Université Paris Sud — Département de Mathématiques d'Orsay
Agrégation de mathématiques
Modélisation et calcul scientifique

16 octobre 2009

Projection sur quelques courbes planes

1) Projection sur une hyperbole.

• On se donne un point $u_0 \equiv (x_0,\, y_0)$ du plan et on note Γ l'hyperbole d'équation

(1) $x^2 - y^2 \,=\, 1\,.$

On cherche à déterminer $u_1 \in \Gamma$ qui minimise la distance de u_0 à l'hyperbole :

(2) $\lvert\, u_1 - u_0 \,\rvert = \min\limits_{u \in \Gamma} \lvert\, u - u_0 \,\rvert\,, \quad u_1 \in \Gamma\,.$

En introduisant la fonctionnelle

(3) $J(u) \,\equiv\, \dfrac{1}{2}\, \lvert\, u - u_0 \,\rvert^2\,,$

rappeler pourquoi le problème (2) admet au moins une solution et pourquoi celle-ci peut ne pas être unique.

• On se propose de calculer u_1 pour un point u_0 "le plus arbitraire possible". Rappeler les équations d'Euler-Lagrange de ce problème de minimisation sous contrainte. Montrer que ces équations reviennent à résoudre une équation du type

(4) $f(y) \,=\, 0\,,$

où $f(\bullet)$ est une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qu'on précisera.

• Résoudre l'équation (4) à l'aide d'un algorithme de Newton qu'on programmera avec "Matlab". On sera particulièrement vigilant à la phase d'initialisation et à l'ensemble du processus de validation.

• La "solution numérique" obtenue au point précédent est-elle toujours une bonne approximation d'une solution du problème (2) ?

2) Projection sur une quartique.

Reprendre le problème précédent quant on remplace l'hyperbole Γ d'équation (1) par la quartique d'équation

(5) $x^4 - y^4 \,=\, 1\,.$

FD, 13 octobre 2009.