le cnam

Cours d'Analyse Vectorielle

Saint Denis, automne 2014

Cours 07

Intégration par parties pour les intégrales doubles

François Dubois

(8) Intégration par parties pour les intégrales doubles.

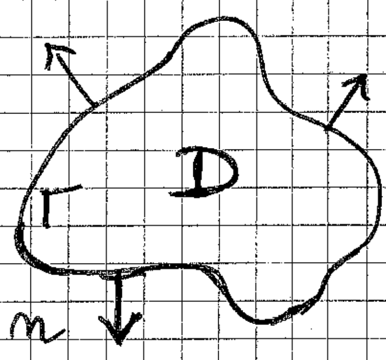

Fig 1

- Le but de ce chapitre est d'établir dans le cas de deux dimensions d'espace la relation générale

$$(1) \iint_D \frac{\partial f}{\partial x_j}\,dx\,dy = \int_\Gamma f\, n_j\, d\gamma$$

où $\Gamma = \partial D$ est le bord du domaine D (voir la figure 1), $j \in \{1,2\}$ le numéro de la variable, $\vec{n} = n_1 \vec{e_1} + n_2 \vec{e_2}$ la normale extérieure à D le long de Γ et $d\gamma$ l'élément de longueur le long de la courbe Γ.

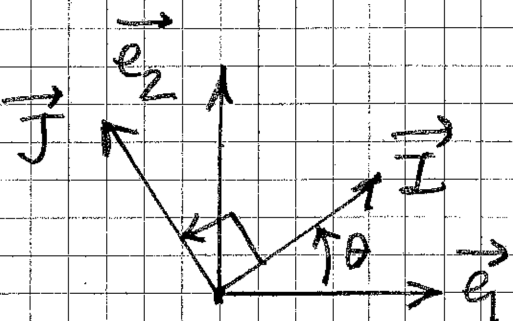

Fig 2

- on rappelle d'abord la forme très générale d'une matrice R_θ de rotation d'angle θ qui permet de passer du repère $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ orthonormé direct au nouveau repère $(\vec{I}, \vec{J})$ orthonormé direct (Fig 2)

on a $\vec{I} = \cos\theta\, \vec{e_1} + \sin\theta\, \vec{e_2}$, $\vec{J} = -\sin\theta\, \vec{e_1} + \cos\theta\, \vec{e_2}$

d'où

$$(2) \quad R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

et

$$(3) \quad I_1 = J_2 \ , \quad I_2 = -J_1 \ , \ (\vec{I}, \vec{J}) \text{ direct.}$$

- On s'intéresse au cas particulier du domaine D représenté à la figure 3. On a $a < b$ (deux nombres réels) et on dispose de deux fonctions régulières φ_+ et φ_-
$[a,b] \ni x \mapsto \varphi_-(x) \in \mathbb{R}$,
$[a,b] \ni x \mapsto \varphi_+(x) \in \mathbb{R}$
de sorte que $\varphi_+ \geq \varphi_-$ et

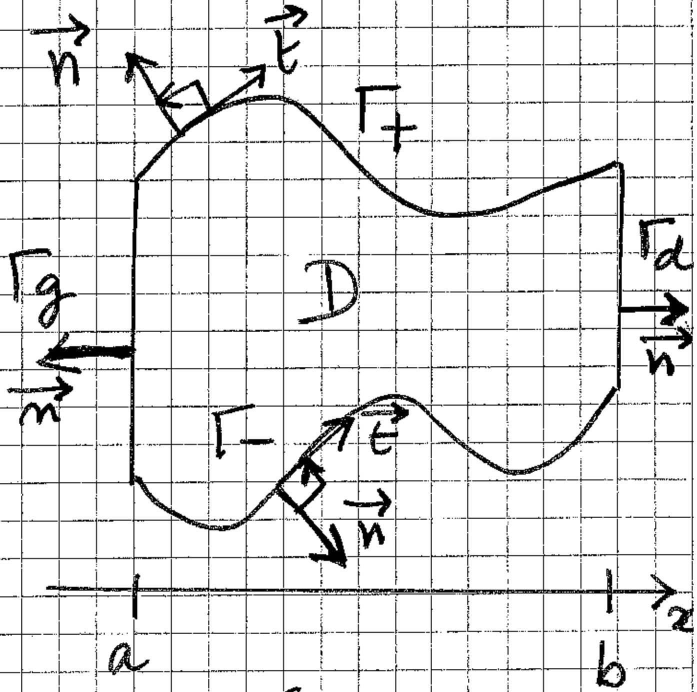

Fig 3

$$(4) \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ a \leq x \leq b, \ \varphi_-(x) \leq y \leq \varphi_+(x)\}.$$

