Cours d'Analyse Vectorielle

Saint Denis, automne 2014

Cours 10

Intégration par parties des intégrales triples

François Dubois

(14) Intégration par parties

- On se donne Ω domaine inclus dans $\mathbb{R}^3$, de frontière $\partial\Omega$, surface régulière. On note $\vec{n}$ la normale à $\partial\Omega$ pointant de Ω vers l'extérieur ($\vec{n}$ est la "normale extérieure"). On se donne aussi $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction régulière définie sur Ω. On a la formule d'intégration par parties:

(1) $$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx = \int_{\partial\Omega} f . n_j . d\sigma\,, \qquad 1 \leq j \leq 3.$$

Dans la relation (1), le membre de gauche est une intégrale de volume et $dx = dx_1 dx_2 dx_3$ est un élément d'intégration volumique ; le membre de droite est une intégrale de surface et $d\sigma$ l'élément d'aire correspondant.

- On teste cette relation pour Ω la boule de centre 0 et rayon $R > 0$ et $f(x) = x_3$, avec $j = 3$. On a alors $\frac{\partial f}{\partial x_3} = 1$ et le volume

(2) $$|\Omega| \equiv \int_\Omega dx$$

peut être calculé avec le membre de droite.
Si Ω est la boule de rayon R, sa normale est colinéaire au rayon vecteur et on a

(3) $\quad \vec{n} = \dfrac{\vec{r}}{R}$, $\quad \Omega$ boule de rayon R.

On calcule l'intégrale au membre de droite de (1) en coordonnées polaires, où

(4) $\quad x_3 = R\cos\theta, \quad d\sigma = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$.

Alors

$$\int_{\partial\Omega} f.n_3 \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} x_3 . \frac{x_3}{R} R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \, \frac{R^2\cos^2\theta}{R} R^2 \sin\theta$$

$$= 2\pi R^3 \int_0^{\pi} \sin\theta \cos^2\theta \, d\theta$$

or $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin\theta \cos^2\theta \, d\theta = \int_{-1}^{+1} u^2 \, du \qquad (u = -\cos\theta)$

$$= 2\int_0^1 u^2 \, du = 2\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

Donc $\displaystyle\int_{\partial\Omega} f n_3 \, d\sigma = \frac{4}{3}\pi R^3$; on en déduit

(5) $\quad |\Omega| = \dfrac{4}{3}\pi R^3$, $\quad \Omega$ boule de rayon R.

On s'y attendait !

Prop 1 Autre expression de la formule d'intégration par parties.

Soit $\vec{\varphi} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs sur Ω (comme plus haut). On a alors

(6) $$\int_\Omega \operatorname{div} \vec{\varphi} \, dx = \int_{\partial\Omega} \vec{\varphi} \cdot \vec{n} \, d\sigma .$$

Cette relation est équivalente à (1).

Preuve.

On rappelle que

(7) $$\operatorname{div} \vec{\varphi} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_j}$$

si $\vec{\varphi} = \sum_{j=1}^{3} \varphi_j \vec{e_j}$ relativement à une base orthonormée $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$. Alors

$$\int_\Omega \operatorname{div} \vec{\varphi} \, dx = \int_\Omega \sum_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_j} \, dx$$

$$= \sum_j \int_\Omega \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_j} \, dx \qquad \text{linéarité de l'intégral}$$

$$= \sum_j \int_{\partial\Omega} \varphi_j n_j \, d\sigma \qquad \text{(prendre } f = \varphi_j \text{ dans (1))}$$

$$= \int_{\partial\Omega} \left(\sum_j \varphi_j n_j\right) d\sigma$$ (linéarité de l'intégrale)

$$= \int_{\partial\Omega} (\vec{\varphi} \cdot \vec{n})\, d\sigma$$ par définition du produit scalaire,

ce qui établit la relation (6). Réciproquement, si on injecte $\varphi = f\,\vec{e_j}$ dans (6), on a $\varphi_k = f\,\delta_{jk}$ et $\operatorname{div}\vec{\varphi} = \frac{\partial f}{\partial x_j}$.

