

le cnam

## **Cours d'Analyse Vectorielle**

Saint Denis, automne 2014

Complément 01

### **Coordonnées sphériques**

François Dubois

(10)

## Coordonnées sphériques

• Exemples de surfaces.

Le plan, le cylindre, la sphère, le cône, le tore ... sont autant d'exemples de surfaces utilisées nouvellement en génie nucléaire.

Une surface est un espace mathématique "à deux dimensions"; il faut deux paramètres réels  $u$  et  $v$  pour s'y repérer.

• Coordonnées cylindriques.

un point  $M$  sur le cylindre qui a pour base le cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$  dans le plan  $(xOy)$  et dirigé par des droites géométriques parallèles à la troisième direction  $Oz$ .

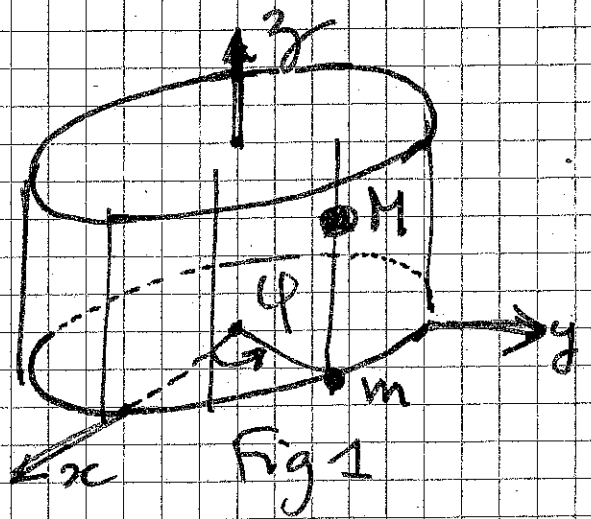


Fig 1

peut être repéré par deux nombres: la cote  $z$  du point  $M$  et l'angle semi-polaire du point  $m$  (projeté de  $M$  dans le plan  $Oxy$  parallèlement à  $Oz$ ). on peut écrire:

$$(1) \quad \vec{OM} = R \vec{e}_\rho(\varphi) + z \vec{e}_z$$

ou

$$(2) \vec{e}_\rho(\varphi) = \cos\varphi \vec{e}_1 + \sin\varphi \vec{e}_2.$$

\* Si on projette la relation (1) sur les trois axes cartésiens  $\vec{e}_j$  ( $1 \leq j \leq 3$ ), on a :

$$(3) \begin{cases} x = R \cos\varphi \\ y = R \sin\varphi \\ z = z. \end{cases}$$

des coordonnées semi-polaires  $(R, \varphi, z)$  permet tout de repérer le point  $M$  sur le cylindre de rayon  $R$  décrit Figure 1.

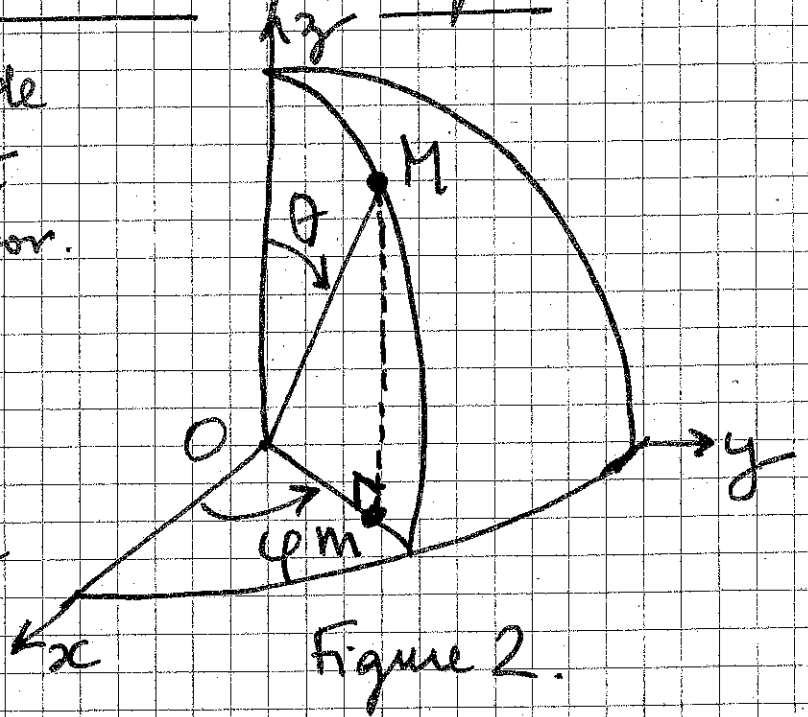
### • Introduction aux coordonnées sphériques.