La frontière Γ du domaine D est composée des quatre arcs Γ_g, Γ_-, Γ_d et Γ_+ (cf Fig 3), et on a

$$\Gamma_g = \{(a, y) \ , \ \varphi_-(a) \leq y \leq \varphi_+(a)\}$$

$$\Gamma_- = \{(x, \varphi_-(x)), \ a \leq x \leq b\}$$

$$\Gamma_d = \{(b, y), \ \varphi_-(b) \leq y \leq \varphi_+(b)\}$$

$\Gamma_+ = \{(x, \varphi_+(x)),\ a \leq x \leq b\}$.

* On cherche à établir (1) pour $j=2$, i.e si f est assez régulière $D \to \mathbb{R}$,

$$(5)\quad \iint_D \frac{\partial f}{\partial y}\, dx\, dy = \int_\Gamma f\, n_y\, d\gamma .$$

On observe que la normale extérieure n_y à Γ est nulle pour Γ_g et Γ_d, positive si le long de Γ_+ et négative le long de Γ_-. Pour établir (5), on écrit d'abord le théorème de Fubini qui permet de calculer l'intégrale dans l'ordre que l'on veut :

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial y}\, dx\, dy = \int_a^b dx \left[\int_{\varphi_-(x)}^{\varphi_+(x)} \frac{\partial f}{\partial y}\, dy\right]$$

or la formule d'intégration par parties pour les fonctions à une seule variable entraîne que

$$(6)\quad \int_{\varphi_-(x)}^{\varphi_+(x)} \frac{\partial f}{\partial y}\, dy = f(x, \varphi_+(x)) - f(x, \varphi_-(x)) .$$

Donc

$$(7)\quad \iint_D \frac{\partial f}{\partial y}\, dx\, dy = \int_a^b f(x, \varphi_+(x))\, dx - \int_a^b f(x, \varphi_-(x))\, dx .$$

* Montrons que les intégrales au membre de droite de (7) sont de la forme (5). Pour la courbe

Γ_+, naturellement orientée de gauche à droite par l'axe des abscisses, on a

$$\vec{t} = \frac{dx}{ds}\vec{e_1} + \frac{dy}{ds}\vec{e_2} = \frac{dx}{ds}\vec{e_1} + \varphi_+'(x)\frac{dx}{ds}\vec{e_2}.$$

Le repère $(\vec{t},\vec{n})$ est direct, donc les relations (3) montrent que $t_x = n_y = \frac{dx}{ds} > 0$, $t_y = -n_x = \frac{dy}{ds}$. On peut donc écrire

(8) $\quad dx = n_y \, ds$ le long de Γ_+

et on en déduit $\int_a^b f(x,\varphi_+(x))\,dx = \int_{\Gamma_+} f n_y \, ds$ compte tenu de (8)

* Pour la courbe Γ_-, le repère $(\vec{n},\vec{t})$ est direct cette fois (voir la figure 3) et les relations (3) montrent que dans ce cas $n_y = -t_x = -\frac{dx}{ds}$, $n_x = t_y = \frac{dy}{ds}$ et on a

(9) $\quad dx = -n_y \, ds$ le long de Γ_-.

On en déduit $-\int_a^b f(x,\varphi_-(x))\,dx = \int_{\Gamma_-} f n_y \, ds$.

* compte tenu de la nullité de n_y le long des deux morceaux de frontière Γ_g et Γ_d, on peut réécrire (7) sous la forme

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{\Gamma_+} f n_y \, d\gamma + \int_{\Gamma_g} f n_y \, d\gamma + \int_{\Gamma_-} f n_y \, d\gamma + \int_{\Gamma_d} f n_y \, d\gamma$$

en notant $d\gamma$ l'élément de longueur (au lieu de ds).

