

le cnam

Cours d'Analyse Vectorielle

Saint Denis, automne 2014

Complément 02

Tenseur antisymétrique d'ordre trois

François Dubois

12) Tenseur antisymétrique d'ordre 3.

• Ce chapitre particularise le cas de la dimension 3, si indispensable pour les sciences de l'ingénieur. Le tenseur antisymétrique d'ordre 3 ϵ_{ijk} consiste en la donnée de $3 \times 3 \times 3 = 27$ membres définis pour $1 \leq i, j, k \leq 3$, et valant 0, +1 ou -1 :

$$(1) \quad \epsilon_{ijk} \in \{0, -1, +1\}, \quad 1 \leq i, j, k \leq 3.$$

De façon plus précise $\epsilon_{ijk} = 0$ si deux au moins des indices sont égaux

$$(2) \quad \{i, j, k\} \neq \{1, 2, 3\} \Rightarrow \epsilon_{ijk} = 0.$$

Si (i, j, k) est une permutation circulaire des indices $(1, 2, 3)$, alors $\epsilon_{ijk} = 1$. Il est facile d'expliciter tous les cas de figure :

$$(3) \quad \epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1$$

Si (i, j, k) s'obtient à partir de $(1, 2, 3)$ par échange de deux des indices, le troisième restant fixe (on parle alors de transposition), alors $\epsilon_{ijk} = -1$:

$$(4) \quad \epsilon_{132} = \epsilon_{321} = \epsilon_{213} = -1$$

On se rend compte que $\varepsilon_{ijk} = 0$ dans 21 cas de figure et est non nul dans les 6 cas où (i, j, k) est une permutation de $(1, 2, 3)$

- Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base orthonormée directe de l'espace \mathbb{R}^3 . On note de façon analogue le produit mixte de trois vecteurs. Rappelons que si $\vec{u} = \sum_i u_i \vec{e}_i$, $\vec{v} = \sum_j v_j \vec{e}_j$, $\vec{w} = \sum_k w_k \vec{e}_k$ sont trois vecteurs de \mathbb{R}^3 , alors le produit mixte $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ se calcule avec un simple déterminant :

$$(5) \quad (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Prop 1 Produit mixte et tenseur antisymétrique
On a

$$(6) \quad (\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k) = \varepsilon_{ijk}, \quad 1 \leq i, j, k \leq 3$$

Preuve.

* Si deux au moins des indices i, j, k sont égaux, le produit mixte au membre de gauche de (6) contenant deux vecteurs égaux, donc est nul. C'est aussi le cas pour ε_{ijk} et la relation (6) est satisfaite dans ce cas.

* Si (i, j, k) est une permutation circulaire de $(1, 2, 3)$, on traite les trois cas de figure:

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = 1 = \epsilon_{123}$$

et de même par permutation circulaire:

$$(\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1) = (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 1 = \epsilon_{231}$$

$$(\vec{e}_3, \vec{e}_1, \vec{e}_2) = (\vec{e}_3 \times \vec{e}_1) \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 1 = \epsilon_{312}$$

* Enfin si (i, j, k) contient une transposition, on passe en revue les trois derniers cas:

$$(\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3) = (\vec{e}_2 \times \vec{e}_1) \cdot \vec{e}_3 = -\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = -1 = \epsilon_{213}$$

$$(\vec{e}_3, \vec{e}_2, \vec{e}_1) = (\vec{e}_3 \times \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_1 = -\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = -1 = \epsilon_{321}$$

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2) = (\vec{e}_1 \times \vec{e}_3) \cdot \vec{e}_2 = -\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = -1 = \epsilon_{132}$$

ouf! \square

Prop 2) Transformation par permutation.

on a pour des indices i, j, k quelconques compris entre 1 et 3:

$$(7) \quad \epsilon_{jik} = -\epsilon_{ijk}$$

$$(8) \quad \epsilon_{jki} = \epsilon_{ijk}$$

Preuve

* on utilise les propriétés connues du produit mixte :

$$\varepsilon_{jik} = (\vec{e}_j, \vec{e}_i, \vec{e}_k) = -(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k) = -\varepsilon_{ijk}$$

