Université Paris Sud — Département de Mathématiques d'Orsay
Agrégation de mathématiques
Modélisation et calcul scientifique — 07 novembre 2008

Minimisation sans contrainte à une et deux dimensions

1) Algorithme de dichotomie

Soit $a < b$ deux nombres réels et $f \,:\, [a,\, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. En suivant l'ouvrage de J.C. Culioli [*Introduction à l'optimisation*, Ellipses, 1994], on dit que f est **unimodale** sur l'intervalle $[a,\, b]$ si il existe $x^* \in]a,\, b[$ tel que f est strictement décroissante sur $]a,\, x^*[$ et strictement croissante sur $]x^*,\, b[$.

• On suppose la fonction f unimodale sur $[a,\, b]$ et on pose

$$x_1 = a + \frac{1}{4}(b-a)\,, \quad x_2 = a + \frac{1}{2}(b-a)\,, \quad x_3 = a + \frac{3}{4}(b-a).$$

Montrer que selon la position relative de $f(x_1)$, $f(x_2)$ et $f(x_3)$, on peut choisir $a' < b'$ tels que $b' - a' = \frac{1}{2}(b-a)$ et f unimodale sur $[a',\, b']$.

• En déduire un algorithme, dit de **dichotomie**, pour minimiser une fonction unimodale sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Le mettre en œuvre avec le logiciel “Matlab” et tester le programme obtenu avec le polynome $f(x) = 1 - x^2 + x^4$ pour fixer les idées.

• Déterminer **tous** les minima de la fonction

(1) $\quad f(x) \,=\, x^2 + 5\left(1 - \cos(2\pi x)\right).$

dans l'intervalle $[-1,\, +5]$.

• Au cours d'une itération, combien d'évaluations de la fonction f sont nécessaires ?

2) Algorithme de la section dorée

On suppose toujours f unimodale sur l'intervalle $[a,\, b]$. On note $\Phi \equiv \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. le nombre d'or. On introduit ζ et ξ de sorte que

$$\zeta \,=\, b - \frac{b-a}{\Phi} \,<\, \xi = a + \frac{b-a}{\Phi}\,.$$

• Après avoir remarqué que $\zeta = a + \frac{\xi - a}{\Phi}$ et $\xi = b - \frac{b-\zeta}{\Phi}$, montrer que selon la position relative de $f(\zeta)$ et $f(\xi)$, on peut choisir des nombres $a' < b'$ de sorte que f soit unimodale sur $[a',\, b']$, avec $b' - a' = \frac{b-a}{\Phi}$. En déduire l'algorithme de la section dorée pour calculer le minimum de la fonction f. Le tester avec la fonction proposée à la relation (1).

- Combien d'évaluations de la fonction f sont nécessaires pour une étape courante de l'algorithme ? Comparer l'efficacité de l'algorithme de la section dorée et l'algorithme de dichotomie.

3) Algorithme du gradient à pas constant
On désigne par $u \equiv (x,\, y)$ un point de $\mathbb{R}^2$ et par f l'une des deux fonctions suivantes :

(2) $f(x,\, y) \,=\, (x-1)^2 + 10\,(y-1)^2$

(3) $f(x,\, y) \,=\, x^2 + y^2 + 5\,\big(1-\cos(2\pi x)\big) + 5\,\big(1-\cos(2\pi y)\big)\,.$

et cette dernière est nommée "fonction de Rastringin".

La méthode la plus simple (et parfois la plus efficace !) pour chercher la solution u du problème de minimisation

(4) $$\begin{cases} u \,\in\, \mathbb{R}^2 \\ f(u) \,\leq\, f(v)\,, \quad \forall v \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

consiste à fixer $\rho > 0$ fixé, à choisir u^0 dans $\mathbb{R}^2$ et itérer l'algorithme du **gradient à pas constant** :

(5) $u^{k+1} \,=\, u^k - \rho\, \nabla f\big(u^k\big)\,, \quad k \in \mathbb{N}\,.$

- Mettre en œuvre cet algorithme pour chacune des deux fonctions proposées ci-dessus. On représentera à chaque étape d'une part le point u^k et d'autre part le segment $[u^k,\, u^{k+1}]$. Pourquoi le paramètre ρ ne doit-il pas être choisi trop grand ?

4) Gradient à pas optimal
Afin de s'affranchir de la contrainte du choix du paramètre ρ à la relation (5), l'algorithme du **gradient à pas optimal** consiste, une fois u^k et $\nabla f(u^k)$ connus, à chercher $\overline{\rho}^k$ de sorte que la fonction

$$[0,\, \overline{\rho}^k] \ni t \longmapsto f\big(u^k - t\,\nabla f(u^k)\big) \in \mathbb{R}$$

soit unimodale sur $[0,\, \overline{\rho}^k]$, puis à poser

(6) $u^{k+1} \,=\, u^k - \rho_k\, \nabla f\big(u^k\big)\,, \quad k \in \mathbb{N}\,,$

avec ρ_k choisi de sorte que

(7) $f\big(u^k - \rho_k\, \nabla f(u^k)\big) \,\leq\, f\big(u^k - t\,\nabla f(u^k)\big)\,, \quad \forall t \in [0,\, \overline{\rho}^k]\,.$

- Mettre en œuvre l'algorithme du gradient à pas optimal pour les fonctions introduites aux relations (2) et (3), avec le même type de visualisation des itérations.

FD, janvier 2006, 04 novembre 2008.