Comme on a

$$(10) \qquad \partial D = \Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_g \cup \Gamma_- \cup \Gamma_d ,$$

on déduit de la relation précédente et de (10)

$$(11) \qquad \iint_D \frac{\partial f}{\partial y}\, dx\, dy = \int_\Gamma f n_y \, d\gamma ,$$

ce qui constitue très exactement la relation (5) que l'on cherche à démontrer !

• on étudie maintenant le cas d'un domaine D obtenu à partir du cas précédent en échangeant abscisse et ordonnée :

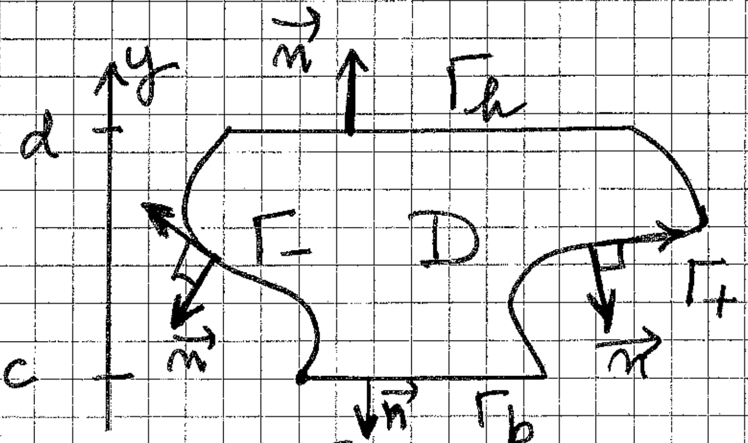

Fig 4

$$(12) \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ c \leq y \leq d,\ \psi_-(y) \leq x \leq \psi_+(y)\}.$$

Les fonctions ψ_+ et ψ_- sont régulières de $[c,d]$ à valeurs réelles et on suppose $\psi_- \leq \psi_+$. alors

$$(13) \qquad \partial D = \Gamma = \Gamma_- \cup \Gamma_b \cup \Gamma_+ \cup \Gamma_h$$

avec

$$\Gamma_- = \{(\psi_-(y), y), \quad c \leq y \leq d\}$$
$$\Gamma_b = \{(x, c), \quad \psi_-(c) \leq x \leq \psi_+(c)\}$$
$$\Gamma_+ = \{(\psi_+(y), y), \quad c \leq y \leq d\}$$
$$\Gamma_h = \{(x, d), \quad \psi_-(d) \leq x \leq \psi_+(d)\}.$$

* on peut établir dans ce cas la relation

$$(14) \quad \iint_D \frac{\partial f}{\partial x}\, dx\, dy = \int_\Gamma f\, n_x\, d\gamma.$$

on remarque que la normale $\vec{n}$ est colinéaire à $\vec{e}_2$ si on reste sur les deux segments de droite Γ_h et Γ_b. Donc $n_x = 0$ dans ce cas. De plus, $n_x > 0$ le long de Γ_+ et $n_x < 0$ le long de Γ_-. Le repère $(\vec{n}, \vec{t})$ est direct le long de Γ_+ et la relation (9) est alors satisfaite. D'où $dy = n_x\, ds$

$$(15) \quad \int_{\Gamma_+} f\, n_x\, d\gamma = \int_c^d f(\psi_+(y), y)\, dy.$$

De façon analogue, le "trièdre" $(\vec{t}, \vec{n})$ est direct le long de Γ_- (voir la figure 4), la relation (8) est vérifiée et on a aussi $dy = -n_x\, ds$, d'où

$$(16) \quad \int_{\Gamma_-} f\, n_x\, d\gamma = -\int_c^d f(\psi_-(y), y)\, dy.$$

- on calcule le membre de gauche de (14) avec le théorème de Fubini :

$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x}\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{\psi_-(y)}^{\psi_+(y)} dx\, \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$= \int_c^d dy \left[f(\psi_+(y),y) - f(\psi_-(y),y) \right]$$

$$= \int_{\Gamma_+} f n_x \, d\gamma + \int_{\Gamma_-} f n_x \, d\gamma \quad (\text{cf } (15) \text{ et } (16))$$

$$= \int_{\Gamma} f n_x \, d\gamma \quad \text{car } n_x = 0 \text{ sur } \Gamma_h \text{ et } \Gamma_b .$$

La relation (14) est établie.

