Cours d'Analyse Vectorielle

Saint Denis, automne 2014

Complément 03

Révisions

François Dubois

Analyse Vectorielle (STN-2)

(15) Compléments ; révisions

- Formule de Fubini

Cas du triangle $\hat{T}$ défini par les inégalités

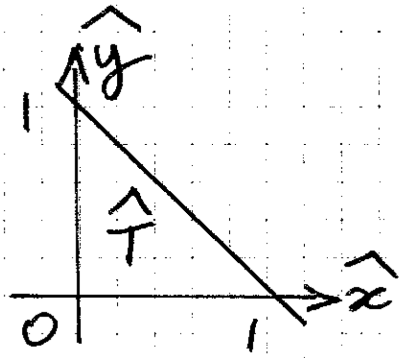

Fig. 1

(1) $(\hat{x},\hat{y}) \in \hat{T} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{x} \geq 0, \ \hat{y} \geq 0 \\ \hat{x}+\hat{y} \leq 1 \end{cases}$

(cf Fig. 1). Si $f : \hat{T} \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée sur $\hat{T}$ (pour fixer les idées), on a

(2) $$\iint_{\hat{T}} f(\hat{x},\hat{y})\, d\hat{x}\, d\hat{y} = \int_0^1 d\hat{x} \int_0^{1-\hat{x}} d\hat{y}\ f(\hat{x},\hat{y})$$

en intégrant d'abord en $\hat{y}$ à $\hat{x}$ fixé puis en intégrant le résultat obtenu par rapport à $\hat{x}$. On a aussi, en intégrant d'abord en $\hat{x}$ à $\hat{y}$ fixé puis le résultat obtenu par rapport à $\hat{y}$:

(3) $$\iint_{\hat{T}} f(\hat{x},\hat{y})\, d\hat{x}\, d\hat{y} = \int_0^1 d\hat{y} \int_0^{1-\hat{y}} d\hat{x}\ f(\hat{x},\hat{y}).$$

- Avec $f(\hat{x},\hat{y}) = \hat{x}$, le calcul avec la relation (2) se termine à l'aide d'un calcul d'intégrales simples successives :

$$\int_{\hat T} \hat x \, d\hat x \, d\hat y = \int_0^1 d\hat x \int_0^{1-\hat x} d\hat y \; \hat x = \int_0^1 d\hat x \; \hat x \int_0^{1-\hat x} d\hat y$$
$$= \int_0^1 d\hat x \; \hat x \, (1-\hat x) = \Big[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \Big]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Avec la relation (3), on a le détail qui suit :

$$\int_{\hat T} \hat x \, d\hat y \, d\hat x = \int_0^1 d\hat y \int_0^{1-\hat y} d\hat x \; \hat x = \int_0^1 d\hat y \, \Big[\frac{\hat x^2}{2} \Big]_0^{1-\hat y}$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 d\hat y \, (1-\hat y)^2 = \frac{1}{2} \Big[\hat y - \hat y^2 + \frac{\hat y^3}{3} \Big]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

C'est le même résultat, mais obtenu à l'aide de calculs sensiblement différents.

- <u>Exercice</u>. Montrer qu'avec $\hat T$ défini par (1), on a

(4) $$\int_{\hat T} \hat x \, d\hat x \, d\hat y = \int_{\hat T} \hat y \, d\hat x \, d\hat y = \frac{1}{6}.$$

- <u>changement de variable</u>

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 1, 2$ ou 3) un domaine de l'espace (de dimension d), paramétré à l'aide du domaine $\hat\Omega \subset \mathbb{R}^d$ "plus simple" et de la fonction F :

(5) $$\hat\Omega \ni \hat x \longmapsto x = F(\hat x) \in \Omega \subset \mathbb{R}^d.$$

On suppose F régulière, bijective et l'application réciproque F^{-1} régulière également. On note $dF(\hat x)$ la matrice jacobienne de ce changement de variable :

(6) $$dF(\hat x)_{ij} = \frac{\partial F_i(\hat x)}{\partial \hat x_j}, \quad 1 \leq i, j \leq d.$$

on appelle Jacobien la valeur absolue du déterminant de cette matrice;

$$(7) \quad J(\hat{x}) = \left| \det(dF(\hat{x})) \right|$$

Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction de d variables, alors son intégrale sur Ω peut être calculée à l'aide d'une intégrale sur $\hat{\Omega}$, grâce à la relation de changement de variable:

$$(8) \quad \int_{\Omega} f(x)\,dx = \int_{\hat{\Omega}} f(F(\hat{x}))\; J(\hat{x})\,d\hat{x}$$

- Dans le cas où $\Omega = T = (A, B, C)$ est un triangle du plan, on peut le paramétrer à l'aide de $\hat{T}$ défini à la relation (1) et de la fonction affine F de sorte que

$$(9) \quad F(0,0) = A, \; F(1,0) = B, \; F(0,1) = C.$$

Nous laissons le soin au lecteur de faire un dessin! Alors l'axe des $\hat{x}$ se transforme par F en la droite AB et l'axe des $\hat{y}$ se change en la droite AC. On en déduit l'expression de $(x,y) \in T$ en fonction de $(\hat{x},\hat{y}) \in \hat{T}$:

$$(10) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A + (x_B - x_A)\hat{x} + (x_C - x_A)\hat{y} \\ y_A + (y_B - y_A)\hat{x} + (y_C - y_A)\hat{y} \end{pmatrix},$$

où (x_P, y_P) désignent les coordonnées de $P \in \{A, B, C\}$.

on a alors dans ce cas

(11) $J(\hat{x},\hat{y}) = \left|\det\begin{pmatrix} x_B - x_A & x_C - x_A \\ y_B - y_A & y_C - y_A \end{pmatrix}\right| = \|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|$.