Donc $$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx = \int_\Omega \operatorname{div}\vec{\varphi}\, dx$$

$$= \int_{\partial\Omega} (\vec{\varphi} \cdot \vec{n})\, d\sigma \quad (\text{cf } (6))$$

$$= \int_{\partial\Omega} f\, n_j\, d\sigma$$

car $\vec{\varphi} \cdot \vec{n} = \sum_k f\,\delta_{jk}\, n_k = f n_j$. Et la relation (1) est établie si on suppose que (6) est vrai. Les relations (1) et (6) sont équivalentes et la proposition est démontrée.

$\square$

Prop 2. Encore une autre formulation de l'intégration par parties.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ comme plus haut et $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $v : \Omega \to \mathbb{R}$ deux fonctions régulières. On a

$$(7) \quad \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} v \, dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_j} dx + \int_{\partial\Omega} u v n_j \, d\sigma, \quad 1 \leq j \leq 3.$$

Cette relation est équivalente à (1).

Preuve

On montre d'abord que (1) ⇒ (7). On choisit $f = uv$ dans la relation (1) et on calcule $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ à l'aide de la règle de Leibniz :

$$(8) \quad \frac{\partial}{\partial x_j}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_j} v + u \frac{\partial v}{\partial x_j}, \quad 1 \leq j \leq 3.$$

On intègre cette relation dans Ω et on utilise (1) ; on en déduit par linéarité :

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} v \, dx + \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_j} dx = \int_{\partial\Omega} u v n_j \, d\sigma .$$

La relation (7) s'en déduit immédiatement.

Réciproquement, si (7) est vrai pour tout couple de fonctions u et v, on peut en particulier prendre le cas particulier où $v \equiv 1$. Alors $\frac{\partial v}{\partial x_j} = 0$ et la relation (7) prend la forme

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\, dx = \int_{\partial\Omega} u\, n_j \cdot d\sigma,$$ qui est absolument identique à (1), la lettre f ayant simplement été remplacée par la lettre u. D'où le résultat. La proposition est démontrée. $\square$

• On rappelle maintenant d'autres formules d'intégration par parties : D'abord (1) est vraie pour $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, avec $\partial\Omega$ courbe frontière d'abscisse curviligne ds :

$$(9) \qquad \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx = \int_{\partial\Omega} f n_j \cdot ds, \quad 1 \le j \le 2, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2.$$

• Ensuite si Σ est une surface qui s'appuie sur une courbe fermée $\Gamma = \partial\Sigma$, avec $\vec{n}$ et Γ d'orientations compatibles via la règle du tire-bouchon. On se donne un champ de vecteurs $\vec{\varphi} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

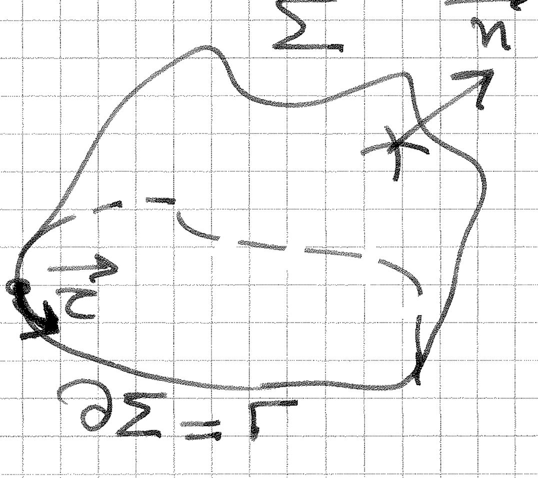

Fig. 1.

assez régulier (Ψ étant défini au delà de Σ pour pouvoir calculer ses dérivées sur la surface). On a alors

$$(10) \quad \int_{\Sigma} \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\Psi} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \int_{\partial\Sigma} \vec{\Psi} \cdot \vec{\tau}\, ds \;;$$

le flux du rotationnel est égal à la circulation du champ.

* L'intégrale du membre de gauche de (10) est une intégrale de surface et $d\sigma$ est l'élément de surface sur Σ. L'intégrale du membre de droite de (10) est une intégrale sur le contour (toujours fermé Γ), et ds est l'élément de longueur sur Γ, $\vec{\tau} = \frac{dM}{ds}$ le vecteur tangent (unitaire) associé à l'abscisse curviligne (voir la Fig. 1).