- Dans le cas général, les représentations (4) et (12) ont lieu simultanément (voir la figure 5), les morceaux "droits" de frontière Γ_g, Γ_d, Γ_h et Γ_b sont réduits à un point (représenté sur la figure 5) et le reste des raisonnements est inchangé. La relation (1) est établie.

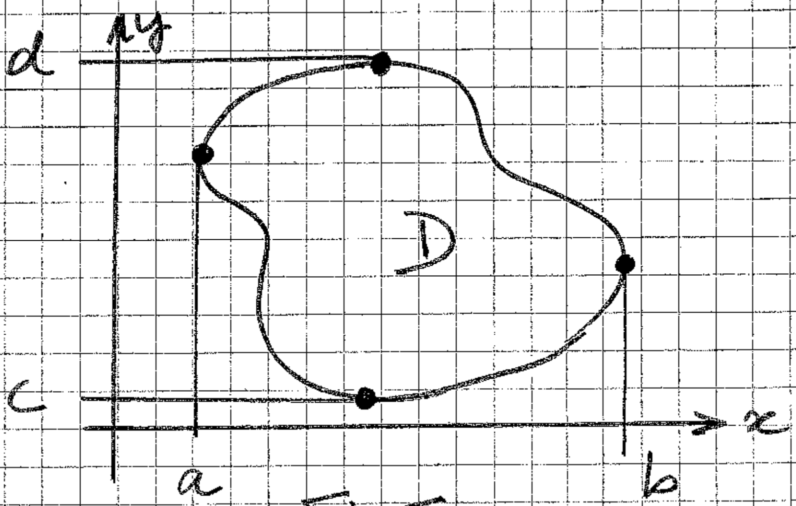

Fig 5

- La relation (1) peut servir à calculer des surfaces ; il suffit de choisir f telle que $\frac{\partial f}{\partial x}=1$ ou $\frac{\partial f}{\partial y}=1$ ou une combinaisons de telles fonctions. On en déduit

$$(17)\quad \iint_D dx\,dy=\int_{\partial D} x\,n_x\,d\gamma=\int_{\partial D} x\,dy$$

$$(18)\quad \iint_D dx\,dy=\int_{\partial D} y\,n_y\,d\gamma=-\int_{\partial D} y\,dx\,.$$

- Si la frontière $\Gamma=\partial D$ est représentée en coordonnées polaires (r,θ) par une courbe de la forme $r=\rho(\theta)$, l'aire limitée par Γ est déterminée par la relation

$$(19)\qquad |D|=\frac{1}{2}\int_{\partial D}(\rho(\theta))^2\,d\theta\,.$$

En effet, en prenant la demi-somme de (17) et (18), on a $\quad |D|=\frac{1}{2}\int_{\partial D}(x\,dy-y\,dx)\,.$

Or $tg\theta=\frac{y}{x}$ entraîne

$$(20)\qquad r^2\,d\theta=x\,dy-y\,dx$$

et la relation (19) résulte de (20) et du calcul précédent.

Dubois

8 novembre 2013.

- Exercices

* Si $\vec{\varphi}(x,y)$ est un champ de vecteurs sur D, montrer que

(21) $$\int_D \operatorname{div} \vec{\varphi}\, dx\,dy = \int_{\partial D} \vec{\varphi}\cdot\vec{n}\, d\gamma$$

où $\vec{n}$ est la normale extérieure à D.

* Soit $u(x,y)$ un champ scalaire régulier sur D. On rappelle que $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial u}{\partial n} \equiv \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial u}{\partial x_j} n_j$, où $\vec{n} = n_1 \vec{e_1} + n_2 \vec{e_2}$ est une normale à D. Montrer qu'on a

(22) $$\int_D \Delta u = \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n}\, d\gamma$$

* généraliser (22) sous la forme

(23) $$-\int_D \Delta u\, v\, dx\,dy = \int_D \nabla u \cdot \nabla v\, dx\,dy + \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} v\, d\gamma$$

* Calculer l'aire du carré unité à l'aide des relations (17) ou (18).

* Calculer l'aire des cercles de centre O et rayon a, centre $(a,0)$ et rayon a à l'aide de la relation (19).

* Montrer que l'aire limitée par la cardioïde $r = R(1+\cos\theta)$ est égale à $\frac{3}{2}\pi R^2$.