Avec $f \equiv 1$ dans (8), il vient $|T| = J(\hat{x}) \cdot |\hat{T}|$, i.e.

(12) $J(\hat{x},\hat{y}) = 2|T|$ car $|\hat{T}| = 1/2$.

- Exercice.

Avec les notations précédentes, montrer qu'on a

(13) $\displaystyle\int_T x\,dx\,dy = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C)\,|T|$.

- Exercice.

Soit $\hat{\theta}$ le tétraèdre de référence défini par

(14) $(\hat{x},\hat{y},\hat{z}) \in \hat{\theta} \iff \begin{cases} \hat{x} \geq 0, \ \hat{y} \geq 0, \ \hat{z} \geq 0 \\ \hat{x} + \hat{y} + \hat{z} \leq 1 \end{cases}$

Montrer qu'on a $|\hat{\theta}| = \frac{1}{6}$.

Soit (A, B, C, D) un tétraèdre θ quelconque de l'espace. Montrer qu'on peut le paramétrer par $\hat{\theta}$ de façon affine. En déduire que

(15) $|\theta| = \frac{1}{6}\,|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})|$.

- ## Intégration par parties

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d = 1, 2$ ou $3)$ un domaine borné de $\mathbb{R}^d$ de frontière $\partial\Omega$ régulière. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction assez régulière sur Ω. On a, avec $\partial_j \equiv \dfrac{\partial}{\partial x_j}$:

$$(16) \quad \int_\Omega (\partial_j f)\, dx = \int_{\partial\Omega} f\, n_j\, d\sigma ,$$

où $\vec{n} = \sum_j n_j \vec{e}_j$ est la normale extérieure unitaire en un point $x \in \partial\Omega$ arbitraire.

- Si Σ est une surface incluse dans $\mathbb{R}^3$, de bord $\partial\Sigma$, courbe munie d'un vecteur tangent $\vec{\tau}$ de sorte que la normale extérieure à Σ se note $\vec{n}$, en suivant la règle du tire-bouchon, on a

$$(17) \quad \int_\Sigma \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{\varphi} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \int_{\partial\Sigma} \vec{\varphi} \cdot \vec{\tau}\, ds .$$

- Si $\Gamma = \overparen{(A, B)}$ est un arc de courbe de l'espace $\mathbb{R}^3$, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un champ scalaire, on a

$$(18) \quad \int_A^B \vec{\nabla} f \cdot \vec{\tau}\, ds = f(B) - f(A) .$$

- ## Exercice.

Soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$ un champ scalaire. Alors

$$(19) \quad \int_\Omega \vec{\nabla} u\, dx = \int_{\partial\Omega} u\, \vec{n}\, d\sigma$$

où

$$(20) \quad \vec{\nabla} u = \sum_{j=1}^{d} (\partial_j u) \, \vec{e_j}$$

est le vecteur gradient du champ u. On déduit

$$(21) \quad \int_{\partial\Omega} \vec{n} \, d\sigma = 0 ,$$

où Ω est arbitraire !

- <u>Fonctions composées</u>

Soit $F : \hat{x} \longmapsto x = F(\hat{x})$ et $\varphi : x \longmapsto \varphi(x)$ deux champs différentiables, avec $\hat{x} \in \hat{\Omega} \subset \mathbb{R}^d$, $x \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et $\varphi(x) \in \mathbb{R}$, pour fixer les idées. Alors l'application composée $\hat{\Omega} \ni \hat{x} \mapsto \psi(\hat{x}) = \varphi(F(\hat{x})) \in \mathbb{R}$ est différentiable. On a la formule de composition

$$(22) \quad \frac{\partial \psi}{\partial \hat{x}_j} = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \, \frac{\partial F_k}{\partial \hat{x}_j} , \quad 1 \leq j \leq d$$

qu'on écrit en pratique sous la forme plus compacte

$$(23) \quad \frac{\partial \psi}{\partial \hat{x}_j} = \sum_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \, \frac{\partial x_k}{\partial \hat{x}_j} .$$

Cette relation peut aussi s'écrire avec les matrices jacobiennes :

(24) $d(\varphi \circ F) = d\varphi(F) \circ dF$.

- **Exercice : gradient en coordonnées polaires.**

Soit $U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction des deux variables x et y qu'on paramètre selon

(25) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

On pose $V(r,\theta) = U(r\cos\theta, r\sin\theta)$. On rappelle que $\vec{e_r} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$, $\vec{e_\theta} = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$.
Montrer qu'on a

(26) $\vec{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e_\theta}$.

- **Angles solides.**

Soit Γ le cône de demi-angle au sommet β. A l'aide des coordonnées sphériques

(27) $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$

montrer que le cône Γ vu de son sommet a un angle solide qui vaut $4\pi\sin^2\beta/2$.

- Soit Λ le trièdre formé des points de l'espace $\mathbb{R}^3$ tels que $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $z \geq 0$. Montrer que son angle solide (vu depuis le sommet à l'origine) vaut $\pi/2$.

F. Dubois Paris, 26 mars 2014.