Université Paris Sud — Département de Mathématiques d'Orsay
Agrégation de mathématiques
Modélisation et calcul scientifique — 24 octobre 2008

Algorithme de De Casteljau

1) Préliminaires algébriques.
Soient $a_0, \ldots, a_n$ n points de $\mathbb{R}^d$ avec $d = 3$ pour les applications industrielles et $d = 2$ pour ces travaux pratiques. Une "courbe à pôles" paramétrée par la famille $(a_j)_{0 \leq j \leq n}$ est une fonction $[0, 1] \ni t \longmapsto P_n(a_0, \ldots, a_n ; t) \in \mathbb{R}^d$ décrite par un polynome de Bernstein :

$$P_n(a_0, \ldots, a_n ; t) \equiv \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} a_k .$$

On a une relation fondamentale (qu'il n'est pas interdit de démontrer !) :

$$P_n(a_0, \ldots, a_n ; t) = (1-t) P_{n-1}(a_0, \ldots, a_{n-1} ; t) + t P_{n-1}(a_1, \ldots, a_n ; t)$$

pour tout $a_0, \ldots, a_n$ appartenant à $\mathbb{R}^d$ et tout $t \in [0, 1]$. Donner une interprétation géométrique.

- Le but de ce TP est de construire de proche en proche un algorithme (dit de De Casteljau) afin de tracer la courbe à pôle pour un ensemble suffisant de paramètres $t \in [0, 1]$.

2) Cas du degré 2.
On se donne a_0, a_1, a_2 trois points de $\mathbb{R}^2$. Représenter le "polygone de contrôle" $[a_0, a_1] \cup [a_1, a_2]$. Pour quelques valeurs du paramètre t, calculer et tracer les points $P_1(a_0, a_1 ; t)$ et $P_1(a_1, a_2 ; t)$. Tracer également le segment de droite $\big[P_1(a_0, a_1 ; t) , P_1(a_1, a_2 ; t)\big]$. Construire (en le représentant !) le point $P_2(a_0, a_1, a_2 ; t)$. Que remarque-t-on ? Pouvait-on prévoir le résultat ?

3) Cas du degré 3.
Reprendre la construction précédente avec quatre points a_0, a_1, a_2, a_3 de $\mathbb{R}^2$. Représenter le polygone de contrôle $[a_0 , a_1] \cup [a_1 , a_2] \cup [a_2 , a_3]$. Calculer successivement (en les représentant !) les points "d'ordre un" $P_1(a_0, a_1 ; t)$, $P_1(a_1, a_2 ; t)$ et $P_1(a_2, a_3 ; t)$. Puis passer aux points "d'ordre deux" : $P_2(a_0, a_1, a_2 ; t)$ (construit à la question précédente) et $P_2(a_1, a_2, a_3 ; t)$. Tracer le segment joignant ces deux derniers points ainsi que le point "final"

$P_3(a_0,\, a_1,\, a_2,\, a_3\,;\, t)$. Donner à la variable t quelques valeurs (une dizaine typiquement). Que remarque-t-on à nouveau ?

• En faisant varier la position relative des pôles $a_0,\, \ldots,\, a_3$, découvrir une autre propriété classique des "courbes à pôles".

4) Cas d'un degré arbitraire.
Concevoir un module général pour tracer la courbe à pôles paramétrée par les points $a_0,\, \ldots,\, a_n$ de $\mathbb{R}^2$. Il s'agit bien entendu d'une extension des cas traités aux questions 2 et 3.

• Tester ce module pour les degrés 2 et 3 avant de le voir s'exprimer pour des degrés plus élevés. Que se passe-t-il si deux pôles sont confondus ?

Nota bene. Les "courbes à pôles" ont été nommées ainsi en 1959 par leur inventeur, Paul de Faget de Casteljau. Elles sont plus connues sous le nom de "courbes de Bézier".

FD, octobre 2006, 20 octobre 2008.