Université Paris Nord, Institut Galilée
Ingénieurs "Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique"
Cours de Systèmes Hyperboliques (seconde année)

Examen du 28 avril 2014 (2 heures)

Ondes de choc pour le "p-système"

Les notes de cours sont autorisées. Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la rigueur des explications fournies.

• Dans tout le problème, on désigne par γ une constante strictement supérieure à 1. Pour v variable strictement positive, on pose $p(v) = \frac{1}{\gamma\, v^\gamma}$. On note $\pi(v)$ une primitive de la fonction $p(\bullet)$ $(\frac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{d}v} = p)$ et $W \equiv (v,\, u)^{\mathrm{t}}$ un état arbitraire.

1) Démontrer rapidement que la fonction p est d'une part strictement décroissante et d'autre part strictement convexe sur l'intervalle $]0,\, +\infty[$.

• Le "p-système" pour la dynamique des gaz est défini par les équations

$$(1) \qquad \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$(2) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(p(v)) = 0$$

avec des variables $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ et deux fonctions inconnues $v(x,\, t)$ et $u(x,\, t)$ telles que la fonction $v(x,\, t)$ vérifie $v(x,\, t) > 0$.

2) Montrer que le système (1)(2) peut s'écrire sous la forme

$$(3) \qquad \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(W) = 0$$

avec $W \equiv (v,\, u)^{\mathrm{t}}$ et $f(W) \in \mathbb{R}^2$ une fonction que l'on précisera. On fera attention au fait que la lettre v est "avant" la lettre u dans l'écriture proposée pour le vecteur W.

• Pour un état $W_g = (v_g,\, u_g)^{\mathrm{t}}$ donné, on cherche $W = (v,\, u)^{\mathrm{t}}$ relié à W_g par une onde de choc.

3) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $W(x,\, t)$ définie par

$$(4) \qquad W(x,\, t) = \begin{cases} W_g & \text{si } x < \sigma\, t \\ W_d & \text{si } x > \sigma\, t \end{cases}$$

soit une solution faible du système (3) avec une condition initiale qu'on précisera.

• On introduit le couple (η, ζ) suivant :

(5) $$\eta(W) = \frac{1}{2} u^2 - \pi(v) , \qquad \zeta(W) = u \, p(v) .$$

4) Montrer que le couple (η, ζ) définit d'une part une entropie mathématique η et d'autre part le flux d'entropie associé ζ pour le p-système.

• On suppose que la fonction W définie en (4) est solution faible du système (3) avec la condition initiale trouvée à la question 3. On pose

(6) $$[\psi] \equiv \psi_d - \psi_g \qquad \text{pour tout champ } \psi .$$

On définit la fonction φ grâce à la relation

(7) $$\sigma \, [\eta] - [\zeta] = [u] \, \varphi(v_g, v_d) .$$

5) Montrer qu'on a l'identité

(8) $$\varphi(v_g, v_d) = \frac{[\pi]}{[v]} - \frac{1}{2} \big(p(v_g) + p(v_d) \big)$$

pour tous les états W_g et W_d qui satisfont aux conditions imposées à la question 3.

6) Montrer que φ satisfaisant la relation (8) est une fonction toujours négative ou nulle. On pourra étudier les variations de la fonction $v \longmapsto (v - v_g) \, \varphi(v_g, v)$.

7) Déduire des questions précédentes que le choc décrit en (4) est entropique si et seulement si on a

(9) $$u_d \leq u_g .$$

8) Montrer que les états $W = (v, u)^{\rm t}$ qui peuvent être reliés à l'état donné W_g par une onde de choc entropique sont définis par

(10) $$u = U(v) \equiv u_g - \sqrt{ \big(p(v) - p(v_g) \big) \, (v_g - v) } .$$

9) Etudier la fonction $U(\bullet)$ et tracer la courbe $u = U(v)$ dans le plan (v, u).

FD, 2002, 2005, 2006, avril 2014.

Université Paris Nord, Institut Galilée
Ingénieurs "Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique"
Cours de Systèmes Hyperboliques (seconde année)

Question de cours du 28 avril 2014 (1 heure)

Les notes de cours sont interdites. Il sera tenu compte de façon essentielle de la précision des définitions et des théorèmes énoncés ainsi que de la rigueur dans les arguments proposés lors des preuves.

1) Soit f une fonction régulière de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On s'intéresse à l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\big(f(u)\big) = 0\,,\; x \in \mathbb{R}\,,\; t > 0\,,$$

où la fonction $u(x,\,t)$ est à valeurs scalaires. On se donne aussi une fonction u_0 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour laquelle on n'impose aucune régularité *a priori.* On suppose que la fonction u satisfait à la condition initiale

$$(2) \qquad u(x,\,0) = u_0(x)\,,\; x \in \mathbb{R}.$$

Si on cherche une solution faible du problème de Cauchy (1)(2), quelles hypothèses doivent vérifier la fonction u et la condition initiale u_0 ?

2) Rappeler les relations satisfaites par u et u_0 lorsque u est solution faible du problème de Cauchy (1)(2).

3) Si u et u_0 sont maintenant des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que u soit une solution faible du problème de Cauchy (1)(2) ?

4) Qu'appelle-t-on entropie mathématique pour l'équation (1) ? Si on note η une telle entropie mathématique, quelle est la relation satisfaite par le flux d'entropie associé ζ ?

5) Avec les mêmes hypothèses qu'à la question précédente, quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que u soit une solution faible entropique du problème de Cauchy (1)(2) ?

6) Si $(u_g,\,u_d)$ est un couple d'états tels qu'une discontinuité est présente le long d'une courbe régulière Γ avec $\sigma \equiv \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, rappeler pourquoi la condition d'entropie prend la forme

$$(3) \qquad \mathcal{D} \leq 0\,, \quad \text{avec } \mathcal{D} \equiv \zeta(u_d) - \zeta(u_g) - \sigma\,\big(\eta(u_d) - \eta(u_g)\big)\,.$$

FD, avril 2014.