = \left\| \frac{d\vec{M}}{dt} \right\|$, ou plus simplement

(18) $\qquad ds = \| d\vec{M} \|$.

Comme $ds \geq 0$, il suffit d'écrire son carré, "le ds^2", c'est à dire :

(19) $\qquad ds^2 = \| d\vec{M} \|^2$.

- Pour une courbe paramétrée générale (1), on a donc

(20) $\qquad ds^2 = dx^2 + dy^2$.

Dans le cas d'une courbe fonctionnelle $y = f(x)$, la relation (20) s'écrit

(21) $\qquad ds^2 = \left[1 + (f'(x))^2 \right] dx^2$

et pour une courbe en coordonnées polaires, on a (cf (17)) :

(3) $\qquad ds^2 = \left[(\rho'(\theta))^2 + \rho^2(\theta) \right] d\theta^2$

Dubois

3 octobre 2013.

Exercices.

- Calculer la longueur d'un arc de chaînette [cf cours numéro 2]

- Calculer la longueur d'un arc de parabole $y = \frac{1}{2a}x^2$, $a>0$.

- Calculer la longueur d'un arc de spirale d'Archimède. On pourra utiliser la fonction argsh, fonction réciproque du sinus hyperbolique, après avoir remarqué (et démontré !) qu'on a $\frac{d}{dt}(\operatorname{Argsh} t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

- Etudier la courbe d'équation polaire $\rho(\theta) = a\cos\theta$. Quelle est sa longueur ?

- Mêmes questions pour la courbe $\rho(\theta) = a(1+\cos\theta)$.