* De même pour la permutation circulaire :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{jki} &= (\vec{e}_j, \vec{e}_k, \vec{e}_i) = -(\vec{e}_j, \vec{e}_i, \vec{e}_k) \\ &= -[-(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k)] = (\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k) = \varepsilon_{ijk} \end{aligned}$$

et la propriété est établie. \square

Prop 3 Expression du produit mixte

Avec la définition (5) rappelée plus haut, on a

$$(9) (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} u_i v_j w_k$$

Preuve: il suffit d'utiliser la linéarité du produit mixte par rapport à chacun de ses arguments :

$$\begin{aligned} (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) &= \left(\sum_i u_i \vec{e}_i, \sum_j v_j \vec{e}_j, \sum_k w_k \vec{e}_k \right) \\ &= \sum_i \sum_j \sum_k u_i v_j w_k (\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k) \end{aligned}$$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \sum_i \sum_j \sum_k u_i v_j w_k \epsilon_{ijk} \quad (9) \quad 5$$

ce qui montre la relation (9) \square

• Convention d'Einstein sur les indices répétés.

d'expression au membre de droite de (9) se note également $\epsilon_{ijk} u_i v_j w_k$, sans écrire le (triple) symbole de sommation sur les indices i, j et k . C'est la convention d'Einstein qui suppose implicitement que cette somme est présente dès que un même indice est présent exactement deux fois dans une expression algébrique.

Ainsi, le terme générique du produit AB des matrices A et B s'écrit

$$(10) \quad (AB)_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}$$

Avec la notation d'Einstein, la relation (10) s'écrit

$$(11) \quad (AB)_{ij} = A_{ik} B_{kj}$$

où la sommation sur k n'est pas écrite car l'indice k est présent deux fois au membre de droite de la relation (11).

Prop 4 Rotationnel

6

Soit $\vec{\varphi}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs.
La i° composante du champ de vecteurs
 $\vec{\text{rot}} \vec{\varphi}$ est donnée par

$$(12) (\vec{\text{rot}} \vec{\varphi})_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j \varphi_k, \quad 1 \leq i \leq 3$$

avec sommation implicite sur les indices j et k
au membre de droite de (12) et

$$(13) \partial_j \equiv \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad 1 \leq j \leq 3.$$

Preuve

* on sait que

$$(14) (\vec{\text{rot}} \vec{\varphi})_3 = \partial_1 \varphi_2 - \partial_2 \varphi_1.$$

Si on regarde le membre de droite de (12) avec
 $i=3$, le coefficient ε_{3jk} est non nul seule-
ment si $j=1$ et $k=2$ ou si $j=2$ et $k=1$.

De plus, on sait que $\varepsilon_{312} = 1$, $\varepsilon_{321} = -1$.

Donc, le membre de droite de (12)
est égal dans ce cas à $\partial_1 \varphi_2 - \partial_2 \varphi_1$, ce qui
est identique à (14). La relation (12) est dé-
montrée pour $i=3$. La preuve par permutation
circulaire pour les deux autres cas est laissée
au lecteur.



(P) Réduction du produit

7

Soit ε_{ijk} le tenseur antisymétrique d'ordre 3 défini aux relations (1) à (4) et $\delta_{\alpha\beta}$ le symbole de Kronecker défini par

$$(15) \quad \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

on a la relation suivante (avec sommation implicite sur l'indice i):

$$(16) \quad \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{i\alpha\beta} = \delta_{j\alpha} \delta_{k\beta} - \delta_{j\beta} \delta_{k\alpha}$$

pour $1 \leq j, k, \alpha, \beta \leq 3$.

Preuve

* si $j = k$, le membre de gauche de (16) est nul. Vérifions que c'est aussi le cas pour le membre de droite. or $\delta_{j\alpha} \delta_{j\beta} - \delta_{j\beta} \delta_{j\alpha} = 0$, ce qui établit (16) dans ce cas.

* si $j \neq k$, le seul terme qui contribue à la somme au membre de gauche de (16) est celui tel que (i, j, k) est une permutation de $(1, 2, 3)$. Supposons cette permutation paire pour fixer les idées, donc $\varepsilon_{ijk} = 1$.