- Rappelons que si $\Gamma = \widehat{AB}$ est une courbe régulière plongée dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on suppose qu'on peut la paramétrer par

$$(11) \quad \mathbb{R} \supset [0,1] \ni \theta \longmapsto M(\theta) \in \Gamma \subset \mathbb{R}^3$$

avec

$$(12) \quad \overrightarrow{OM}(\theta) = \sum_{j=1}^{3} x_j(\theta)\, \vec{e_j}\,, \quad M(0) = A,\; M(1) = B.$$

Alors l'abscisse curviligne $s(\theta)$ satisfait à

(13) $$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{dx_j}{d\theta}\right)^2} \; ;$$

c'est analogue au cas plan vu au chapitre ; maintenant on a simplement à prendre en compte une troisième coordonnée. Alors

(14) $$\vec{\tau} = \frac{d\vec{M}}{ds}$$

est un vecteur unitaire [exercice laissé au lecteur]. Une intégrale curviligne de la forme $\int_\Gamma g(M)\,ds$ se calcule à l'aide d'une intégrale ordinaire :

(15) $$\int_\Gamma g(M)\,ds = \int_0^1 g(M(\theta))\sqrt{\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{dx_j}{d\theta}\right)^2}\,d\theta .$$

Une intégrale de la forme du membre de droite de (10) peut s'exprimer aussi selon

(16) $$\int_\Gamma \vec{\varphi}\cdot\vec{\tau}\,ds = \int_\Gamma \vec{\varphi}\cdot d\vec{M}$$

en utilisant la relation (14).

Prop (3) Variation d'un champ scalaire.

Soit A, B deux points de $\mathbb{R}^3$,

$\Gamma = \overset{\frown}{AB}$ une courbe qui relie A à B
et $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un champ scalaire
défini au voisinage de Γ. On a alors

$$(17) \quad \int_A^B \vec{\nabla} U \cdot \vec{\tau} \, ds = U(B) - U(A)$$

où

$$(18) \quad \vec{\nabla} U \equiv \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial U}{\partial x_j} \vec{e}_j$$

est le gradient du champ scalaire.

<u>Preuve</u>

On calcule le membre de gauche de (17) en utilisant la règle (15). Compte tenu de (13), on a

$$\int_A^B \vec{\nabla} U \cdot \vec{\tau} \, ds = \int_0^1 \vec{\nabla} U \cdot \frac{d\vec{M}}{ds} \cdot \frac{ds}{d\theta} \, d\theta = \int_0^1 \vec{\nabla} U \cdot \frac{d\vec{M}}{d\theta} \, d\theta$$

Pour $\theta \in [0,1]$, on pose $V(\theta) = U(M(\theta))$. Alors

$$\frac{dV}{d\theta} = \sum_j \frac{\partial U}{\partial x_j} \frac{dx_j}{d\theta} = \vec{\nabla} U \cdot \frac{d\vec{M}}{d\theta}$$

. On peut alors achever le calcul du membre de gauche de la relation (17). Il vient

$$\int_A^B \vec{\nabla} U \cdot \vec{\tau} \, ds = \int_0^1 \frac{dV}{d\theta} \, d\theta = V(1) - V(0) = U(B) - U(A)$$

compte tenu de (13). La proposition en résulte. $\square$

Prop ④ Deux identités remarquables.

Soit $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un champ scalaire assez régulier et $\vec{\varphi} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs régulier lui aussi. On a

(19) $$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{\nabla} U) = \vec{0} .$$

(20) $$\text{div}\left[\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{\varphi}\right] = 0 .$$

Preuve

* Tout d'abord, les expressions précédentes ont un sens. Si U est un champ scalaire, $\vec{\nabla} U$ est un champ de vecteurs et son rotationnel peut être défini. Si $\vec{\varphi}$ est un champ de vecteurs, son rotationnel est un nouveau champ de vecteurs et la divergence de ce champ de vecteurs est un champ scalaire qui est bien défini.

