Université Paris Nord, Institut Galilée
Ingénieurs “Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique”
Cours de Systèmes Hyperboliques (seconde année)

Examen partiel du 05 avril 2013 (1 heure 30)

Les notes de cours sont autorisées. Il sera tenu compte de façon essentielle de la clarté et de la rigueur des explications fournies.

Pour ce contrôle des connaissances, on se propose d'étudier une équation hyperbolique. On se donne un réel a et la fonction régulière $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$(1) \qquad f(u) = a\,u - \frac{u^2}{2}\,, \quad u \in \mathbb{R}\,.$$

On cherche une fonction $u(x,\,t)$ à valeurs scalaires solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$(2) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\Big(f\big(u(x,\,t)\big)\Big) = 0\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,\ t > 0.$$

On se donne aussi une fonction $u_0(\bullet)$ qui sera explicitée plus loin. La condition initiale pour la fonction u s'écrit sous la forme

$$(3) \qquad u(x,\,0) = u_0(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1) On cherche dans cette question une solution du problème de Cauchy (1)(2)(3) par la méthode des caractéristiques.

a) Montrer que la solution éventuelle $u(x,\,t)$ solution de (1)(2)(3) est constante le long des courbes caractéristiques qui satisfont à

$$(4) \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f'\big(u(x,\,t)\big)\,.$$

b) En déduire que les courbes caractéritiques sont des droites.

c) Pour $(x,\,t)$ donné dans $\mathbb{R} \times [0,\,+\infty[$, écrire une équation d'inconnue $y \in \mathbb{R}$ qui permet de trouver la droite caractéristique qui passe par ce point.

d) On se donne $T > 0$. Calculer la solution régulière du problème de Cauchy (1)(2)(3) dans le cas où la condition initiale est donnée par

$$(5) \qquad u_0(y) = -\frac{y}{T}\,, \quad y \in \mathbb{R}.$$

2) On cherche maintenant à expliciter des solutions autosemblables continues de l'équation (2) pour le flux (1), c'est à dire pour lesquelles il existe une fonction continue v de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de sorte que

$$(6) \qquad u(x,t) \,=\, v\Big(\frac{x}{t}\Big)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,\;\; t > 0\,.$$

a) Montrer qu'avec les hypothèses faites ci-dessus, on a

$$(7) \qquad v'(\xi)\,\big(a - \xi - v(\xi)\big) \,=\, 0\,, \quad \xi \in \mathbb{R}\,.$$

b) En déduire que pour $u_g \geq u_d$, on peut construire une solution que l'on précisera du problème de Cauchy (1)(2)(3) avec la condition initiale

$$(8) \qquad u_0(y) \,=\, \begin{cases} u_g\,, & y < 0 \\ u_d\,, & y > 0\,. \end{cases}$$

c) La solution calculée à la question b) est-elle solution faible du problème de Cauchy (1)(2)(3)(8) ?

3) On cherche maintenant à construire une solution faible discontinue solution du problème de Cauchy (1)(2)(3)(8).

a) Comment choisir la vitesse de la discontinuité σ ?

b) Expliciter la fonction $u(x,\, t)$ discontinue solution faible de (1)(2)(3)(8).

4) Afin de sélectionner la solution faible appropriée, on introduit une entropie mathématique η de flux d'entropie associé ζ.

a) Quelle propriété particulière possède la fonction η ? Quelle relation lie les fonctions η, ζ et f ?

b) Expliciter le flux d'entropie ζ si on choisit

$$(9) \qquad \eta(u) \,=\, \frac{u^2}{2}\,, \quad u \in \mathbb{R}\,.$$

c) Pour une discontinuité $(u_g,\, u_d)$ qui satisfait à la condition trouvée à la question 3-a), calculer la saut d'entropie δ défini par

$$(10) \qquad \delta \,\equiv\, \zeta(u_d) - \zeta(u_g) - \sigma\,\big(\eta(u_d) - \eta(u_g)\big)\,.$$

d) Montrer que δ est négatif sous une condition entre u_g et u_d que l'on précisera.

e) On suppose $a > 0$. Expliciter la solution faible entropique du problème de Cauchy (1)(2)(3)(8) dans les deux cas suivants : $(u_g,\, u_d) = (0,\, a)$ et $(u_g,\, u_d) = (a,\, 0)$.