On se donne un point  $M$  de l'espace  $\mathbb{R}^3$ , qui peut être repéré par ses coordonnées cartésiennes :

$$(4) \vec{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3.$$

on introduit le rayon  $r$  de la sphère de centre l'origine et de rayon  $OM$  :

$$(5) r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad r \geq 0.$$



on projette ensuite  $M$  en le point  $m$  3  
 sur le plan  $xOy$  (voir la Fig. 2). Si  $M$   
 n'est pas sur l'axe  $Oz$ , c'est à dire si  $m$   
 n'est pas confondu avec l'origine, on peut  
 définir sans ambiguïté l'angle polaire  $\varphi$   
 $(0 \leq \varphi < 2\pi$  pour fixer les idées) du point  $m$   
 dans le plan  $xOy$  ou retrouver les coordonnées  
 polaires classiques du plan:

$$(6) \quad x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi, \quad R^2 = x^2 + y^2.$$

\* Dans le plan défini par les trois points  $O, m$  et  
 $M$  (cf Fig. 2), l'angle  $\theta$  désigne l'angle qui  
 permet de passer de la demi-droite  $Oz$  à la  
 demi-droite  $OM$ . On a donc:

$$(7) \quad z = r \cos \theta, \quad R = r \sin \theta.$$

Les relations (6) et (7) définissent le passage  
 entre les coordonnées cartésiennes et les coordon-  
 nées polaires  $(r, \theta, \varphi)$ :

$$(8) \quad \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

avec

$$(9) \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

- Si on fixe  $r$  (la sphère) et  $\theta$  (l'angle azimutal), alors le point  $M$  décrit à la relation (8) parcourt une courbe circulaire, un parallèle, de rayon  $r \sin \theta$ . Pour  $\theta = \pi/2$ , ce parallèle se nomme également "équateur" (voir la figure 3). Si on fixe  $r$  et  $\varphi$  (l'angle longitudinal), alors le point  $M$  décrit un cercle de rayon  $r$ , un méridien.

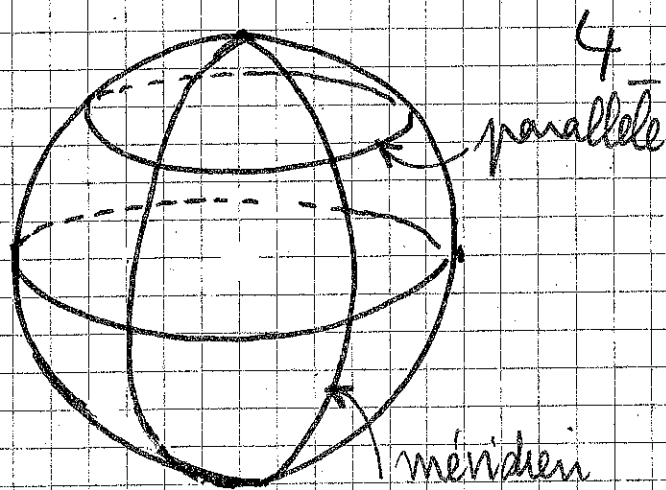


Fig 3.

- Les vecteurs tangents aux parallèles et aux méridiens permettent de construire une base locale ortho-normée  $(\vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_r)$ . On pose d'abord

$$(10) \quad \vec{e}_r = \frac{\partial \vec{M}}{\partial r} = \frac{1}{r} \vec{OM}$$

ou  $m$  de la relation (8). On calcule ensuite  $\partial \vec{M} / \partial \theta$ , et on introduit un vecteur unitaire  $\vec{e}_\theta$ :

$$(11) \quad \vec{e}_\theta = \cos \theta (\cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2) - \sin \theta \vec{e}_3$$

On a alors

$$(12) \quad \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} = r \vec{e}_\theta$$

