Université Paris Sud — Département de Mathématiques d'Orsay
Agrégation de mathématiques
Modélisation et calcul scientifique — 6 novembre 2009

Algorithme de Uzawa

On se propose de déterminer numériquement la solution du problème

$$(1)\quad \begin{cases} u \in K \\ J(u) \,\leq\, J(v)\,, \quad \forall\, v \in K \end{cases}$$

pour une fonction $J(\bullet)$ quadratique

$$(2)\quad J(x,\,y) \,=\, \frac{1}{2}\bigg(\Big(\frac{x-a}{\alpha}\Big)^2 \,+\, \Big(\frac{y-b}{\beta}\Big)^2\bigg)$$

avec $(a,\,b) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha > 0,\, \beta > 0$ et K l'un des deux convexes suivants :

$$(3)\quad K_1 \,=\, \Big\{(x,\,y) \in \mathbb{R}^2,\, \frac{x}{p} \,+\, \frac{y}{q} \,=\, 1\Big\}$$

$$(4)\quad K_2 \,=\, \big\{(x,\,y) \in \mathbb{R}^2,\, x^2 + xy + y^2 \leq 1\,,\; x^2 - xy + y^2 \leq 1\,\big\}.$$

1) Gradient projeté.
Dans le cas où l'opérateur de projection P_K sur le convexe K est calculable facilement, l'algorithme du gradient projeté s'écrit

$$(5)\quad u^{k+1} \,=\, P_K\Big(u^k - \rho\,\nabla J(u^k)\Big)\,, \quad k \in \mathbb{N}$$

avec $\rho > 0$ fixé “au mieux”.

• Cet algorithme a été mis en œuvre dans le cas où $K = K_1$ le 23 octobre dernier.

2) Description et mise en œuvre de l'algorithme de Uzawa

Dans le cas où le calcul effectif de l'opérateur P_K est délicat (c'est le cas pour $K = K_2\,!$) voire impossible, on suppose pour fixer les idées que le convexe K est défini par le jeu d'inéquations

$$(6)\quad F_j(u) \leq 0\,, \quad j = 1,\,2$$

où $F_j(\bullet)$ est une fonction convexe continue de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On introduit le Lagrangien

$$(7)\quad \mathcal{L}(u,\,\lambda) \,=\, J(u) \,+\, \sum_{j=1}^{2} \lambda_j\, F_j(u)\,.$$

Rappelons que pour $\lambda = (\lambda_1,\, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, la notation $\lambda \geq 0$ signifie $\lambda_1 \geq 0$ **et** $\lambda_2 \geq 0$. On vérifie sans peine qu'on a

$$(8) \qquad \sup_{\lambda \geq 0} \mathcal{L}(u,\, \lambda) \;=\; \begin{cases} +\infty & \text{si}\, u \notin K \\ J(u) & \text{si}\, u \in K\,. \end{cases}$$

On pose alors

$$(9) \quad g(\lambda) \;=\; \inf_{u \in \mathbb{R}^2} \mathcal{L}(u,\, \lambda)\,.$$

Vérifier qu'on a

$$(10) \quad \frac{\partial g}{\partial \lambda_j}(\lambda) \;=\; F_j\big(u^*(\lambda)\big)\,, \quad j = 1,\, 2$$

où $u^*(\lambda)$ est le point de minimum de la solution du problème (9). L'algorithme de Uzawa consiste à utiliser l'algorithme du gradient projeté pour le problème dual

$$(11) \quad \begin{cases} \lambda \geq 0 \\ g(\lambda) \geq g(\mu)\,, \quad \forall\, \mu \geq 0 \end{cases}$$

ce qui revient à minimiser à λ fixé le Lagrangien $\mathcal{L}(u,\, \lambda)$ par rapport à u **sans** la contrainte $u \in K$, puis à modifier le multiplicateur λ grâce au gradient de g évalué à l'aide de la relation (10). Après l'initialisation

$$(12) \quad \lambda^0 \;\in\; K_+$$

l'algorithme s'écrit en deux étapes :

$$(13) \quad \begin{cases} u^k \in \mathbb{R}^2 \\ \mathcal{L}(u^k,\, \lambda^k) \leq \mathcal{L}(v,\, \lambda^k)\,, \quad \forall\, v \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

$$(14) \quad \lambda^{k+1} \;=\; \mathrm{P}_+\Big(\lambda^k + \rho\, F\big(u^k\big)\Big)\,, \quad \rho > 0$$

où P_+ est le projecteur sur le convexe K_+ des contraintes du problème dual, donné par

$$(15) \quad K_+ \;=\; \big\{\lambda,\;\, \lambda \geq 0\big\}$$

dans le cas de contraintes inégalités pour le problème de départ.

• Utiliser l'algorithme de Uzawa pour résoudre le problème (1) avec la fonction J donnée à la relation (2). On commencera par le cas $K = K_1$ et on comparera les résultats obtenus avec ceux du 23 octobre pour l'algorithme de gradient projeté. Puis on pourra aborder le cas plus difficile où $K = K_2$. On pourra dessiner les convexes et placer les itérés u^k de l'algorithme.

FD, 03 novembre 2009.