* Si $\vec{\varphi}$ est un champ de vecteurs arbitraire, on sait [cf leçon 12] que son rotationnel $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{\varphi}$ a pour i^e composante

(21) $$(\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{\varphi})_i = \varepsilon_{ijk}\, \partial_j \varphi_k , \quad 1 \leq i \leq 3 .$$

Avec $\varphi_k = \partial_k U = (\vec{\nabla} U)_k$, on en déduit

$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{\nabla} U)_i = \varepsilon_{ijk}\, \partial_j \partial_k U$, avec sommation implicite sur j et k. Quand on échange les noms des variables, l'expression précédente est égale à

$$\varepsilon_{ikj} \partial_k \partial_j U = -\varepsilon_{ijk}\, \partial_j \partial_k U$$

car ε est antisymétrique et que le théorème de Schwarz exprime qu'on peut dériver deux fois dans l'ordre que l'on veut :

$$(22) \qquad \partial_k \partial_j U = \partial_j \partial_k U \quad , \quad 1 \leq j, k \leq 3 .$$

On déduit du calcul précédent que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{\nabla} U)_i$ est égale à son opposé, donc est nul, ce qui établit la relation (19)

* De façon analogue,

$$\mathrm{div}[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{\varphi}\,] = \sum_j \partial_j [\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{\varphi}]_j$$

$$= \partial_j\, \varepsilon_{jkl}\, \partial_k \varphi_l = (\varepsilon_{jkl}\, \partial_j \partial_k)\, \varphi_l$$

$$= \varepsilon_{ljk}\, \partial_j \partial_k \varphi_l = \varepsilon_{lkj}\, \partial_k \partial_j \varphi_l$$

$$= -\varepsilon_{ljk}\, \partial_j \partial_k \varphi_l \qquad \text{cf (22)}$$

$= 0$ par égalité à son opposé. D'où (20). $\square$

Exercices

- Pour $\vec{r}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$, on pose $\vec{\varphi}(\vec{r})=\vec{r}$. A l'aide de la relation (6) appliquée à ce champ de vecteurs, montrer que le volume de la boule de centre O et de rayon R est donné par la relation (5).

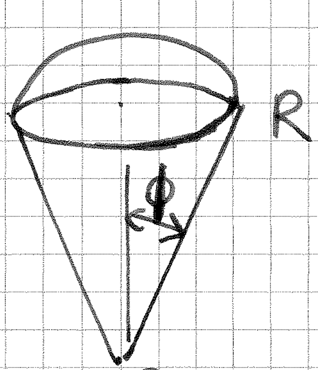

Fig. 2

- Volume d'un tronc de cône sphérique. Soit V le volume du plan défini en coordonnées polaires par $r\leq R$ et $\theta\leq\phi$ (voir la figure 2). Avec l'aide du champ de vecteurs $\vec{\varphi}(\vec{r})=\vec{r}$ montrer que $|V| = \frac{4}{3}\pi R^3 \sin^2\frac{\phi}{2}$.

- Pour $u:\Omega\to\mathbb{R}$ et $v:\Omega\to\mathbb{R}$ assez réguliers, on pose $\vec{\nabla} u\cdot\vec{\nabla} v \equiv \sum_j \frac{\partial u}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_j}$ et $\frac{\partial u}{\partial n} = \vec{\nabla} u\cdot\vec{n} = \sum_j \frac{\partial u}{\partial x_j} n_j$.
Montrer l'identité

$$(23)\quad -\int_\Omega \Delta u\, v\, dx = \int_\Omega \vec{\nabla} u\cdot\vec{\nabla} v\, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\, v\, d\sigma .$$

- On se donne deux champs de vecteurs $\vec{\varphi}$ et $\vec{\psi}$ dans $\mathbb{R}^3$.
Montrer l'identité

$$(24)\quad \int_\Omega \vec{\varphi}\cdot\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\psi}\, dx = \int_\Omega \vec{\psi}\cdot\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\varphi}\, dx + \int_{\partial\Omega} (\vec{\varphi},\vec{n},\vec{\psi})\, d\sigma$$

où $(\vec{\varphi},\vec{n},\vec{\psi}) = \vec{\varphi}\cdot(\vec{n}\times\vec{\psi}) = (\vec{\varphi}\times\vec{n})\cdot\vec{\psi}$.

[illegible] 20 mars 2014