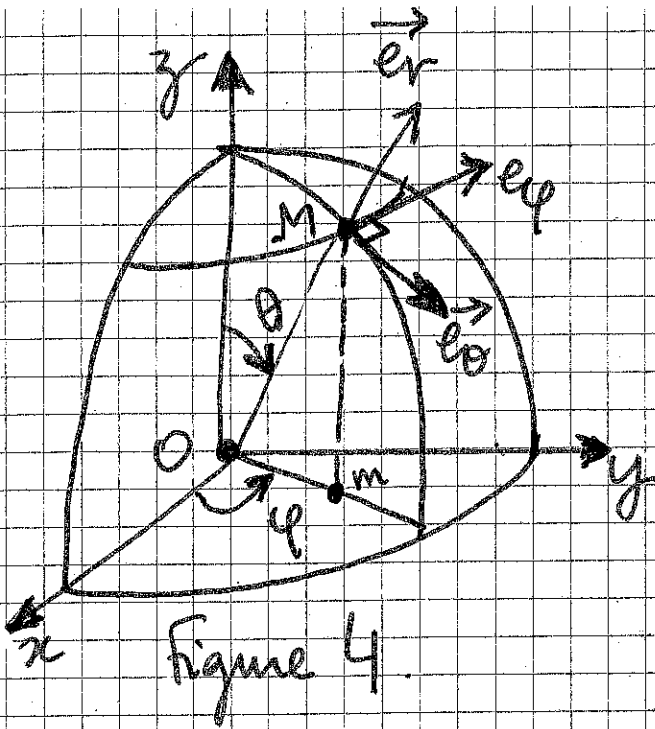


Figure 4

Enfin, il vient

$$(13) \quad \frac{\vec{r}}{\partial \theta} = r \sin \theta \vec{e}_\theta$$

$$(14) \quad \vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_1 + \cos \theta \vec{e}_2$$

ou a la

**Prop ①** orthogonalité

Les vecteurs  $\vec{e}_\theta$  et  $\vec{e}_\phi$  sont orthogonaux

La preuve est un exercice laissé au lecteur

**Prop ②** Produit vectoriel

on a la relation

$$(15) \quad \vec{e}_\theta \times \vec{e}_\phi = \vec{e}_r$$

Encore un exercice pour le lecteur !

- On déduit des propositions (1) et (2) que le trièdre  $(\vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi, \vec{e}_r)$  forme une base ortho-normée directe de l'espace  $\mathbb{R}^3$ . Les vecteurs introduits sont clairement unitaires; de plus la relation (15) montre que  $\vec{e}_r$  est orthogonal à

$\vec{e}_\theta$  et  $\vec{e}_\varphi$ .

• Quelle est la surface de la sphère?

Un point  $M$  de la sphère de rayon  $r$  est paramétré par les angles  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ) et  $\varphi$  ( $0 \leq \varphi < 2\pi$ ).  
Quelle est alors la surface  $|S|$  de la sphère de rayon  $r$ ?

On a un changement de variable, une paramétrisation  $[0, \pi] \times [0, 2\pi[ \ni (\theta, \varphi) \mapsto M \in \mathbb{R}^3$ , dont les coordonnées sont données par les relations (8).

Dans le cas d'un point de  $\mathbb{R}^2$ , l'élément d'aire  $ds$  est fourni par  $|\det J| ds d\varphi$ , où

$|\det J|$  est l'aire du parallélogramme de côtés  $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta}$  et  $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi}$ . Il en est de même ici, même si le point  $M$  appartient à l'espace  $\mathbb{R}^3$ , d'aire du parallélogramme de côtés  $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta}$  et  $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi}$  est fournie par le module du produit vectoriel  $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi}$ .

$$(16) \quad ds = \left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi} \right\| ds d\varphi$$

\* Pour les coordonnées sphériques (8),  $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta}$  est donné par la relation (12) et  $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi}$  par la relation (13); on a donc

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi} = r \vec{e}_\theta \times (r \sin \theta \vec{e}_\varphi) = r^2 \sin \theta \vec{e}_r$$

compte tenu de (15). On remarque que  $\sin \theta \geq 0$

si  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Donc  $\left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi} \right\| = r^2 \sin \theta$  et

$$(17) \quad d\sigma = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi.$$

\* Le calcul de l'aire de la sphère est alors un simple calcul d'intégrale double:

$$|S| = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \, r^2 \sin \theta = 2\pi r^2 \left( \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \right) \\ = 2\pi r^2 (-\cos \theta) \Big|_0^\pi$$

$$(18) \quad |S| = 4\pi r^2.$$

• on retiendra que pour calculer une surface, on doit calculer l'aire d'un parallélogramme lié aux deux vecteurs tangents  $\frac{\partial \vec{M}}{\partial u}$  et  $\frac{\partial \vec{M}}{\partial v}$  à la surface; cette aire élémentaire se calcule à l'aide du module de leur produit vectoriel:

$$(19) \quad d\sigma = \left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{M}}{\partial v} \right\| \, du \, dv.$$

Jubon's

25 novembre 2013