Alors $\varepsilon_{i\alpha\beta}$ est non nul seulement si $\{\alpha, \beta\} \neq \{j, k\}$ ou égal à l'ensemble $\{j, k\}$.

* Si ce n'est pas le cas alors le membre de gauche de (16) est toujours nul. Si $\{\alpha, \beta\} \neq \{j, k\}$, alors α ou β est égal au troisième indice i , donc est différent à la fois de j et de k . Supposons que cet indice est α pour fixer les idées. Alors $\delta_{j\alpha} = 0$ et $\delta_{k\alpha} = 0$; donc le membre de droite de (16) est nul dans ce cas et la relation est encore vraie.

* Si les paires $\{\alpha, \beta\}$ et $\{j, k\}$ sont égales, alors ($j = \alpha$ et $k = \beta$) ou bien ($j = \beta$ et $k = \alpha$). Dans le premier cas, $\varepsilon_{i\alpha\beta} = \varepsilon_{ijk} = 1$ donc le membre de gauche de (16) vaut 1. Par ailleurs $\delta_{j\alpha} \delta_{k\beta} - \delta_{j\beta} \delta_{k\alpha} = 1 \times 1 - 0 \times 0 = 1$, ce qui étatsolit la relation dans ce nouveau cas.

Dans le second cas, $j = \beta$ et $k = \alpha$, donc $\varepsilon_{i\alpha\beta} = -1$. Par ailleurs $\delta_{j\alpha} \delta_{k\beta} - \delta_{j\beta} \delta_{k\alpha} = 0 - 1 \times 1 = -1$. La relation (16) est encore vraie.

* Si $j \neq k$ et (i, j, k) permutation impaire de $(1, 2, 3)$, $\varepsilon_{ijk} = -1$ et la preuve se mène comme ci-dessus. Elle est laissée au lecteur.



Prop (5) Double réduction du produit.

Si on contracte la relation (16) une fois de plus, on a

$$(17) \quad \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ij\beta} = 2 \delta_{k\beta}, \quad 1 \leq k, \beta \leq 3$$

avec sommation sur i et j au membre de gauche de (17)

Preuve.

on fait $\alpha = j$ dans la relation (16):

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ij\beta} = \delta_{ij} \delta_{k\beta} - \delta_{j\beta} \delta_{kj}$$

or $\delta_{ij} = \sum_j \delta_{ij} = 3$ et $\delta_{j\beta} \delta_{kj} = \sum_j \delta_{kj} \delta_{j\beta} = \delta_{k\beta}$

compte tenu de (11) et du fait que le produit de la matrice identité par elle-même est égal à la matrice identité. Donc

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ij\beta} = 3\delta_{k\beta} - \delta_{k\beta} = 2\delta_{k\beta} \text{ et (17)}$$

est établie. \square

- Double produit vectoriel.

Montrer que $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = -\vec{u}(\vec{v} \cdot \vec{w}) + \vec{v}(\vec{u} \cdot \vec{w})$.

- Rotationnel du rotationnel.

Si $U: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est un champ scalaire $\vec{\nabla} U$ désigne le vecteur dont la i° composante vaut $\partial_i U = \frac{\partial U}{\partial x_i}$ et ΔU le scalaire obtenu par sommation en diagonale des dérivées secondes:

$$\Delta U = \sum_j \frac{\partial^2 U}{\partial x_j^2} = \sum_j \partial_j^2 U = \sum_j \partial_j \partial_j U = \partial_j \partial_j U$$

Si $\vec{\varphi}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ est un champ de vecteurs, $\text{div} \vec{\varphi}$ est un champ scalaire défini par $\text{div} \vec{\varphi} = \sum_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_j} = \partial_j \varphi_j$ et $\Delta \vec{\varphi}$ est un champ de vecteurs dont la i° composante est égale à $\Delta \varphi_i$.

Montrer la relation

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{\varphi}) = \vec{\nabla}(\text{div} \vec{\varphi}) - \Delta \vec{\varphi}.$$

- Que vaut $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} \equiv \sum_{i,j,k} (\varepsilon_{ijk})^2$?

Julien 7 mars 2014